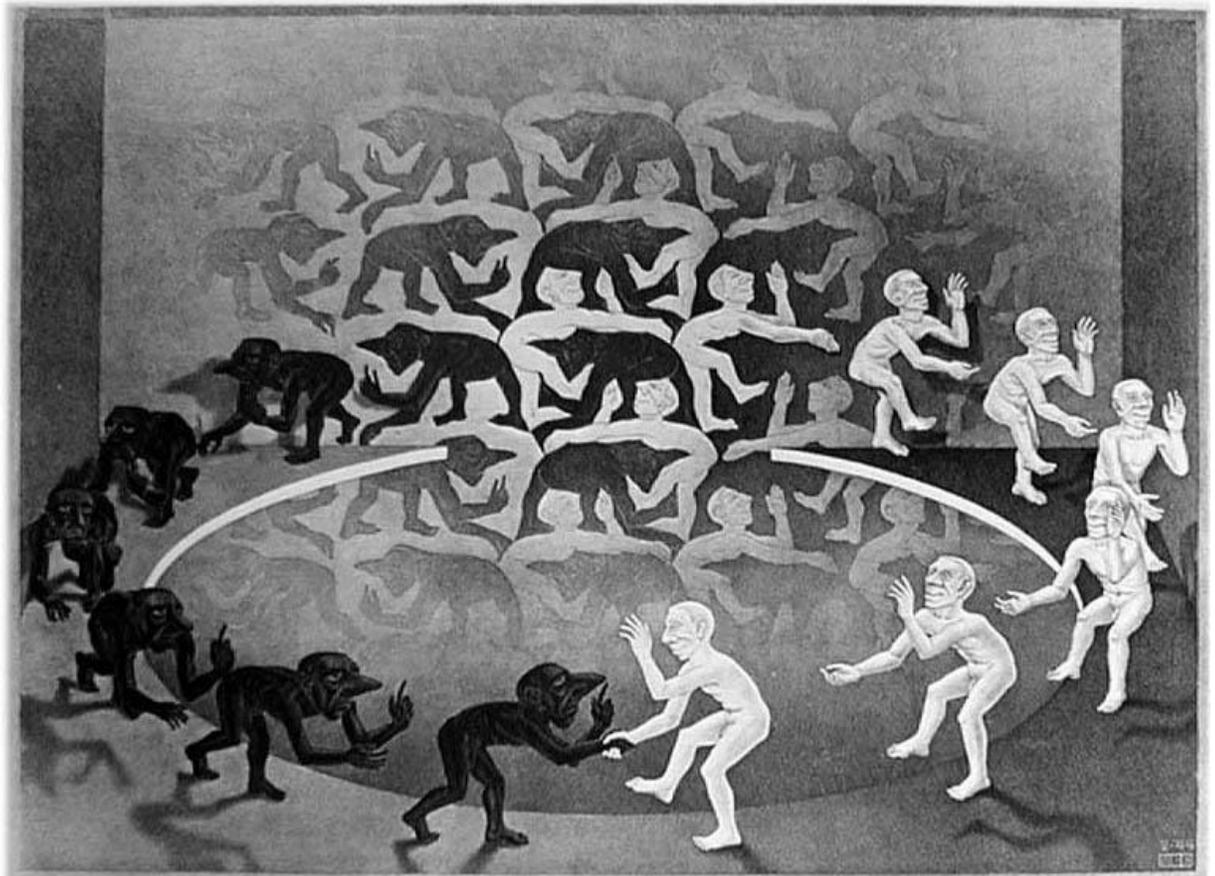


IES CARPE DIEM

# MATEMÁTICAS B

4º ESO. Opc B

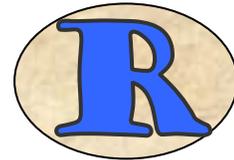




# Campos Numéricos

NÚMEROS REALES: R

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

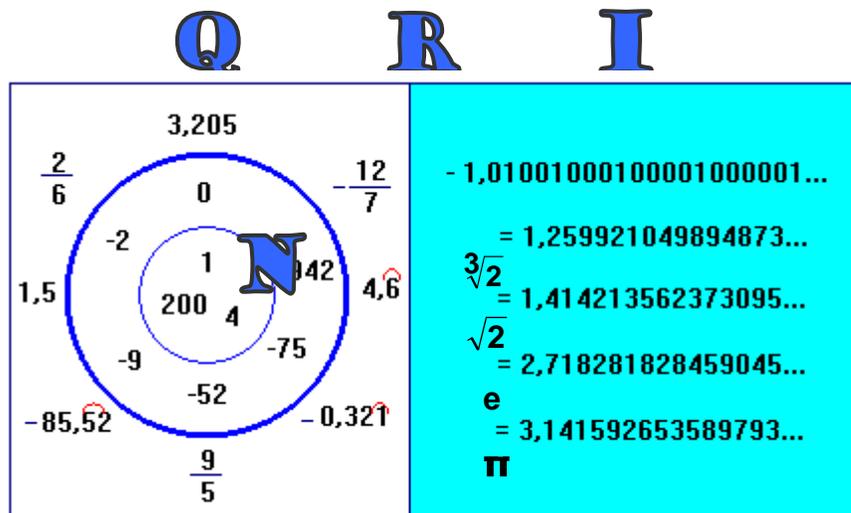


$$\mathbf{Z} = \{\dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\} = \left\{ \dots \frac{-7}{1} \dots \frac{6}{-2} \dots \frac{-5}{3} \dots \frac{0}{5} \dots \frac{1}{4} \dots \frac{2}{1} \dots \frac{125}{42} \dots \frac{80}{2} \dots \right\}$$

$$= \left\{ \dots -10, 25 \dots \sqrt[3]{-8} \dots 0 \dots \frac{1}{12} \dots \frac{6}{9} \dots \frac{9}{6} \dots \sqrt{16} \dots 5, 23 \dots \dots 5, 236 \dots \dots \frac{12}{1} \dots \right\}$$

$$\mathbf{I} = \left\{ -\sqrt{2} \dots -1,343443444 \dots \dots \sqrt[5]{3} \dots \sqrt[3]{5} \dots \sqrt{3,6} \dots e \dots \sqrt[3]{25} \dots \pi \dots 5,131133111333 \dots \dots \right\}$$



$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \quad \mathbf{I} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R} \quad \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$$

# FRACCIÓN GENERATRIZ



DECIMAL EXACTO	DECIMAL PERIÓDICO PURO	DECIMAL PERIÓDICO MIXTO
0,23 =	0,6 =	0,23 =
1,54 =	1,9̄ =	-1,82̄ =
-3,9 =	3,54̄ =	3,265̄ =
28,63 =	-2,71̄ =	31,19̄ =
523,1 =	32,9̄ =	5,104̄ =
88,703 =	-43,28̄ =	6,0523̄ =
-6,92 =	2,134̄ =	-0,37̄ =
702,8 =	-1,03̄ =	40,335̄ =
99,44 =	59,9̄ =	2,186̄ =
0,0032 =	3,403̄ =	-16,03̄ =
-125,1 =	4,3621̄ =	283,468̄ =

# Números reales



1 Escribe "el menor conjunto" al que pertenecen los siguientes números reales: N, Z, Q, I:

$\frac{8}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\sqrt{1000}$	$\sqrt[3]{1000}$	1,020020002...
---------------	---------------	---------------	------------------	----------------

$\sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$\sqrt{2+2}$	$\sqrt{2} + \sqrt{2}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
------------	----------------	--------------	-----------------------	---------------------------

23,9	23,99	23,999	23,9̇	$\frac{0}{5}$
------	-------	--------	-------	---------------

$(-3)^5$	9,83444...	$\sqrt{111}$	$-(-2)^4$	2539,2
----------	------------	--------------	-----------	--------

$2 - \frac{9}{4}$	$-6 \cdot \frac{2}{3}$	$(-4)^{250}$	5,23754	$-\sqrt{121}$
-------------------	------------------------	--------------	---------	---------------

$6^0$	43,4555...	0,9̇	$-\frac{-13}{4}$	$-\frac{3}{-5}$
-------	------------	------	------------------	-----------------

0,636363...	$\pi$	187,563	$\frac{6}{8}$	-7,123424242...
-------------	-------	---------	---------------	-----------------

$-1,06 \cdot 10^4$	$2,6453 \cdot 10^8$	$\pi - \frac{\pi}{3}$	$(-5)^{4029}$	2,05
--------------------	---------------------	-----------------------	---------------	------

$3 - 2 \cdot 10$	$3 - (2 \cdot 10)$	$\frac{3}{2} - 2 \cdot 10$	$3 - \frac{2 \cdot 10}{2}$	$\frac{3 - 2 \cdot 10}{2}$
------------------	--------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

187,563̄	$\frac{\sqrt{36}}{2}$	$3\pi - 2$	$-\frac{3003}{101}$	$-\frac{3003}{1001}$
----------	-----------------------	------------	---------------------	----------------------

$\frac{\sqrt{35}}{2}$	24,325	$-\frac{-3}{-9}$	$-\frac{(-3)^2}{-9}$	$-(-\pi)^3$
-----------------------	--------	------------------	----------------------	-------------

$\frac{5^2}{5}$	$\frac{5}{5^2}$	$\frac{5}{4} - \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4} - \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} - \frac{5}{4}$
-----------------	-----------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

1,020202...	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{(-12)^2}{3}$	$-\frac{3}{6}$	$(2\pi)^2 - 4\pi^2$
-------------	-----------------	----------------------	----------------	---------------------

$-\frac{-1}{\frac{3}{6}}$	$-\frac{1}{\frac{3}{6}}$	$\frac{17+16}{3}$	$-\frac{17+16}{3}$	$-\frac{17+16}{3}$
---------------------------	--------------------------	-------------------	--------------------	--------------------

# EXPRESIONES ARITMÉTICAS 1



1 Obtén el resultado de las siguientes expresiones:

1.  $5 - 2(-3) + 36:(-9) =$

2.  $4(3 - 9 + 8)2 - 18:3 \cdot 2 =$

3.  $3 - 5[-4 - 3(-5) - (-8) + 2(-3)](-7) =$

4.  $25:(-5) + [72 + 5 \cdot (-26 + 5) - 20:(-3 + 8:2 \cdot 2)](-9 - 3 \cdot 2) =$

5.  $-2 + 450:[7 - 2 \cdot 9 - [8 - 504:(-6) \cdot 2 + 95:(-5) \cdot (-2)] + 5[3 - (-3):(-1)]] =$

6.  $3 - \frac{5}{-8}(-3) =$

$$\frac{4}{-5} - \frac{-6}{7} =$$

7.  $\frac{5}{-3} - \frac{-2}{4} + \frac{-3}{-9} =$

$$-\frac{7}{2} - \frac{3}{5} \left( \frac{5}{-6} - 1 \right) =$$

8.  $-\frac{4 - 5(1 - 3)}{2 + \frac{-8}{6}} =$

9.  $\frac{-1 - 5(5 - 8)}{\frac{5}{2} - 3 \left( -6 + \frac{1}{3} + 2 \right)} =$

10.  $\frac{-1,8\widehat{3} : \left( \frac{-5}{-3} \right)}{2 - 3 \frac{4,2}{3 - 6(-3)}} =$

# EXPRESIONES ARITMÉTICAS 2

1.  $5 - [4 - (2 - 5) + 4 \cdot 3] + 8(-5 + 7) =$

2.  $8 - 105 + 972 : [13 + 4 \cdot (-10)](-2) - 5 \cdot (-1) \cdot 5 =$

3.  $\frac{7}{4} - \frac{2,6}{6} + \frac{2}{3} \left( 4 - \frac{0,3}{0,6} \right) =$

4. 
$$\frac{2 - \frac{6}{5} : (-6) + \frac{-4}{2 + \frac{7}{3}}}{\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left( -9 - \frac{5}{-3} + \frac{8}{4} \right)} =$$

5.

$$3 - \frac{\frac{-1 + 2 \cdot (-1)}{3 - 3(-5)}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2 + \frac{-58}{5 + \frac{9}{10} : \frac{27}{-5}}}} =$$



# SACAR FACTOR COMÚN

S  
A  
C  
A  
R  
  
F  
A  
C  
T  
O  
R  
  
C  
O  
M  
Ú  
N

$$\frac{\sqrt{55 + 55 + 55 + 55 + 55}}{5}$$



# S A C A R F A C T O R C O M Ú N

1. Saca factor común y calcula después:

a)  $15 - 10 + 25 - 35 =$

b)  $24 + 26 - 28 + 32 - 54 =$

c)  $36 - 3600 + 360 - 3600 =$

d)  $-121 - 33 - 77 - 55 =$

e)  $68 + 119 - 51 + 340 =$

f)  $0,02 - 0,04 + 0,08 =$

g)  $0,3 - 0,009 + 0,0006 =$

h)  $0,5 - 0,25 + 0,125 =$

i)  $\frac{7}{4} - \frac{5}{4} - \frac{2}{8} =$

j)  $\frac{5}{25} - \frac{6}{15} + \frac{4}{20} =$

2. Saca factor común y calcula después:

a)  $2^5 + 2^6 - 2^4 =$

b)  $3^{624} - 3^{622} + 3^{623} =$

c)  $5^{1050} - 5^{1040} + 5^{1060} =$

d)  $2^{50} 2^5 - 2^{39} 2^{13} =$

e)  $(-5^2)^3 + 5^7 - (5^2)^4 =$

f)  $4^{31} - 2^{64} - 8^{21} =$

g)  $-125^{60} + 25^{89} =$

h)  $2 \cdot 3^{23} - 5 \cdot 3^{26} =$

i)  $(2 \cdot 3)^{23} - (5 \cdot 3)^{26} =$

j)  $5^{-2} + 4 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^{-3} =$



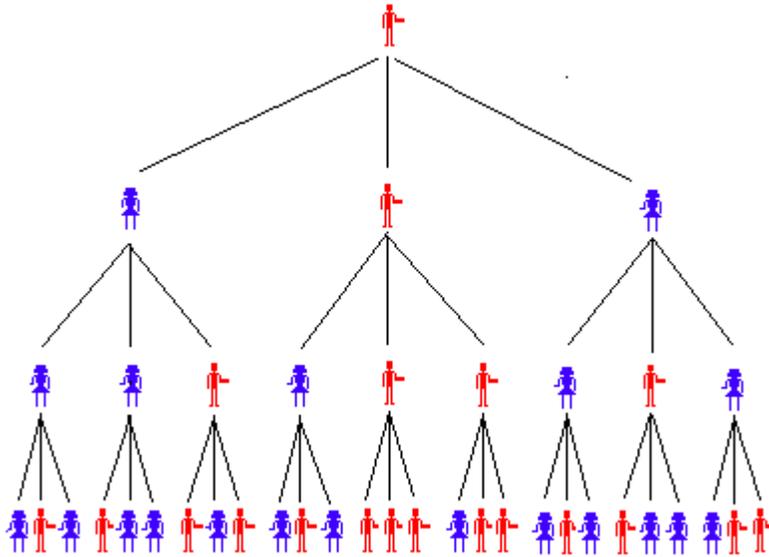
# POTENCIAS

## CADENA DE FAVORES

Una persona, en un acto de buena fe, decide hacer tres favores a tres personas; un favor por persona. A cambio, cada una de ellas, en correspondencia, tiene que hacer tres favores a otras tres, y así sucesivamente.

Al final, se construye una gran cadena de buenas acciones, que puede ser interminable.

¿Cuántos favores se realizan en las cuatro primeras fases?



	Operación	Resultado
<b>1ª Fase</b>	$3 = 3^1$	3
<b>2ª Fase</b>	$3 \cdot 3 = 3^2$	9
<b>3ª Fase</b>	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$	27
<b>4ª Fase</b>	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$	81

**Total= 120**

# POTENCIAS 1

$1^{45} =$

$1^{-45} =$

$-1^{45} =$

$-1^{-45} =$

$(-1)^{45} =$

$(-1)^{-45} =$

$-(-1)^{45} =$

$-(-1)^{-45} =$

$2^4 =$

$(-2)^4 =$

$-2^4 =$

$-(-2)^4 =$

$2^{-4} =$

$(-2)^{-4} =$

$-2^{-4} =$

$-(-2)^{-4} =$

$3^5 =$

$(-3)^5 =$

$-3^5 =$

$-(-3)^5 =$

$3^{-5} =$

$(-3)^{-5} =$

$-3^{-5} =$

$-(-3)^{-5} =$

$7^2 =$

$-(-5)^4 =$

$-6^{-3} =$

$-6^{-2} =$

$50^0 =$

$(-8)^{-1} =$

$(-2)^7 =$

$-(-9)^{-1} =$

$-3^{-6} =$

$(-20)^6 =$

$-(-5)^{-3} =$

$[(-5)]^3 =$

$-8^{-3} =$

$-(-6)^3 =$

$-10^{-5} =$

$(-11)^{-2} =$

$10^{-5} =$

$-(-12)^{-2} =$

$-40^{-3} =$

$-(-2)^{-2} =$

$[(-9)]^2 =$

$5^4 =$

$(-2)^{-9} =$

$(-20)^8 =$

$6^{-1} =$

$(-300)^{-2} =$

$-(-4)^{-3} =$

$-3^{-3} =$

$5^5 =$

$[(-2)]^8 =$

$-(-2)^{-8} =$

$-5000^2 =$

$-[(-1)^7] =$

$-75^0 =$

$-5^{-5} =$

$[(-2)]^{-6} =$

$-(-9)^{-2} =$

$-(-6)^3 =$

$-30^{-4} =$

$-7^{-2} =$

$-[-(15^{-2})] =$

$2^{-6} =$

$-(-35)^{-1} =$

$-5^{-4} =$

$180^{-2} =$

$-(-43)^0 =$

$-(-4)^5 =$

$-[-(-5^{-3})] =$ <sup>10</sup>

# POTENCIAS 2

$$\frac{1^2}{6} =$$

$$\frac{1}{6^2} =$$

$$\frac{1^2}{-6} =$$

$$\frac{-1}{6^2} =$$

$$\frac{(-1)^2}{6} =$$

$$\frac{-1}{(-6)^2} =$$

$$\frac{(-1)^2}{-6} =$$

$$\frac{-1}{-(-6)^2} =$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 =$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^2 =$$

$$-\left(-\frac{1}{6}\right)^2 =$$

$$\left[-\left(-\frac{1}{6}\right)\right]^2 =$$

$$\frac{1^{-2}}{6} =$$

$$\frac{1}{6^{-2}} =$$

$$\frac{1^{-2}}{-6} =$$

$$\frac{-1}{6^{-2}} =$$

$$\frac{(-1)^{-2}}{6} =$$

$$\frac{1}{(-6)^{-2}} =$$

$$-\frac{(-1)^{-2}}{6} =$$

$$-\frac{1}{(-6)^{-2}} =$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} =$$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} =$$

$$-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} =$$

$$\left[-\left(-\frac{1}{6}\right)\right]^{-2} =$$

$$\frac{4^3}{5} =$$

$$\frac{4}{5^3} =$$

$$\frac{4^3}{-5} =$$

$$\frac{-4}{5^3} =$$

$$\frac{(-4)^3}{-5} =$$

$$\frac{4}{-(-5)^3} =$$

$$\frac{-(-4)^3}{5} =$$

$$\frac{-4}{(-5)^3} =$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 =$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^3 =$$

$$-\left(-\frac{4}{5}\right)^3 =$$

$$\left[-\left(-\frac{4}{5}\right)\right]^3 =$$

$$\frac{4^{-3}}{5} =$$

$$\frac{4}{5^{-3}} =$$

$$\frac{4^{-3}}{-5} =$$

$$\frac{-4}{5^{-3}} =$$

$$\frac{(-4)^{-3}}{5} =$$

$$\frac{-4}{(-5)^{-3}} =$$

$$-\frac{(-4)^{-3}}{-5} =$$

$$\frac{-4}{(-5)^{-3}} =$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} =$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3} =$$

$$-\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3} =$$

$$\left[-\left(-\frac{4}{5}\right)\right]^{-3} =$$

# POTENCIAS 3

$$3^4 + (-2)^4 =$$

$$3^4 - (-2)^4 =$$

$$3^4 \cdot (-2)^4 =$$

$$3^4 : (-2)^4 =$$

$$5^{-4} \cdot 5^{-2} =$$

$$-5^{-3} : 5^{-8} =$$

$$2^9 \cdot 8^2 =$$

$$3^{-5} \cdot 9^3 =$$

$$(-3)^2 \cdot 3^{-5} =$$

$$(-6^2) : (-6)^2 =$$

$$(-5)^3 \cdot 8^3 =$$

$$4^{-6} : 2^{-6} =$$

$$-(-4^3) : 4^{-8} =$$

$$-9^{-5} \cdot (-9^3) =$$

$$3^5 \cdot 2^5 \cdot (-5^5) =$$

$$8^{-3} : (-4)^{-3} \cdot 3^{-3} =$$

$$7^2 \cdot (-7) : 7^{-3} =$$

$$(-5)^2 : 5^{-3} \cdot (-5)^6 =$$

$$3^{-4} : 4^6 \cdot (-3)^5 =$$

$$-2^5 : (-6^{-3}) \cdot (-2)^{-5} =$$

$$2^5 \cdot 5^{-3} \cdot 4^{-2} : 25 =$$

$$-81 : 7^{-1} \cdot 3^{-2} : 7 =$$

$$\left[ - \left[ (-2)^{-8} \right]^2 \right]^5 =$$

$$- \left[ \left[ (-3)^3 \right]^2 \right]^{-4} =$$

$$(-5)^3 + \left[ (-5)^{-1} \right]^3 =$$

$$\left[ (-2)^5 \right]^3 : (4^{-2})^{-3} =$$

$$(-5)^3 \cdot \left[ (-5)^{-1} \right]^3 =$$

$$\left[ (-2)^5 \right]^3 - (4^{-2})^{-3} =$$

$$\left[ (-7)^2 \right]^3 \cdot \left[ (-7)^4 \right]^2 =$$

$$\left[ (-3)^5 \right]^3 : \left[ (-3^5)^2 \right] =$$

$$(-2)^2 \cdot 6^{-4} : (2^{-2})^2 =$$

$$(-2 - 6)^4 + (2^{-2})^2 =$$

# POTENCIAS 4

$$2^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$2^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$2^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 3^6 =$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} : 4^{-2} =$$

$$\left(-\frac{8}{4}\right)^3 : (-4)^{-2} =$$

$$-3^{-6} \cdot \left(\frac{3}{27}\right)^{-4} =$$

$$-\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^{-1} =$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-5} : \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} =$$

$$-\left(-\frac{5}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} =$$

$$\left(-\frac{6}{3}\right)^{-4} : (-2)^6 =$$

$$-(-3)^{-5} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} =$$

$$-8^{-5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} =$$

$$\left(-\frac{7}{5}\right)^{-3} \cdot \left[(-2)^{-3}\right] =$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right)^2 : \left[-\left(-\frac{5}{3}\right)^2\right] =$$

# POTENCIAS 5

$$\left(\frac{2}{8}\right)^4 : (-4^{-2}) : (-16) =$$

$$3^{-5} \cdot (-9^{-3}) : 27^{-1} =$$

$$2^{-6} \cdot \left(-\frac{6}{3}\right)^{-4} : \left(-\frac{12}{3}\right)^{-2} =$$

$$\left(-\frac{9}{3}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 81 =$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{-2} \left(-\frac{5}{8}\right)^3 \left(-\frac{5}{8}\right)^{-3} =$$

$$\left(\frac{4}{6}\right)^{-5} : \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \left(-\frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^5 =$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^5 =$$

$$\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^5 =$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^5 =$$

$$\left[\left(\frac{1}{-5}\right)^2\right]^{-3} \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4}\right]^2 =$$

$$\left[\left(\frac{-4}{3}\right)^{-3}\right]^3 : \left(\frac{-4}{-3}\right)^{-8} =$$

$$-\left[-\left(\frac{-3}{6}\right)^{-2}\right]^{-3} : \left[-(-2)^{-3}\right]^4 =$$

$$\left[-\left(\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-1} \cdot \left[-\left(\frac{5}{3}\right)^{-7}\right]^{-2} =$$

$$\left[-\left(-\frac{5}{9}\right)^{-1}\right]^3 \cdot \left(\frac{3}{-5}\right)^{-3} =$$

$$-\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^3 \cdot \left[\left(\frac{-1}{6}\right)^{-3}\right]^2 =$$

$$\left[-\left(\frac{-4}{3}\right)^{-2}\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{9}{2}\right)^2\right]^{-3} =$$

$$\left[-\left(\frac{-4}{3}\right)^{-2}\right]^2 + \left[\left(\frac{9}{2}\right)^2\right]^{-3} =$$

# POTENCIAS 6

$$\frac{5^{-2} \cdot 5^2}{5^{-6} \cdot 5^4} =$$

$$-\frac{7^{-5} \cdot 7^{-4}}{7^4 \cdot 7^{-8}} =$$

$$\frac{2^{-9} \cdot (-2)^{-5}}{(-2)^4 \cdot (-2^8)} =$$

$$\frac{3^2 \cdot 3^{-7} \cdot (-3^{-2})}{(-3) \cdot (-3^2)^{-1}} =$$

$$\frac{3125 \cdot 81^{-1}}{-3^{-4} \cdot (-5)^3} =$$

$$-\frac{(-7)^{-5} \cdot 7}{343^2 \cdot (-49)^{-3}} =$$

$$\frac{3^{-6} \cdot [(-2)^4]^{-2} \cdot (-3^{-5})^3}{-\left[(2^{-1})^{-1}\right]^{-3} \cdot 12^{-4}} =$$

$$-\frac{-(-3) \cdot (5^2)^{-2}}{(-5^2)^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot (-3^6)} =$$

$$-\frac{(-5^3)^{-2} \cdot (-2)^4 \cdot 3^{-1}}{(-40^5)^{-1} \cdot (0,3)^{-3}} =$$

$$\frac{[(27)^{-2}]^3 \cdot x^3 \cdot 2^{-5} \cdot (-y)^{-3}}{(-162)^{-1} \cdot xy^2 \cdot x^{-4}} =$$

# NOTACIÓN CIENTÍFICA



1- Escribe los siguientes números en notación científica:

$1.000.000.000 =$

$345 \text{ billones} =$

$43.560.000.000.000.000 =$

$-543.200.000.000.000.000.000 =$

$3.42 \cdot 10^3 =$

$-5.3426 \cdot 10^7 =$

$0.00000003 =$

$0.0000000000123 =$

$0.000000000000000826 =$

$0.0000000000000003895 =$

$1.58 \cdot 10^{-1} =$

$-6.2005 \cdot 10^{-5} =$

$100.000.000.000 \cdot 52.000.000.000 =$

$142.000.000.000.000 \cdot 300.000.000 =$

$213.000.000.000.000.000.000 \cdot (-50.000.000.000.000) =$

$0.0000000005 \cdot 313.000.000.000.000.000 =$

$-0.00000000000042 \cdot (-0.000000002) =$

$0.0000000321 \cdot 0.000000000000004 =$

$2.500.000.000.000.000.000.000 : 500.000.000 =$

$-0.0000000000000000000049 : 0.000000000000007 =$

$0.000000000131 : 0.000000000000005 =$

$0.00000235 : 400.000.000.000.000.000 =$

$23.000.000.000.000 =$

$8397 \text{ trillones} =$

$12.570.000.000.000.000 =$

$-34.560.000.000 =$

$0.00955 \cdot 10^5 =$

$3.5896 \cdot 10^8 =$

$0.0000000000000042 =$

$0.000000000000000024 =$

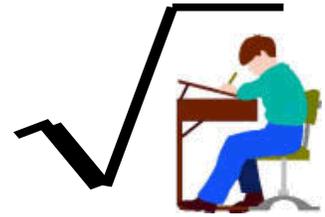
$-0.00000000000000000097 =$

$0.00000000000000015782 =$

$4.748 \cdot 10^{-3} =$

$0.0061 \cdot 10^{-7} =$

# RADICALES

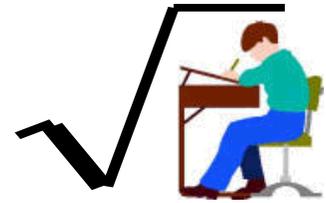


LA TORRE EIFFEL MIDE 300 METROS  
Y SU PESO ES DE 8.000 TONELADAS  
DE HIERRO FORJADO.

¿CUÁNTO MIDE UNA COPIA A ESCALA DE 1 KG ?



# RADICALES I



1. Clasifica estos números en el “menor conjunto” al que pertenecen, represéntalos y ordénalos:

$$-2,7 \quad -\sqrt{10} \quad \frac{\pi}{2} \quad 2\sqrt{6} \quad \sqrt{\frac{8}{4}} \quad 1,\hat{3} \quad \frac{\sqrt{16}}{2} \quad \sqrt[3]{2^2}$$



2. Resuelve mentalmente:

a)  $\sqrt{225} =$

b)  $\sqrt{121} =$

c)  $\sqrt{144} =$

d)  $\sqrt[3]{8} =$

e)  $\sqrt[3]{-27} =$

f)  $\sqrt[5]{243} =$

g)  $\sqrt[4]{10000} =$

h)  $\sqrt[7]{-1} =$

i)  $\sqrt[4]{-2} =$

3. Expresa en forma de potencia:

a)  $\sqrt{5} =$

b)  $\sqrt[3]{2} =$

c)  $\sqrt[5]{3^2} =$

d)  $\sqrt[9]{2^7} =$

e)  $\sqrt[5]{3^4} =$

f)  $-\sqrt[5]{2} =$

g)  $\sqrt[3]{5} =$

h)  $\sqrt[7]{x^4} =$

i)  $\sqrt[5]{a^3} =$

4. Expresa en forma de raíz:

a)  $125^{\frac{1}{3}} =$

b)  $3^{\frac{2}{5}} =$

c)  $16^{\frac{2}{8}} =$

d)  $2^{\frac{3}{5}} =$

e)  $5^{\frac{3}{4}} =$

f)  $9^{\frac{2}{4}} =$

g)  $-3^{\frac{1}{2}} =$

h)  $3^{-\frac{1}{2}} =$

5. Simplifica las raíces (I):

a)  $\sqrt{5^2} =$

b)  $\sqrt[4]{3^8} =$

c)  $\sqrt[5]{2^{10}} =$

d)  $\sqrt[3]{5^9} =$

e)  $\sqrt[3]{4^3} =$

f)  $\sqrt[3]{3^6} =$

g)  $\sqrt[4]{2^4} =$

h)  $\sqrt{3^8} =$

i)  $\sqrt[10]{2^{30}} =$

j)  $\sqrt[5]{7^5} =$

k)  $\sqrt[4]{9^2} =$

l)  $\sqrt[6]{5^2} =$

m)  $\sqrt[8]{3^4} =$

n)  $\sqrt[4]{4} =$

ñ)  $\sqrt[8]{16} =$

o)  $\sqrt[6]{5^4} =$

p)  $\sqrt[8]{3^6} =$

q)  $\sqrt[15]{2^{10}} =$

r)  $\sqrt[3]{a^6} =$

s)  $\sqrt[3]{a^3} =$

6. Simplifica las raíces (II):

a)  $\sqrt{2^3} =$

b)  $\sqrt[5]{3^7} =$

c)  $\sqrt{2^5} =$

d)  $\sqrt[3]{5^8} =$

e)  $\sqrt[5]{3^9} =$

f)  $\sqrt[4]{3^5} =$

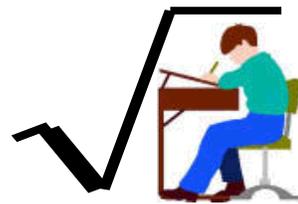
g)  $\sqrt[3]{5^{11}} =$

h)  $\sqrt{3^7} =$

i)  $\sqrt[3]{a^5} =$

j)  $\sqrt{x^3} =$

# RADICALES 2



7. Calcula utilizando las propiedades de los radicales:

a)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} =$

b)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$

c)  $\sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt[3]{7} =$

d)  $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} =$

e)  $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 6} =$

f)  $\sqrt[5]{3x^4} \cdot \sqrt[5]{2y^2} =$

g)  $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{2^5} =$

h)  $\sqrt{3^5} \cdot \sqrt{3^3} =$

i)  $\sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{5^4} \cdot \sqrt[3]{x^2} =$

j)  $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$

k)  $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} =$

l)  $\frac{\sqrt[5]{16 \cdot 4}}{\sqrt[5]{2}} =$

m)  $\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2}} =$

n)  $\frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{\sqrt{3}} =$

ñ)  $\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{125}} =$

o)  $\sqrt{16} : \sqrt{2} =$

p)  $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} : \sqrt[3]{\frac{2}{5}} =$

q)  $\sqrt[4]{2^{-1}} : \sqrt[4]{3a} =$

r)  $(\sqrt{5})^2 =$

s)  $(\sqrt{2^5})^2 =$

t)  $(\sqrt[3]{3^2 \cdot 5})^2 =$

u)  $(\sqrt{\sqrt[3]{a^2}})^6 =$

v)  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^5}}} =$

w)  $\sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{3\sqrt[3]{5^{120}}}}} =$

8. Expresa en factores primos los radicandos y simplifica (III):

a)  $\sqrt{50} =$

b)  $\sqrt{135} =$

c)  $\sqrt{2000} =$

d)  $\sqrt[3]{135} =$

e)  $\sqrt[3]{-240} =$

f)  $\sqrt[3]{-1250x^5} =$

g)  $\sqrt[4]{128 \cdot 243 \cdot a^8} =$

h)  $\sqrt[5]{729a^7b^8c^5} =$

9. Expresa en una sola raíz:

a)  $3\sqrt{5} =$

b)  $5 \cdot \sqrt[3]{2^2} =$

c)  $7 \cdot \sqrt[4]{7^3} =$

d)  $2^3 \cdot \sqrt{2} =$

e)  $3^2 \cdot 5 \cdot \sqrt[4]{5^2} =$

f)  $8^3 \cdot 3^4 \cdot \sqrt{2^3 \cdot 3^4} =$

10. Opera:

a)  $\sqrt{5} - \sqrt{9} =$

b)  $\sqrt{5} - 2 + 3\sqrt{5} =$

c)  $2\sqrt[5]{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt[5]{3} =$

d)  $-\sqrt{2} - 5 + 7\sqrt{2} - 5\sqrt{3} =$

e)  $\sqrt[3]{625} - 2\sqrt[3]{3} - 6\sqrt[3]{5} =$

f)  $5\sqrt{8} + 3\sqrt{128} - 4\sqrt[3]{2} + \sqrt{32} =$

g)  $3\sqrt[5]{2^7} - 6\sqrt[5]{4} + 2\sqrt[5]{128} =$

h)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} =$

i)  $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2} =$

j)  $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[5]{3^3} =$

k)  $\sqrt{2\sqrt{3}} =$

l)  $\sqrt[3]{5\sqrt{2}} =$

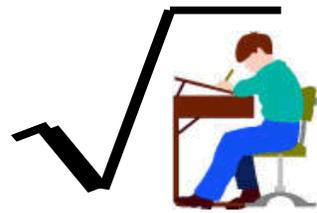
m)  $\sqrt{4^3\sqrt{3}} =$

n)  $\sqrt[3]{3^2\sqrt{5^3}} =$

ñ)  $\sqrt{2^5\sqrt[4]{2^3}} =$

o)  $2 \cdot \sqrt[5]{2^3\sqrt[3]{7^2}} =$

# RADICALES 3



**11.** Opera y simplifica, escribiendo el resultado final:

$$a) \sqrt{27x^2y^5} \sqrt[5]{36x^7y^3} =$$

$$b) 2a^5 \sqrt[5]{320a^{-7}} \sqrt{400a^9} =$$

$$c) \frac{8x \sqrt[5]{64x^2}}{2 \sqrt[3]{48x^{-2}}} =$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{a^2bc^{-2}}}{3b^3 \sqrt{a^{-4}b^8c^{-1}}} =$$

**12.** Racionaliza, escribiendo el resultado final:

$$l) a) \frac{1}{\sqrt{5}} =$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$c) \frac{6}{\sqrt{2}} =$$

$$d) \frac{1}{2\sqrt{7}} =$$

$$e) \frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$f) \frac{3}{\sqrt[3]{9}} =$$

$$g) \frac{2}{\sqrt[5]{5}} =$$

$$h) \frac{6}{\sqrt[5]{4}} =$$

$$i) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2^2}} =$$

$$j) \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{3}} =$$

$$k) \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{2^5}} =$$

$$l) \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{3}} =$$

$$m) \frac{2\sqrt[5]{3}}{\sqrt[3]{2^7}} =$$

$$n) \frac{\sqrt{2^4}}{4\sqrt[5]{2^8}} =$$

$$ñ) \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} =$$

$$o) \frac{5}{\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^2}} =$$

$$p) -\frac{5}{3\sqrt{2}} =$$

$$q) \frac{3}{\sqrt[7]{3^5}} =$$

$$r) \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{3}} =$$

$$s) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5 \cdot 2^3}} =$$

$$ll) a) \frac{1}{2\sqrt{3}-2} =$$

$$b) \frac{2}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}} =$$

$$c) \frac{5}{4\sqrt{5}+1} =$$

$$d) \frac{2}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}} =$$

$$e) \frac{2}{5\sqrt{2}+6} =$$

$$f) \frac{3}{2\sqrt{3}-5\sqrt{5}} =$$

$$g) \frac{4}{7\sqrt{2}-3} =$$

$$h) \frac{3}{6\sqrt{3}+\sqrt{5}} =$$

$$i) \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3} =$$

$$j) \frac{8\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-6\sqrt{3}} =$$

$$k) \frac{3\sqrt{6}}{5+2\sqrt{5}} =$$

$$l) \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-1} =$$

$$m) \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}} =$$

$$n) \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}} =$$

$$ñ) \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{4}} =$$

# REPASO 1



Une mediante flechas cada expresión con su solución:

1. 1)  $2 - [15 + 14 : [-1 - (-2) \cdot (-3)] \cdot 5]$

a) 0

2)  $4 \cdot 5 \cdot (-3) - 25 : (-5) \cdot 2 + 3^3$

b) 180

3)  $-3 \cdot (-2 + 6) - (2 + 4)^2 : (-3)$

c) 15

4)  $(-3)^4 + 2(-3)^3 - 2(-3)^2 - (-3) + 3$

d) -23

5)  $(5 \cdot 4)^3 - 5 \cdot 4^3 + 5^3 \cdot 4 - 5^3 \cdot 4^3$

e) -3

2.

1)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} - \frac{4^2}{5} \cdot \frac{2^{-1} - \frac{1,34}{2,42}}{0,393}$

2)  $\frac{2^{-1} - \frac{1,34}{2,42}}{0,393}$

3)  $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}}{\left[\left(\frac{2}{-3}\right)^2\right]^{-3}}$

4)  $\frac{-2^{-5} \cdot 3^{-3} \cdot (-32)^{-2}}{(-2^4)^{-3} \cdot (-64)^{-1} \cdot 9}$

5)  $\frac{-3^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-3}}{5^0 - \frac{3}{4 - \left(\frac{-4}{-2} - \frac{9}{4}\right)}}$

a)  $-\frac{8}{243}$

b)  $-\frac{153}{5}$

c)  $-\frac{500}{3597}$

d)  $-\frac{32}{243}$

e)  $-\frac{67}{20}$

3.

1)  $2 \cdot \sqrt[3]{81} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{3} - 6 \cdot \sqrt[3]{27}$

a)  $100 + 12\sqrt{3}$

2)  $5\sqrt{27} - 6\sqrt{25} - 4 \cdot \sqrt[3]{243} + 5\sqrt{81}$

b)  $15\sqrt{3} - 12 \cdot \sqrt[3]{9} + 15$

3)  $-3\sqrt{243} - 4 \cdot \sqrt[3]{8} + 5\sqrt{27} + 4\sqrt{729}$

c)  $6 \cdot \sqrt[3]{3} - 11\sqrt{3} - 18$

4)  $4 \cdot \sqrt{9\sqrt{3^2}} + 50(\sqrt{2})^2$

d)  $100 - 12\sqrt{3}$

4.

1)  $x\sqrt{32x^4y^5} \cdot \sqrt[3]{8x^8y^9}$

a)  $\frac{x^3}{2y^2} \sqrt[10]{\frac{x^6}{128y^5}}$

2)  $\frac{x^2y^5\sqrt[5]{16x^8}}{2\sqrt{8y^7}}$

b)  $4x^4y^5\sqrt[6]{16xy^3}$

3)  $y^2 \cdot \sqrt[3]{32x^5y^6} \cdot \sqrt{4x^5y^3}$

c)  $8x^5y^5\sqrt[6]{8x^4y^3}$

4)  $\frac{x^5\sqrt{8y^9}}{4y\sqrt[5]{32x^6}}$

d)  $\frac{x^4y^3}{4} \sqrt[10]{\frac{32y^5}{x^2}}$

5. RACIONALIZA:

a)  $\frac{8}{3\sqrt{2}} =$

b)  $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{2}}{6\sqrt[4]{3}} =$

c)  $\frac{2}{3\sqrt{2} + 7} =$

d)  $\frac{9\sqrt{5}}{2\sqrt{3} - 9\sqrt{5}} =$

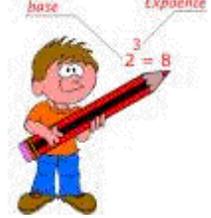
# LOGARITMOS

¿CUÁL ES EL MAYOR NÚMERO QUE PUEDE ESCRIBIRSE CON TRES CIFRAS IDÉNTICAS?

¿CUÁNTAS CIFRAS TIENE ESE NÚMERO?



# LOGARITMOS 1



$$2^x = 1$$

$$x = \log_2 1$$

$$7^x = 21$$

$$x = \log_7 21$$

$$4^x = 4000$$

$$x = \ln 4000$$

$$10^x = 1000$$

$$x = \log_{10} 1000$$

$$2^x = 2$$

$$x = \log_2 2$$

$$e^x = 4$$

$$x = \log_e 4$$

$$e^x = e^2$$

$$x = \log_e e^2$$

$$10^x = 10^5$$

$$x = \log_{10} 10^5$$

$$5^x = 625$$

$$x = \log_5 625$$

$$32^x = 8$$

$$x = \log_{32} 8$$

$$32^x = \sqrt{8}$$

$$x = \log_{32} \sqrt{8}$$

$$11^x = 121$$

$$x = \log_{11} 121$$

$$5^x = 1$$

$$x = \log_5 1$$

$$e^x = 39,75$$

$$x = \ln 39,75$$

$$2^x = 64$$

$$x = \log_2 64$$

$$\pi^x = 9$$

$$x = \log_\pi 9$$

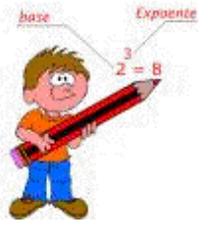
$$10^x = 1.000.000$$

$$x = \log_{10} 1.000.000$$

$$(3,3)^x = 5$$

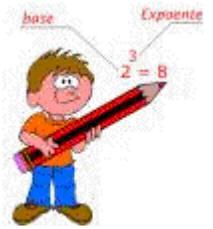
$$x = \log_{3,3} 5$$

# LOGARITMOS 2



$\log_3 9 =$	$\log_5 \left(\frac{1}{5}\right) =$	$\log_2 1.024 =$
$\log_4 64 =$	$\log 0,1 =$	$\log_{20} 1 =$
$\log_5 1 =$	$\log_2 16 =$	$\log_2 \sqrt[5]{2} =$
$\log_2 8 =$	$\log_5 5 =$	$\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) =$
$\log_8 8 =$	$\log_3 9^2 =$	$\text{Le}^4 =$
$\log_3 27 =$	$\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) =$	$\log_3 243 =$
$\log_2 \sqrt{2} =$	$\log_2 64 =$	$\log_2 512 =$
$\log 10.000 =$	$\log_9 1 =$	$\log_2 \left(\frac{1}{4}\right) =$
$\text{Le}^2 =$	$\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) =$	$\log_3 81 =$
$\log_7 7 =$	$\log_2 256 =$	$\log_5 \sqrt[4]{5} =$
$\log_3 \left(\frac{1}{3}\right) =$	$\log_4 4 =$	$\ln \left(\frac{1}{e}\right) =$
$\log_6 36 =$	$\ln e^3 =$	$\log_2 32 =$
$\log_5 125 =$	$\log_4 16 =$	$\log_6 6 =$
$\log 0,01 =$	$\log_5 625 =$	$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) =$
$\log_5 \sqrt{5} =$	$\log_2 2^4 =$	$\log_3 729 =$
$\log_9 9 =$	$\log_3 \sqrt{3} =$	$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$
$\log_6 \left(\frac{1}{6}\right) =$	$\log 10 =$	$\text{Le}^{80} =$
$\log_7 343 =$	$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) =$	$\log_9 81 =$
$\log 1.000 =$	$\log_4 1 =$	$\log_7 \left(\frac{1}{7}\right) =$
$\text{Le}^{-2} =$	$\log_5 25^{-2} =$	$\log_3 3 =$
$\log_5 \sqrt[3]{5} =$	$\log_7 \left(\frac{1}{49}\right) =$	$\log_3 9^{-1} =$
$2\log_3 3 =$	$-\log_4 \left(\frac{1}{4}\right) =$	$3\ln e^3 =$
$6\log 100 =$	$2\log_5 \left(5^2\right)^3 =$	$2\log_2 \sqrt[5]{8} =$
$-\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} =$	$5\text{L} \left(\frac{1}{e}\right)^{-2} =$	$37\log_2 1 =$

# LOGARITMOS 3



$$\log 7 + \log 5 =$$

$$\log_2 5 + \log_2 4 =$$

$$\log_3 8 + \log_3 5 + \log_3 2 =$$

$$\log_4 2 + \log_4 8 =$$

$$\log_7 6 - \log_7 2 =$$

$$\log_3 5 - 3\log_3 4 =$$

$$5\log_2 10 - \log_2 0,3 =$$

$$\log 5 + 3\log 4 - 2\log 3 =$$

$$3\log 8 - 5\log 2 + 4\log 5 =$$

$$2\log_5 8 - \log_5 4 - 2\log_5 4 =$$

$$3\log 100.000 =$$

$$5\log 10.000 =$$

$$2\log\left(\frac{1}{100}\right) =$$

$$3\log\left(\frac{1}{10.000}\right)^2 =$$

$$-6\log\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right) =$$

$$2\log\left(\frac{1}{\sqrt[4]{10.000}}\right)^{-2} =$$

$$-2\ln(e^3)^{-5} =$$

$$3Le^{ee} =$$

$$\log\sqrt{3} = \quad \cdot \log 3$$

$$\log_5 64 = \square \cdot \log_5 2$$

$$\log_3 \sqrt[4]{5} = \square \cdot \log_3 5$$

$$\log_2 0,3 = \square \cdot \log_2 3$$

$$\log_5 (2^4)^2 = \square \cdot \log_5 2$$

$$\log_3 125 = \square \cdot \log_3 5$$

$$\log 8^{-2} = \square \cdot \log 2$$

$$\log_5 \left(\frac{1}{16}\right) = \square \cdot \log_5$$

$$\log\left(\frac{1}{27}\right)^{-2} = \square \cdot \log 3$$

$$\log_4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \square \cdot \log_4 2$$

$$\log 30 = \log 3 + \square$$

$$\log 500 = \log 5 + \square$$

$$\log 2.000 = \log 2 + \square$$

$$\log 0,3 = \log 3 + \square$$

$$\log 0,06 = \log 6 + \square$$

$$3\log 160 = \square \cdot \log 2 + \square$$

$$7\log 250 = \square \cdot \log 5 + \square$$

$$5\log 0,000008 = \square \cdot \log 2 + \square$$

# LOGARITMOS 4



1. Calcula mentalmente:

a)  $\log_3 3 =$                       b)  $\log_3 \sqrt{3} =$                       c)  $\log_3 (3\sqrt{3}) =$                       d)  $\log_3 \sqrt{3\sqrt{3}} =$

2. Resuelve:

a)  $2^x \cdot 5^x = 0,1$                       b)  $2^x \cdot 3^x = 81$                       c)  $(0,5)^x = 64$                       d)  $3\log_2 x = 2$                       e)  $2\log 3 + 3\log x = 1$   
 f)  $2^x \cdot 5^x = 0,01$                       g)  $3^x \cdot 5^x = 23$                       h)  $(0,5)^x = 32$                       i)  $5\log_2 x = 4$                       j)  $5\log 2 + 2\log x = 2$   
 k)  $2^x \cdot 5^x = 0,001$                       l)  $3^x \cdot 2^x = 73$                       m)  $(0,5)^x = 16$                       n)  $4\log_3 x = 5$                       ñ)  $3\log 5 + 5\log x = 4$

3. Si  $\log t = 2,1$  calcula:

a)  $\log\left(\frac{100t}{3}\right) =$   
 b)  $\log\left(\frac{1}{t^3}\right) =$   
 c)  $\log\sqrt[4]{10t} =$

4. Si  $\log t = 4,3$  calcula:

a)  $\log\left(\frac{10t}{9}\right) =$   
 b)  $\log\left(\frac{1}{t^4}\right) =$   
 c)  $\log\sqrt[5]{100t} =$

5. Si  $\log t = 1,8$ , calcula:

a)  $\log\left(\frac{1000t}{3}\right) =$   
 b)  $\log\left(\frac{1}{t^5}\right) =$   
 c)  $\log\sqrt[4]{10t^2} =$

6. Calcula, utilizando las propiedades de los logaritmos:

a)  $\log_4 50 - 3\log_4 3 + 5\log_4 3$                       b)  $\log_3 20 - 2\log_3 2 + 4\log_3 2$   
 c)  $\log_2 30 - 3\log_2 5 + 2\log_2 5$                       d)  $\log_5 40 - 3\log_5 7 + 6\log_5 3$

7. Expresa en un solo logaritmo:

a)  $2\log a^3 - \frac{2}{5}\log b - 5\log\sqrt{c}$                       b)  $5\log a^2 - \frac{3}{2}\log b + \frac{\log c^4}{3}$                       c)  $\frac{\log a^6}{2} + \frac{5}{3}\log a^{-1} - 6\log\sqrt[5]{a}$

8. Desarrolla en función de  $\log 2$ ,  $\log 3$  y  $\log 5$ :

a)  $\log\left(\frac{2^3 \cdot 5^{-1}}{\sqrt[7]{3}}\right)$                       b)  $\log\left(\frac{2^5 \cdot 5^{-3}}{\sqrt[5]{3}}\right)$                       c)  $2\log\left(\frac{\sqrt{3}}{(2^3)^2 \cdot 5^3}\right)$                       d)  $3\log\left(\frac{3^4}{2^2 \cdot \sqrt[4]{5}}\right)$

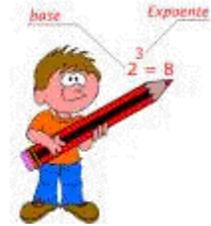
9. Resuelve:

a)  $6^x = 7$                       b)  $6^{2x} = 7$                       c)  $6^{2x} 6 = 7$                       d)  $3\log 3^2 + 2\log x^3 = 5$   
 e)  $4^x = 5$                       f)  $4^{2x} = 5$                       g)  $4^{2x} 4^3 = 5$                       h)  $5\log_5 x - 2\log_5 3 = 3$   
 i)  $5^x = 6$                       j)  $5^{2x} = 6$                       k)  $5^{2x} 2 = 6$                       l)  $2\log_2 x^3 - 5\log_2 3^2 = \log_2 3$

10. Razona, si para cualquier valor de  $a$  positivo distinto de 1, es verdadero o falso:

a)  $\frac{\log\frac{1}{a} - \log\sqrt{a}}{\log a^2} = \frac{3}{4}$                       b)  $\frac{\log\sqrt{a} + \log\frac{1}{a}}{\log a^4} = \frac{1}{8}$                       c)  $\frac{\log\sqrt[3]{a} + \log\frac{1}{a}}{\log a^3} = -\frac{2}{9}$

# LOGARITMOS 5



1. Calcula mentalmente:

a)  $3\log_2 64 + \log_2\left(\frac{1}{4}\right) - \log_2 \sqrt{2} =$

b)  $4\log_2\left(\frac{1}{32}\right) + \log_3\left(\frac{1}{27}\right) - 2\log_2 1 =$

c)  $\log_5 25^{-2} - \frac{\log_2 16}{3} - 3\log 0,001 =$

d)  $2\ln e^3 - 5\ln(e^2)^{-1} - 3\ln \sqrt{e} =$

2. Si  $\log x = -2,3$  halla:    3. Si  $\log x = -5,6$  halla:    4. Si  $\log x = -3,1$  halla:    5. Si  $\log x = -4,4$  halla:

a)  $\log(5x^6)$

a)  $\log(3x^5)$

a)  $\log(2x^4)$

a)  $\log(2x^3)$

b)  $\log(5x)^6$

b)  $\log(3x)^5$

b)  $\log(2x)^4$

b)  $\log(2x)^3$

c)  $\log\left(\frac{1}{x^3}\right)$

c)  $\log\left(\frac{1}{x^4}\right)$

c)  $\log\left(\frac{2}{x^5}\right)$

c)  $-\log\left(\frac{5}{x^6}\right)^2$

d)  $\log \sqrt[3]{5x}$

d)  $\log \sqrt[3]{2x}$

d)  $3\log \sqrt[3]{4x^5}$

d)  $2\log \sqrt[3]{3x^2}$

6. Resuelve:

a)  $\log_x 125 = 3$

b)  $\log_x \frac{1}{9} = -2$

c)  $\log 3^x = 2$

d)  $\log x^2 = -2$

e)  $7^x = 115$

f)  $5^{-x} = 3$

g)  $\log_x \frac{1}{4} = 2$

h)  $\log_x 2 = \frac{1}{2}$

i)  $\log_x 0,04 = -2$

j)  $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$

7. Expresa en función de  $\log 2$  y  $\log 3$ :

a)  $\log\left(\frac{3^3 \cdot 2^2}{2^4 \cdot 3^{-5}}\right)$

b)  $\log\left(\frac{2^5 \cdot 3^{-2}}{3^3 \cdot 2^{-1}}\right)$

c)  $\log\left(\frac{2^4 \cdot 0,03^{-1}}{0,3^2 \cdot 32^{-2}}\right)$

d)  $\log\left(\frac{3^5 \cdot 0,0002^{-1}}{4^3 \cdot 0,027^{-2}}\right)$

8. Sabiendo que  $\log 2 \approx 0,3$ , calcula, sin utilizar calculadora:

a)  $2\log\left(\frac{0,0128^{-1} \cdot \sqrt[5]{0,16}}{0,04}\right)^3$

b)  $5\log\left(\frac{0,64^3 \cdot \sqrt[3]{0,0032}}{0,0008}\right)^{-1}$

9. Escribe cuántas cifras tienen los siguientes números:

a)  $913^{95}$

b)  $504^{283}$

c)  $2156^{3^4}$

d)  $\sqrt[5]{927^{538}}$

e)  $2 \cdot 34^{700}$

10. Escribe cuáles son los siguientes números:

a)  $26^{173}$

b)  $3926^{45}$

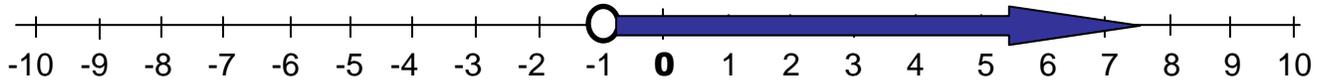
c)  $538^{4321}$

d)  $\sqrt[3]{36^{3333}}$

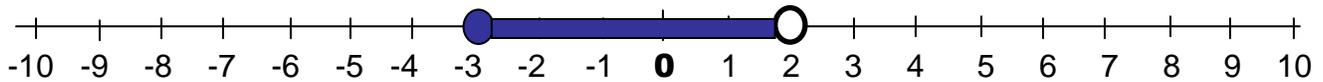
e)  $3 \cdot 564^{49}$

# ( [ ( INTERVALOS ) ] )

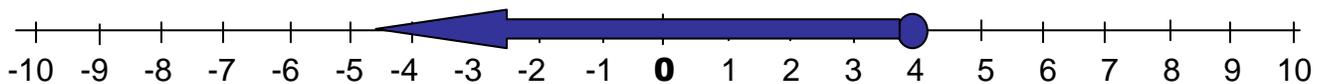
$$A = (-1, +\infty) = \{x > -1\}$$



$$B = [-3, 2) = \{-3 \leq x < 2\}$$



$$C = (-\infty, 4] = \{x \leq 4\}$$



# ( [ ( INTERVALOS 1 ) ] )

1. Sean  $A = [-4, 1]$  ,  $B = [-1, 4]$  ,  $C = (2, +\infty)$  Expresa los intervalos como inecuaciones.

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

2. Sean:  $A = (-\infty, 2]$  ,  $B = [1, 5]$  ,  $C = (2, 4]$  Expresa los intervalos como inecuaciones.

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

3. Sean:  $A = (-\infty, -3)$  ,  $B = [3, 6)$  ,  $C = (3, +\infty)$  Expresa los intervalos como inecuaciones.

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

4. Sean:  $A = \{x \geq -2\}$  ,  $B = \{-3 < x < 4\}$  ,  $C = \{x \leq 4\}$  Exprésalos como intervalos.

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

5. Sean:  $A = \{-1 < x < 5\}$  ,  $B = \{x \geq -1\}$  ,  $C = \{x > -5\}$  Exprésalos como intervalos.

---

# ( [ ( INTERVALOS 2 ) ] )

1. Sean:  $A = [-4, 1]$  ,  $B = [-1, 4]$  ,  $C = (2, +\infty)$  Expresa los intervalos con los signos de desigualdad..

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

2. Sean:  $A = (-\infty, 2]$  ,  $B = [1, 5]$  ,  $C = (2, 4]$  Expresa los intervalos como inecuaciones.

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

3. Sean:  $A = (-\infty, -3)$  ,  $B = [3, 6)$  ,  $C = (3, +\infty)$  Expresa los intervalos como inecuaciones.

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

4. Sean:  $A = \{x \geq -2\}$  ,  $B = \{-3 < x < 4\}$  ,  $C = \{x \leq 4\}$  Exprésalos como intervalos.

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

5. Sean:  $A = \{-1 < x < 5\}$  ,  $B = \{x \geq -1\}$  ,  $C = \{x > -5\}$  Exprésalos como intervalos.

---

Completa:  $A \cup B =$                        $B \cup C =$                        $A \cup C =$                        $A \cup B \cup C =$   
 $A \cap B =$                        $B \cap C =$                        $A \cap C =$                        $A \cap B \cap C =$

# S A C A R F A C T O R C O M Ú N

1. Sacar factor común y calcular después:

a)  $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3} =$

b)  $-9\sqrt[3]{5} + 8\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} =$

c)  $-2\sqrt[4]{2} - 5\sqrt[4]{32} - 6\sqrt[4]{2} =$

d)  $4\sqrt{27} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{243} =$

2. Sacar factor común y calcular después:

a)  $5\log 3 - 2\log 3 - 5\log 3 =$

b)  $\log 125 - \log 625 + \log 3125 =$

c)  $2\log_3 16 - 5\log_3 2 + 5\log_3 8 =$

d)  $2\log_2 \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\log_2 \sqrt{3}}{4} =$

3. Sacar factor común:

a)  $5x^5 - 30x^4 - 25x^3 + 15x^2 =$

b)  $7x^4 + 49x^7 + 21x^6 - 14x^5 =$

c)  $2abc + 2bc + 4ac =$

d)  $3x^2y - 2xy - 5xy^2 =$

e)  $5h^3t^2 - 9ht^2 + 2h^2t^2 =$

f)  $2y^3x^4 - 4x^5zy^2 + z^4y^4x^3 =$

g)  $8x^{-2} + 2x^{-6} - 6x^{-3} =$

h)  $2x^{-4} + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} =$

i)  $\frac{7}{3}\sqrt{x} - \frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{x^3} =$

j)  $(n+1)2 + (n+1)3 + (-n-1)5 =$

k)  $4(x-3)^2 + 5(x-3)2 =$

l)  $(2x-1)3 - 2(2x-1)^2 =$

m)  $5(x+5)^2 - (x+5)(x+2) =$



# S A C A R F A C T O R C O M Ú N

4. Saca factor común, simplifica y calcula

$$1) \frac{15 + 25 - 35 + 45}{40 - 70 + 50} =$$

$$2) \frac{27 - 81 + 9 - 30}{33 - 18 + 15 - 3} =$$

$$3) \sqrt[3]{\frac{2^{20} - 2^{12}}{2^{15} - 2^{23}}} =$$

$$4) \sqrt{\frac{16^4 + 32^2}{2^3 + 8^3}} =$$

$$5) \frac{3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^3}}{5\sqrt{32} - 6\sqrt{2^7}} =$$

$$6) \frac{2\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5^4} + 7\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{625} - 3\sqrt[3]{5^7}} =$$

$$7) \frac{4\log 25 - 2\log 125}{5\log 5 - 2\log 625} =$$

$$8) \frac{5\log_3 \sqrt[3]{8} + 3\log_3 16}{-\log_3 32 - 2\log_3 \sqrt[3]{4}} =$$

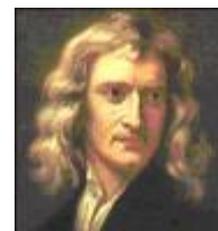
$$9) \frac{4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 2x}{7x^6 - 2x^5 + 3x^2 + x} =$$

$$10) \frac{3x^4 - 12x^3 + 6x}{9x^3 - 3x^2} =$$



# IDENTIDADES NOTABLES

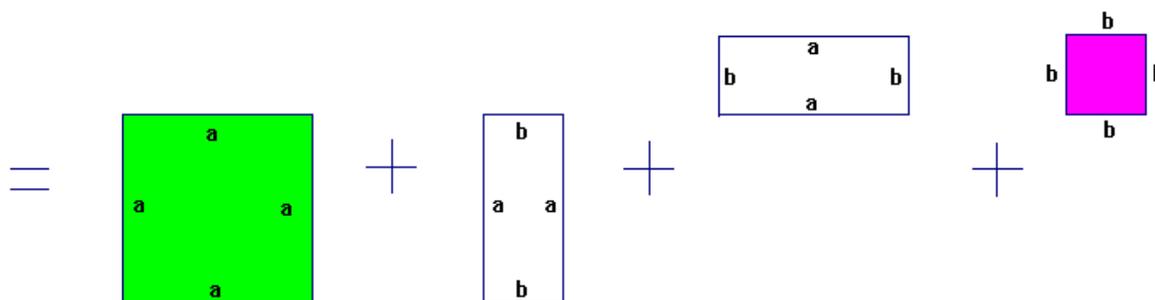
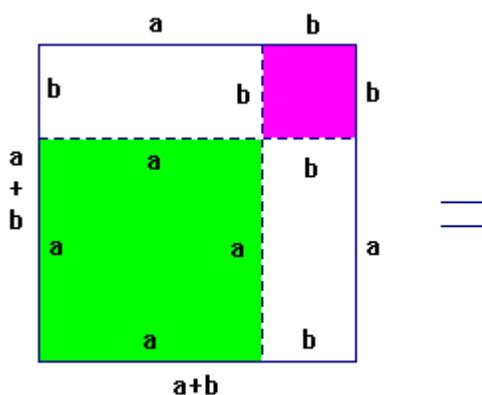
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



NEWTON

Una suma al cuadrado es igual

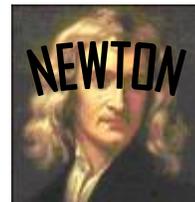
al cuadrado del primero más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.



$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 \Rightarrow$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

# IDENTIDADES NOTABLES 1



$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Una suma al cuadrado es igual

al cuadrado del primero más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Una diferencia al cuadrado es igual

al cuadrado del primero **menos** el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia = diferencia de cuadrados.

1. Calcula de dos formas:

a) hallando el valor de las expresiones:

$$(3+1)^2 =$$

$$(3-1)^2 =$$

$$(3+1)(3-1) =$$

$$(2+5)^2 =$$

$$(2-5)^2 =$$

$$(2+5)(2-5) =$$

$$(4+10)^2 =$$

$$(4-10)^2 =$$

$$(4+10)(4-10) =$$

$$\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\left(1 + \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right) =$$

b) Con las identidades notables.

$$(3+1)^2 =$$

$$(3-1)^2 =$$

$$(3+1)(3-1) =$$

$$(2+5)^2 =$$

$$(2-5)^2 =$$

$$(2+5)(2-5) =$$

$$(4+10)^2 =$$

$$(4-10)^2 =$$

$$(4+10)(4-10) =$$

$$\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\left(1 + \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right) =$$

# IDENTIDADES NOTABLES 2



2. Calcula con las identidades notables:

$$(x + y)^2 =$$

$$(x - y)^2 =$$

$$(x + y)(x - y) =$$

$$(x + 1)^2 =$$

$$(x - 1)^2 =$$

$$(x + 1)(x - 1) =$$

$$(2x + 3)^2 =$$

$$(2x - 3)^2 =$$

$$(2x + 3)(2x - 3) =$$

$$(3 + 5x)^2 =$$

$$(5x - 3)^2 =$$

$$(3 - 5x)(5x + 3) =$$

$$(5x + 2y)^2 =$$

$$(5x - 2y)^2 =$$

$$(5x + 2y)(2y - 5x) =$$

$$(2a + 5b^2)^2 =$$

$$(2a - 5b^2)^2 =$$

$$(2a + 5b^2)(2a - 5b^2) =$$

$$(\sqrt{5} + 1)^2 =$$

$$(\sqrt{5} - 1)^2 =$$

$$(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1) =$$

$$(\sqrt{4} + 2\sqrt{3})^2 =$$

$$(\sqrt{4} - 2\sqrt{3})^2 =$$

$$(\sqrt{4} - 2\sqrt{3})(\sqrt{4} + 2\sqrt{3}) =$$

3. Calcula con las identidades notables, sacando factor común previamente:

$$(2x + 4)^2 =$$

$$(4a - 8)^2 =$$

$$(3x + 6)(3x - 6) =$$

$$(-2x - 2)^2 =$$

$$(3x - 9)^2 =$$

$$(5x^2 + 3x)^2 =$$

$$(2a^2 + a)(2a^2 - a) =$$

$$(3x^2 - 3x)^2 =$$

$$(2xy - x)(2xy + x) =$$

4. Al revés:

$$x^2 - 2x + 1 =$$

$$x^2 + 4x + 4 =$$

$$x^2 - 36 =$$

$$-x^2 - 2x - 1 =$$

$$4x^2 + 12x + 9 =$$

$$-1 + 25x^2 =$$

$$9a^2 - 12a + 4 =$$

$$9a^4 - 4x^6 =$$

# DIVISIÓN DE POLINOMIOS

$$P(x) = 20x^3 + 60x^2 + 45x$$



Elige la factorización correcta.

- $2x^*(10x+3)(10x+3)$
- $5x^*(2x+3)(2x+3)$
- $2x^*(2x-3)(2x+3)$
- $5x^*(2x-3)(2x+3)$
- $5x^*(2x-3)(2x-3)$

1º SACA FACTOR COMÚN.  
2º UTILIZA ALGUNA IGUALDAD NOTABLE.



Dado el polinomio:  $p(x) = x^2 + 5x + 6$ ,  
se pide: a) Descomponerlo en factores.  
b) Hallar sus raíces.

Solución: Divisores de 6:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

1	5	6
-2	2	4
1	3	0
3	6	
1	0	

$x^2 + 5x + 6$	6
$x + 3$	$x + 3$
1	

a) Luego  $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

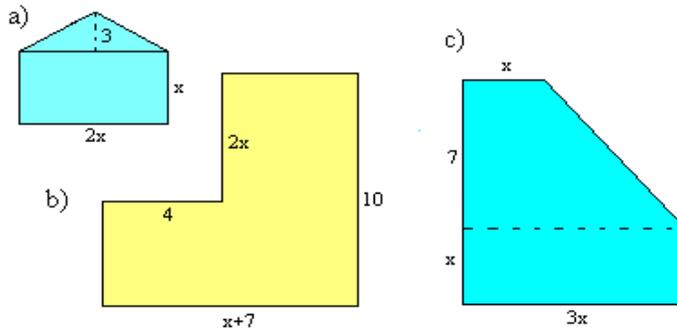
b) Por el T<sup>m</sup>a del Resto (consecuencia),  
las raíces son:  $-2$  y  $-3$



*Paolo Ruffini*

# OPERACIONES CON POLINOMIOS I

1 Expresa mediante un polinomio el área de cada una de las figuras que se dan a continuación:



**Ejercicio nº 4 :** Completa las siguientes multiplicaciones de polinomios con coeficientes enteros:

**Aviso importante:** Los coeficientes de los recuadros pueden ser positivos o negativos.

$$\begin{array}{r}
 \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square \\
 \hline
 x^2 - 2x - 1 \\
 \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square \\
 \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x \\
 \square x^5 + \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 \\
 \square x^5 + \square x^4 + 5x^3 + 13x^2 - x - 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \square x^2 + \square x + \square \\
 \square x + \square \\
 \hline
 -\square x^2 - 21x + \square \\
 \square x^3 + 7x^2 + \square x \\
 \hline
 -x^3 + 4x^2 - 16x - 15
 \end{array}$$

2 Sean los polinomios  $A(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$ ,  $B(x) = x^2 - 5x + 1$  y  $C(x) = 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

- Calcula:
- a)  $A(x) \cdot [B(x) + C(x)]$
  - b)  $A(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot C(x)$
  - c)  $A(x) \cdot [B(x) - C(x)]$
  - d)  $A(x) \cdot B(x) - A(x) \cdot C(x)$

3 Siendo  $B(x)$  y  $C(x)$  los del ejercicio anterior, y sin hacer la multiplicación completa, contesta:

- a) ¿Cuál es el término de grado 3 ?
- b) ¿Y el de grado 4 ?

4 Dados los polinomios  $p(x)$ ,  $q(x)$  y  $r(x)$  escritos más abajo, calcula:

- a)  $p(x) + q(x)$ ;
- b)  $p(x) - q(x)$ ;
- c)  $p(x) + q(x) - r(x)$ ;
- d)  $p(x) - q(x) - r(x)$ .

$$p(x) = 4x^3 - 9x + 8; \quad q(x) = 5x^3 + 3; \quad r(x) = 2x^3 - x^2 + 1.$$

5 Dados los polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$  escritos más abajo, calcula:

a)  $p(x) + q(x)$ ;

b)  $q(x) - p(x)$ ;

c)  $p(x) \cdot q(x)$ .

$$p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 1; \quad q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

6 Dados los polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$  escritos más abajo, calcula:

a)  $p(x) + q(x)$ ;

b)  $p(x) - q(x)$ ;

c)  $p(x) \cdot q(x)$ .

$$p(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1; \quad q(x) = x^4 - x^2 - 2.$$

7 Calcula:

a)  $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right)$ ;

b)  $(\sqrt{7} - 3z)(\sqrt{7} + 3z)$ ;

c)  $(-5h + 3m)(-5h - 3m)$ .

8 Calcula:

a)  $\left(\frac{3}{5}a + \frac{5}{3}b\right)^3$ ;

b)  $\left(-\frac{1}{4}h + \frac{1}{2}m\right)^2$ ;

c)  $(\sqrt{17}m - \sqrt{5}h)(\sqrt{17}m + \sqrt{5}h)$ .

9 Calcula:

a)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m - 5h\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m + 5h\right)$ ;

b)  $\left(\frac{3}{7}x - \frac{4}{5}y\right)^2$ ;

c)  $(5h + 2z)^3$ .

10 Calcula:

a)  $\left(3a - \frac{2}{3}b\right)^3$ ;

b)  $\left(\frac{3}{7}x + \frac{11}{3}y\right)^2$ ;

c)  $\left(\frac{12}{7}z - 7h\right)\left(-\frac{12}{7}z - 7h\right)$ .

11 Calcula el cuadrado del siguiente trinomio  $(x - y + z)^2$  utilizando las identidades notables y con la definición de potencia y comprueba que se obtiene el mismo resultado:

12 Calcula

a)  $\left(\frac{2}{9}a - \frac{3}{4}b\right)^2$ ;

b)  $(\sqrt{29z} - 4)(\sqrt{29z} + 4)$ ;

c)  $\left(\frac{1}{3}h - 3\right)^3$ .

13 Calcula y simplifica:  $(2x^2 - y + z - t)^2 + (3x - y)^3$

14 Calcula:

a)  $(6z + 7h)^2$ ;

b)  $(\sqrt{15z} - 8h)(\sqrt{15z} + 8h)$ ;

c)  $\left(\frac{7}{3}x + 3y\right)^3$ .

## DIVISIÓN POR RUFFINI

1 Aplica la regla de *Ruffini* para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a)  $x^3 - x^2 + 11x - 10 : x - 2$

b)  $6x^3 - 2x + x^4 + 15 - 6x^2 : x + 3$

c)  $x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x : x + 1/2$

d)  $x^3 - x^2 + 3x - 10 : x - 2/3$

2 Se sabe que al dividir  $x^3 - x^2 + a x - 10$  entre  $x - 2$ , la división es exacta, ¿cuánto vale el coeficiente a?

3 Calcula el valor del coeficiente k para que el resto de la división  $3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + k$  entre  $x + 2$  sea 8.

4 Utilizando la regla de *Ruffini*, halla el resto de la división del polinomio  $P(x) = 7x^3 - 12x^2 + 3x - 6$  entre el binomio  $x - 2$ .

Comprueba que el resto de la división anterior coincide con  $P(2)$ .

5 Halla el valor numérico del polinomio  $x^2 - 2x + 10$  para  $x = 3$  y comprueba que coincide con el resto de la división de  $x^2 - 2x + 10$  entre el binomio .....

6 Encuentra un polinomio que cumpla todas las condiciones siguientes:

- a) Es de grado *cinco* y el coeficiente del término de grado cinco es 1.
- b) No tiene término de grado cuatro ni término de grado cero (término independiente).
- c) Es divisible entre  $(x - 1)$  y al dividirlo entre  $(x - 2)$  da 20 de resto.
- d) El coeficiente del término de grado uno vale 2.

7 Si la división  $P(x) : x-5$  es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor  $P(5)$ ?

8 Si  $x=-2$  es una raíz de  $Q(x)$ , ¿qué puedes afirmar de la división  $Q(x) : x+2$  ?

9 Busca los factores que faltan en las siguientes descomposiciones:

a)  $2x^2-x-3 = (2x-3) \cdot (\dots\dots\dots)$     b)  $x^2+5x-6 = (x-1) \cdot (\dots\dots\dots)$

10 Inventa un polinomio de grado 2 que tenga por raíces a  $x=3$  y  $x=-4$ .

11 ¿Cuántas raíces, como máximo, podrá tener un polinomio de grado 5? ¿Por qué?

12 ¿Cuáles son las posibles raíces enteras de  $x^4+3x^3-9x^2+3x-10$  ? Comprueba una por una y di las que son raíces y las que no.

13 Factoriza los polinomios siguientes:

a)  $2x^3-x^2-16x+15$

b)  $x^4-x^2$

c)  $x^4+4x^3-x-4$

d)  $x^5-10x^3+9x$

14 Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:

a)  $x^3 + 4x^2 - 20x - 48$ ;

b)  $7x^3 - 15x^2 + 58x - 8$ ;

c)  $x^3 - 6x^2 - 61x + 210$ .

15 Factoriza los siguientes polinomios e indica sus raíces:

a)  $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$

b)  $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$

c)  $x^6 + 6x^5 + 14x^4 + 18x^3 + 17x^2 + 12x + 4$

16 Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:

a)  $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 48x$ ;

b)  $8x^3 + 17x^2 + 18x + 2$ ;

c)  $x^3 + 5x^2 - 138x - 792$ .

# DIVISIÓN DE POLINOMIOS



1 Realiza las siguientes divisiones:

a)  $3x^4+5x^3-2x+3 : x^2-3x+2$

b)  $x^5-6x^3-25x : x^2+3x$

**2 Completa la siguiente división de polinomios con coeficientes enteros:  
(Aviso importante: Los coeficientes pueden ser positivos o negativos.)**

$$\begin{array}{r}
 \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 - 3x + \square \quad x^3 - 2x^2 + \square x + \square \\
 \square x^4 + \square x^3 - 2x^2 + 6x \quad 2x + \square \\
 \hline
 3x^3 - \quad x^2 + \square x + \square \\
 \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square \\
 \hline
 \quad \square x^2 + \square x + 2
 \end{array}$$

**3 Averigua lo que han de valer los coeficientes a y b para que la siguiente división  $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b : x^2 - 5x + 1$  sea exacta.**

**4 Lo mismo que en el ejercicio anterior, pero para que el resto de la división sea  $3x - 7$ .**

**5 Calcula el dividendo de una división, sabiendo que el divisor es  $x^2 + 5$ , el cociente es  $2x^2 - 1$  y el resto  $-3$ .**

**6 Realiza las siguientes divisiones:**

a)  $(x^3 - 3x^2 + 6x - 2) : (x^2 + x - 1)$   
b)  $(x^4 - x^3 + 8x + 4) : (x^2 - x + 2)$

**7 Realiza las siguientes divisiones:**

a)  $(x^3 - 5x^2 + x - 1) : (2x - 1)$   
b)  $(x^6 + x^2 - 3) : (x^2 + 1)$

**8 Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:**

a)  $x^3 - 5x^2 + 11x - 28$ ;  
b)  $3x^4 + 16x^3 - 37x^2 - 14x$ ;  
c)  $3x^3 - 22x^2 - 47x + 18$ .

**9 Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:**

a)  $x^3 - 4x^2 - 103x - 182$ ;  
b)  $x^3 - 7x^2 - 16x + 112$ ;  
c)  $x^3 - 4x^2 + 9x - 10$ .

**10 Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces:**

- a)  $2x^3 + 5x^2 - 28x - 15$ ;
- b)  $x^3 + 5x^2 - 29x - 105$ ;
- c)  $x^3 - 7x^2 - 7x + 8$ .

11 Obtén un polinomio cuyas raíces sean:

- a) 1 (raíz doble), -1 (raíz triple)
- b) -3 (raíz simple), 0 (raíz triple), 1 (raíz doble)

12 Obtén un polinomio cuyas raíces sean:

- a) 0 (raíz doble), -1 (raíz triple)
- b) 0 (raíz simple), 1 (raíz triple), 2 (raíz doble)

# ECUACIONES

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$



## Fórmula

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Multiplicamos por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Sumamos y restamos  $b^2$ :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Pasamos los dos últimos términos al otro miembro:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer miembro es una identidad notable:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

# ECUACIONES DE PRIMER GRADO



1. Calcula:

a)  $(5x - 3)2 + 7x = -(-4x + 6) - 10$       b)  $\frac{5 - 2x}{x} = 8$       c)  $\frac{3 + 3(x - 1)}{x} = \frac{4}{3}$

d)  $\frac{x + 2}{5} - \frac{x + 1}{10} = 5x$       e)  $\frac{3(x - 1)}{2} - \frac{5(x - 2)}{4} = 6x + 2$       f)  $-\frac{3x}{2} = -\frac{2 - 3x}{6} + \frac{1}{4}$

Resuelve los siguientes problemas:

- 1) Nacho tarda media hora en comerse una pizza hawaiana y su hermano tarda 20 minutos. ¿Cuánto tiempo tardarán en comerse una pizza hawaiana los dos juntos?
- 2) Un padre tiene 50 años y su hija 22. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era el triple de la edad de la hija?
- 3) La edad de un padre es cuatro veces la edad de su hijo, pero hace seis años la edad del padre era siete veces mayor. ¿Cuál es la edad actual de ambos?
- 4) A unos chavales se les hizo una encuesta preguntándoles cuál era el deporte que más practicaban. El 80% de ellos respondió: el fútbol, el 15%, el baloncesto, y el resto, 160 chavales, el tenis. ¿Cuántos chavales fueron encuestados? ¿Cuántos respondieron fútbol? ¿Y cuántos, baloncesto?
- 5) Javier ha comprado 5 CD musicales del mismo precio, pero dos de ellos estaban en oferta y le han rebajado el 10%. Si al final ha pagado 71,95€, ¿cuánto cuesta cada CD?

# ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

2. Calcula:

a)  $x^2 - 2 = 7$       b)  $4x^2 + 4 = 8$       c)  $-3x^2 + 192 = 0$       d)  $-6x^2 + 8 = 2$

e)  $x^2 - 2x = 0$       f)  $x^2 + 4x = 0$       g)  $-x^2 + 2x = 0$       h)  $7x^2 - 7x = 3x$

i)  $2x^2 = 5x - 4x^2$       j)  $4x^2 - 13x + 3 = 0$       k)  $-12x^2 + 39x - 9 = 0$       l)  $60 - 16x = -x^2$

Resuelve los siguientes problemas:

- 1) Halla un número tal que el triple de su cuadrado menos el propio número sea 44.
- 2) La suma de un número con su inverso es  $26/5$ . Halla ese número.
- 3) Los catetos de un triángulo rectángulo suman 17 cm y la hipotenusa de este triángulo mide 13 cm. Calcula las medidas de los catetos.

# SISTEMAS LINEALES DE 2 ECUAC. CON 2 INCÓGNITAS

3. Calcula:

a)  $\begin{cases} 8x + y = 10 \\ x - y = -1 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 4x + 2y = -5 \\ -3y - 8x = 7 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y-1}{2} = 2 \\ 2x - \frac{y-3}{2} = 13 \end{cases}$

Resuelve los siguientes problemas:

- 1) En una sala el número de chicas es igual al doble del de chicos menos 4. Con dos chicas menos habría el mismo número de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas había en la sala?

2) Un librero vende 84 libros a dos precios distintos; unos a 4,50 €, y otros, a 3,60 €, obteniendo por la venta 310,50 €. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

3) En una fiesta juvenil hay chicas y chicos. 15 chicas abandonan la fiesta, quedando 2 chicos por cada chica. Entonces 45 chicos se van y quedan 5 chicas por cada chico. ¿Cuántas chicas había inicialmente en el grupo?

## PROBLEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

### NÚMEROS



1. La suma de tres números pares consecutivos es 72. ¿Cuáles son esos números?

2. Encuentra un número sabiendo que su cuarta parte menos su quinta parte es igual al triple de 5 menos el doble del número.

### MEZCLAS

3. ¿Cuántos litros de aceite de 1,20€/l hay que mezclar con aceite de 1,80€/l para obtener 600 litro al precio de 1,40€/l?



4. Se mezclan 3 kg de café de clase A de 0,75€/kg con café de clase B a 0,50€/kg obteniéndose café de 0,62€/kg. ¿Cuántos kilos tiene la mezcla?



### GRIFOS Y SIMILARES

5. Un grifo tarda 3 horas en llenar una piscina y otro grifo tarda 5 horas. La piscina tiene un desagüe que lo vacía en 7 horas, estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tardan los dos grifos juntos en llenar la piscina, estando el desagüe abierto?

6. Maika y su amiga Noelia tardan 25 minutos en comerse juntas una tarta de chocolate. ¿Cuánto tiempo tardará cada una por separado si Maika es el doble de rápida que su amiga Noelia?



### EDADES

7. Alba tiene 3 años más que Celia y ésta 5 años más que Sergio. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre las tres suman 55.

8. Tania tiene 2 años menos que Vanesa. Vanesa tiene 3 años menos que Luis. Luis tiene la mitad de años que Ángel. Y Ángel tiene 15 años más que Tania. ¿Qué edad tiene cada uno?

### GRUPOS DE PERSONAS



9. En una reunión Eva ha observado que hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Sabiendo que en total hay 156 personas, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay en la fiesta?

10. En una fiesta, la mitad de la mitad de la mitad de los invitados son hombres, la mitad de la mitad son mujeres y el resto, 45, son niños. ¿Cuántos invitados hay? ¿Cuántos hombres? ¿Cuántas mujeres?



### COMPRAS

11. César ha comprado el juego Trivial Pursuit. Le han hecho un 15% de descuento y ha pagado 36,51€. ¿Cuánto dinero costaba?

12. Un escáner cuesta 87€. Si el IVA es del 16%, ¿cuál es el precio sin IVA?

### CAPITALES



13. Reparte 200 € entre tres amigos, de manera que el primero reciba 10 € más que el segundo, y éste reciba 20 € más que el tercero.

14. Hemos depositado una cantidad de dinero al 4% durante dos años. Nos devuelven 583,20 €. ¿Qué cantidad habíamos depositado?

### RESTOS



15. En un Instituto, la quinta parte de los alumnos están cursando 1º ESO, 2/7 están en 2º ESO, 3/10 en 3º ESO y el resto, 120 alumnos, en 4º ESO. ¿Cuántos alumnos hay en 2º ESO? ¿Y cuántos en el Segundo Ciclo de la ESO?

16. En un pueblo, el 35% de los habitantes son hombres. De ellos, 1/5 son menores de 16 años. Y de ellos, el 15% son fumadores. Si hay en el pueblo 2380 chicos menores de 16 años que no fuman, ¿cuántas mujeres hay en el pueblo?

### ESPACIO = VELOCIDAD \* TIEMPO

17. Un AVE sale de Madrid hacia Sevilla (a 300 km/h) a las 6:30. Media hora más tarde sale otro AVE desde Sevilla. ¿A qué hora se cruzarán, si distan 475 kms? ¿A qué distancia desde Madrid?



18. Un avión bombardero va a una velocidad de 240 km/h. ¼ h después, un avión caza le persigue a 360 km/h. ¿Cuándo le cogerá?

### GEOMETRÍA

19. El perímetro de un triángulo isósceles es 180 cm. Cada uno de los lados iguales es 30 cm mayor que la base. ¿Cuánto mide cada lado?

20. Un triángulo tiene 72 m de perímetro y es semejante a otros cuyos lados son 3 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?



# ECUACIONES BICUADRADAS



1. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$       b)  $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$       c)  $2x^4 - 2 = 0$       d)  $2x^4 + 10x^2 + 12 = 0$   
 e)  $3x^4 - 27x^2 + 60 = 0$       f)  $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$       g)  $2x^4 - 32 = 0$       h)  $3x^4 - 24x^2 + 36 = 0$   
 i)  $\frac{x^4}{2} - 6x^2 + 27 = 0$       j)  $3x^4 + 18 = 15x^2$       k)  $5x^4 + 20x^2 + 15 = 0$       l)  $-5x^2 + 3x^2 = 0$   
 m)  $x^4 + 900 - 61x^2 = 0$       n)  $\frac{x^4}{2} + x^2 - 4 = 0$       ñ)  $35x^2 + 50 + 5x^4 = 0$       o)  $\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 1,5 = 0$

# ECUACIONES INCOMPLETAS

2. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas.

a)  $x^2 - 4 = 0$       b)  $x^3 = -8$       c)  $2x^2 = 16$       d)  $(2x)^2 = 16$   
 e)  $5x^2 - 3 = 0$       f)  $6x^3 - 4 = 0$       g)  $8x^5 = 24$       h)  $\frac{x^3}{2} = 6$   
 i)  $30x^2 = \frac{5}{2}$       j)  $4x^{30} = \frac{5}{2}$       k)  $\frac{x^7}{4} = -\frac{3}{2}$       l)  $-2x^3 - \frac{4}{5} = 0$   
 m)  $\frac{1}{x^2} = 9$       n)  $\frac{4}{x^3} = -4$       ñ)  $\frac{5}{x^4}x^2 = \frac{5}{4}$       o)  $\frac{-2}{x^5}x + \frac{3}{2} = 1$   
 p)  $\frac{6}{2x^3} = -3$       q)  $\frac{6}{(2x)^3} = -3$       r)  $\frac{5}{3x^4} = 2$       s)  $\frac{5}{(3x)^5} = 2$   
 t)  $(x^2)^5 = 1$       u)  $(x^3)^2 - 5 = 0$       v)  $(x^{-1})^2 = 3$       w)  $(2x^{-2})^4 + \frac{1}{2} = 1$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas, sacando factor común.

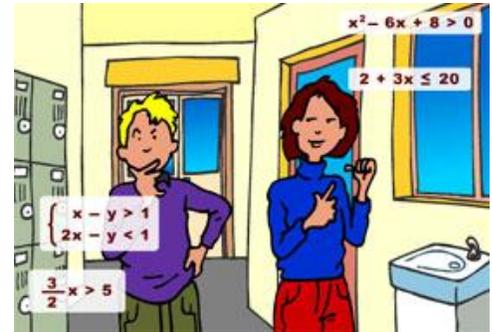
a)  $3x^2 - 5x = 0$       b)  $x^3 - 2x^2 = 0$       c)  $2x^4 + 2x = 0$       d)  $5x^6 = 3x^2$   
 e)  $x^4 - 1 = 0$       f)  $x^4 - x = 0$       g)  $x^4 - x^2 = 0$       h)  $x^4 - x^3 = 0$   
 i)  $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$       j)  $x^5 + 4x^3 + 4x = 0$       k)  $2x^3 - 10x^2 + 12x = 0$       l)  $2x^5 - 10x^3 + 12x = 0$

# ECUACIONES IRRACIONALES

4. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a)  $\sqrt{x-5} = 2$       b)  $-\sqrt{3x-2} = -1$       c)  $\sqrt{8x+9} = 5$   
 d)  $\sqrt{5-2x} = x-1$       e)  $\sqrt{4-4x} - 2 = 3x$       f)  $x+1 - \sqrt{6-2x} = 0$   
 g)  $3\sqrt{3x+16} - 12 = x$       h)  $\sqrt{2x+5} - 2x = 3$       i)  $3\sqrt{5x+6} - 6 - 5x = 0$   
 j)  $\sqrt{2x+3x-1} - 5x = -2x-3$       k)  $2\sqrt{5x-1} - 2x+3 = 1+4x$       l)  $2\sqrt{2x+3} + x+2 = -4+5x$

# INECUACIONES



1 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $x + 2x + 3x < 5x + 1$
- b)  $5x + 10 > 12x - 4$
- c)  $4x + 2 - 2x < 8x$

2 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $2x + 4 > x + 6$
- b)  $-x + 1 > 2x + 4$
- c)  $5x + 10 < 12x - 4$

3 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $x + 2x + 3x > 5x + 1$
- b)  $5x + 10 < 12x - 4$
- c)  $4x + 2 - 2x > 8x$

4 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $2x + 4 > x + 6$
- b)  $-x + 1 < 2x + 4$
- c)  $x + 51 > 15x + 9$

5 Encuentra los números cuyo triple menos 20 unidades es menor que su doble más 40.

6 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $4x^2 - 2x < 2$
- b)  $5x^2 - 6x + 1 \geq 0$

7 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $3x^2 < -4x + 4$
- b)  $(4x - 8)(x + 3) < 0$

8 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $(x + 1)(2x + 1) \geq 0$
- b)  $-x^2 - x + 3 < 0$

9 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $\frac{x^2 + x}{3} - 1 > -\frac{1 - 2x^2}{6}$
- b)  $\frac{2x^2}{3} - x < \frac{8x}{3}(1 + x) + 1$

10 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a)  $x + 2x + 3x < 5(1 - x) + 6$
- b)  $(x - 1) + 2(2x + 3) < 4$
- c)  $6(x - 2) - 7(x - 4) > 6 - 3x$

11 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $x + 2x + 3x > 5(1 - x) + 6$

b)  $-1(x - 1) + 2(2x + 3) > 4$

c)  $6(x - 2) - 7(x - 4) < 6 - 3x$

12 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $\frac{x - 4}{3} < \frac{x^2}{x + 42}$

b)  $\frac{x + 2}{3} < \frac{x^2}{3x + 4}$

13 La tarifa de telefonía de la empresa A es 20 Euros fijos mensuales más 7 céntimos de euro por minuto de conversación, la de la empresa B es 11 Euros fijos más 12 céntimos por minuto de conversación. ¿A partir de cuantos minutos empieza a ser más rentable la tarifa de la empresa A?

14 En una pista de patinaje hay dos kioscos de alquiler de patines. En el de la izquierda se cobran 2 Euros de tarifa fija y 40 céntimos de euro por hora, en el kiosco de la derecha 1 Euro de fijo y otro por cada hora de alquiler. ¿Si vamos a patinar 4h en qué kiosco debemos alquilar los patines? Obtén el resultado mediante una inecuación.

15 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $2(x - 3) > 1 - 3(x - 1)$

b)  $2(x + 1) + 4 < -2(x + 3)$

c)  $(x - 20) / 8 < (1 - 2x) / 10$

16 Un padre y su hijo se llevan 25 años. Encuentra el periodo de sus vidas en que la edad del padre excede en más de 5 años al doble de la edad del hijo.

17 Resuelve la siguiente inecuación ordenadamente, explicando todos los pasos que realizas:

$$\frac{x - 1}{4} < \frac{x + 3}{3} - \frac{x - 5}{2}$$

18 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $x^2 + 2x + 3 \leq -1$

b)  $(x + 5)(x - 4) \geq 0$

19 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $x^2 - 9 < 0$

b)  $-(x + 2)(x - 6) \leq 0$

20 A un vendedor de coches le ofrecen en un concesionario 1000 Euros de sueldo fijo más 200 Euros por coche vendido. En otro concesionario le ofrecen 1800 Euros de fijo más 110 Euros por coche vendido. Si vende una media de 132 coches al año, ¿Qué oferta debe coger?

21 Un vendedor de seguros tiene dos opciones de sueldo, debe elegir entre un fijo de 800 Euros más 80 Euros por póliza o cobrar 150 Euros de comisión pura (sin fijo) por póliza. ¿A partir de que cantidad de pólizas es más rentable la opción de comisión pura?

22 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $2(x - 3) < 1 - 3(x - 1)$

b)  $10(20 - x) > 8(2x - 1)$

c)  $2(1 - x) - 4 < 2(x + 3)$

23 Resuelve la siguiente inecuación ordenadamente, explicando todos los pasos que realizas:

$$-4x + \frac{3-2x}{4} > \frac{1-3x}{3} - \frac{37}{12}$$

24 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $x(x+3) > 2-x^2$       b)  $(x+1)(x-1) \geq 0$

25 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $2(x-3) > 1-3(x-1)$   
b)  $10(20-x) < 8(2x-1)$   
c)  $2(1-x)-4 > 2(x+3)$

26 Una empresa de mantenimiento de ascensores cobra 100 Euros al trimestre más 15 Euros por visita. Otra empresa del sector cobra 400 Euros fijos al trimestre y no cobra las visitas. ¿En que condiciones conviene elegir una u otra empresa?

27 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $\left(\frac{x}{2}+3\right)(-x+1) > 0$       b)  $x^2-2x-3 \geq 0$

28 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $4x^2+4x+3 < 0$       b)  $(x-1)(x-6) \leq 0$

29 Encuentra los números cuyo cuádruplo no sobrepasa a su triple más 40.

30 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $2x+4 < x+6$   
b)  $-x+1 > 2x+4$   
c)  $x+51 < 15x+9$

---

## SISTEMAS DE INECUACIONES

1 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)  $\begin{cases} 4x-3 < 1 \\ x+6 > 2 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 5x+1 < 0 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 3x-4 < 4x+1 \\ -2x+3 < 4x-5 \end{cases}$

2 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)  $\begin{cases} 3x+1 > x+9 \\ x+5 < 2-3x \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2x-6 < 0 \\ x-4 > -5 \end{cases}$

3 Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

a)  $\begin{cases} x-y \geq 3 \\ x+y \leq 2 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x-2y \geq 5 \\ x+y < 1 \end{cases}$

4 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 2 < 6 \\ 3x - 1 \geq -7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x \leq 10 \end{cases}$$

5 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$$

6 **Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} -x + y \leq 3 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y > 6 \\ 3x + 5y - 10 < 0 \end{cases}$$

7 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} 6x + 5 \leq 5x - 2 \\ 3x - \frac{1}{2} > -5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 1 < 2 \\ x - 1 > -2 \end{cases}$$

8 **Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y \geq -1 \\ -x + y \geq -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y > 0 \\ -2x + y > 1 \end{cases}$$

9 **Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ -x + 3y \geq -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

10 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 1 > x - \frac{3}{2} \\ 2x - 1 < 1 - 3x \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - \frac{1}{3} < \frac{3}{2}x - 1 \\ 4x - 5 < 2 - 5x \end{cases}$$

11 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} 6 - x \leq 4x - 5 \\ 1 - 2x \geq -3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 6 < 0 \\ x - 4 > -5 \end{cases}$$

12 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 15 \leq x - 5 \\ -x + 12 \geq 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 10 > -x + 2 \\ 10 - 4x > -3x \end{cases}$$

13 **Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:**

$$\begin{cases} 8x - 7 > \frac{15 - 9x}{2} \\ 4x - 5 > 5x - \frac{8}{3} \end{cases}$$

14 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + \frac{2}{5} > 4x + 3 \\ \frac{8x + 3}{3} < 2x + 21 \end{cases}$$

15 Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y > 0 \\ x - y < 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y \leq 4 \\ -x + y \leq 0 \end{cases}$$

16 Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$$

17 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{x}{4} \geq \frac{7}{6} \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{x}{4}\right) > 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2 \geq \frac{x - 1}{2} \\ 3x + \frac{1}{3} < x + 7 \end{cases}$$

18 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 5(x - 1) \leq 3(x + 1) \\ 2(x + 3) \geq 6 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3(x - 2) \geq 2x + 3 \\ x - 1 < 9 \end{cases}$$

19 Representa la región del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$$

# REPASO 2



**1.** Decide si es Verdadero o Falso. En caso de que sea falso, corrígelo:

a)  $\frac{1}{5} \log_3 \sqrt{2} - \frac{\log 5^{-2}}{3} = \log \sqrt[15]{2 \cdot 15^{10}}$

b)  $\log_3 \left( \frac{3^{-5}}{2^3 \sqrt{5}} \right)^2 = -10 - 4 \log_3 2 - \log_3 5$

c) Si  $\log x = -1$ ,  $\log \sqrt{100x^5} = 6$

d)  $3^{x^2-4} = 5 \Rightarrow x \approx 2,34$

e)  $3 \log(2x) = 2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{50}}{2}$

f)  $2 \log_2(5x) - 3 \log_2(2x) = 5 \Rightarrow x = \frac{256}{25}$

**2.** Une mediante flechas:

A = (-3,5]

{x > 5}

A ∪ B

(-3,+∞) - {5}

B = (-∞,5)

{-3 < x < 5}

C ∪ D

∅

C = (-3,5)

{x < 5}

A ∩ C

(-∞,5]

D = (5,+∞)

{-3 < x ≤ 5}

B ∩ C ∩ D

(-3,5)

**3.** Decide si es Verdadero o Falso. En caso de que sea falso, corrígelo:

a)  $|3x - 2| < 7 \Rightarrow x \in \left[ -\frac{5}{3}, 3 \right]$

b)  $|6x - 2| \geq 4 \Rightarrow x \in \left( -\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup [1, +\infty)$

e)  $\sqrt{1 - 5x}$  existe si  $x \in \left( -\infty, \frac{1}{5} \right]$

c)  $|5x - 3| > 2 \Rightarrow x \in \left( \frac{1}{5}, 1 \right)$

f)  $\sqrt[4]{2 - 3x}$  existe si  $x \in (-\infty; 1.5]$

d)  $|2x - 6| \leq 4 \Rightarrow x \in (1, 5)$

**4.** Decide si es Verdadero o Falso. En caso de que sea falso, corrígelo:

a)  $\sqrt{5 \cdot 2^{13} - 2 \cdot (2^6)^2} = 128\sqrt{2}$

b)  $(2x - \sqrt{2})^2 = 4x^2 - 4\sqrt{2}x + \sqrt{2}$

c)  $\frac{3x}{2} - \frac{2x-5}{6} = -5 \Rightarrow x = -5$

d)  $x^4 - 24x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

e)  $3\sqrt{3x+7} - 5 = 6x \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{19}{12}$

f)  $2x^{-5} = \frac{2}{3x} \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{3}$

**5. a.** Queremos preparar 10 kg de té y venderlo a 0,15 €/kg. Para ello utilizamos un té de 0,22 €/kg y otro de 0,12 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase necesitamos?

**b.** Dos obreros hacen un trabajo en 3 horas. Uno de ellos lo haría solo en 4 horas. Halla el tiempo que tardaría el otro solo.

**c.** El señor Pérez presta  $\frac{2}{5}$  partes de un capital al 5% y el resto al 6%. Si recibe al año 56 € de intereses, ¿qué capital había prestado?

**d.** A las 11:25 sale desde Madrid hacia Granada (434 km) un turismo a 90 km/h y desde Granada sale otro a 80 km/h. ¿A qué distancia de Madrid se cruzarán? ¿A qué hora?

**e.** Los lados de un triángulo rectángulo son tres números consecutivos. Hállalos.

**f.** 2 helados de fresa y 3 de pistacho cuestan 7,75 €. 3 helados de fresa y 2 de pistacho, 7,25 €. ¿Cuánto cuesta cada helado?

# FRACCIONES ALGEBRAICAS

$$2x^4 - 12x^3 + 18x^2 + 8x - 24 = 2(x-2)^2(x-3)(x+1)$$

	<b>2</b>	<b>-12</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>-24</b>
<b>2</b>		<b>4</b>	<b>-16</b>	<b>4</b>	<b>24</b>
	<b>2</b>	<b>-8</b>	<b>2</b>	<b>12</b>	<b>0</b>
<b>2</b>		<b>4</b>	<b>-8</b>	<b>-12</b>	
	<b>2</b>	<b>-4</b>	<b>-6</b>	<b>0</b>	
<b>3</b>		<b>6</b>	<b>6</b>		
	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>0</b>		
<b>-1</b>		<b>-2</b>			
	<b>2</b>	<b>0</b>			



**Ruffini**

# FRACCIONES ALGEBRAICAS 1



Ruffini

1. Factoriza los siguientes polinomios:

1)  $3x - 9 =$

2)  $2x + 7 =$

3)  $3 - 5x =$

4)  $2x + \frac{1}{3} =$

5)  $x^2 - 4 =$

6)  $x^2 - 4x =$

7)  $x^2 + 8x =$

8)  $x^2 - 5x =$

9)  $2x^2 + 6x =$

10)  $3x^2 - 9 =$

11)  $4x^2 - 1 =$

12)  $2x^2 + 8x - 42 =$

13)  $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} =$

14)  $x^2 - 4x + 2 =$

15)  $x^2 - 16 =$

16)  $2x^4 - 2x^3 =$

17)  $x^3 - x^2 - 5x + 5 =$

18)  $x^3 - 19x - 30 =$

19)  $3x - 24 =$

20)  $x^3 - 4x^2 + 8 =$

21)  $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27 =$

22)  $-15x^3 + 3x^2 =$

23)  $x^4 - 29x^2 + 100 =$

24)  $-3x + 2 =$

25)  $x^4 - 10x^3 + 25x^2 =$

26)  $-3x^3 + 3x^2 + 24x - 36 =$

27)  $x^4 - 81 =$

28)  $-9x^2 + 5 =$

29)  $-9x^2 + 5x =$

30)  $5x^4 - 29x^3 + 54x^2 - 28x - 8 =$

2. Factoriza mentalmente las siguientes identidades notables:

a)  $x^2 - 1 =$

c)  $x^2 - 4x + 4 =$

e)  $x^2 + 2x + 1 =$

g)  $4x^2 - 24x + 36 =$

i)  $36 - x^2 =$

b)  $x^2 - 6x + 9 =$

d)  $4x^2 - 16 =$

f)  $a^2 - 8a + 16 =$

h)  $3x^2 + 6x + 3 =$

j)  $-x^2 - 10x - 25 =$

# FRACCIONES ALGEBRAICAS 2



**Ruffini**

3. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$1) \frac{x^2 - 2x}{2x - 4} =$$

$$2) \frac{9 - x^2}{x^2 - 3x} =$$

$$3) \frac{2x^2 - 32}{2x^2 + 6x - 8} =$$

$$4) \frac{5x^2 - 10x}{x^3 - x^2 - 8x + 12} =$$

$$5) \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6} =$$

$$6) \frac{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}{x^3 - 4x} =$$

$$7) \frac{6x^3 - 36x^2 + 72x - 48}{2x^2 - 8} =$$

$$8) \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{x^4 - 7x^3 + 10x^2} =$$

$$9) \frac{3x^3 - 33x^2 + 117x - 135}{-3x^2 - 6x + 45} =$$

$$10) \frac{2x^3 - 6x + 4}{4x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 16x + 16} =$$

# FRACCIONES ALGEBRAICAS 3



**Ruffini**

4. Opera y simplifica:

$$1) \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 4x - 30} + \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 9} =$$

$$2) \frac{5}{x^2 + 2x + 1} - \frac{4x^2 - 3}{2x^2 + 2x} =$$

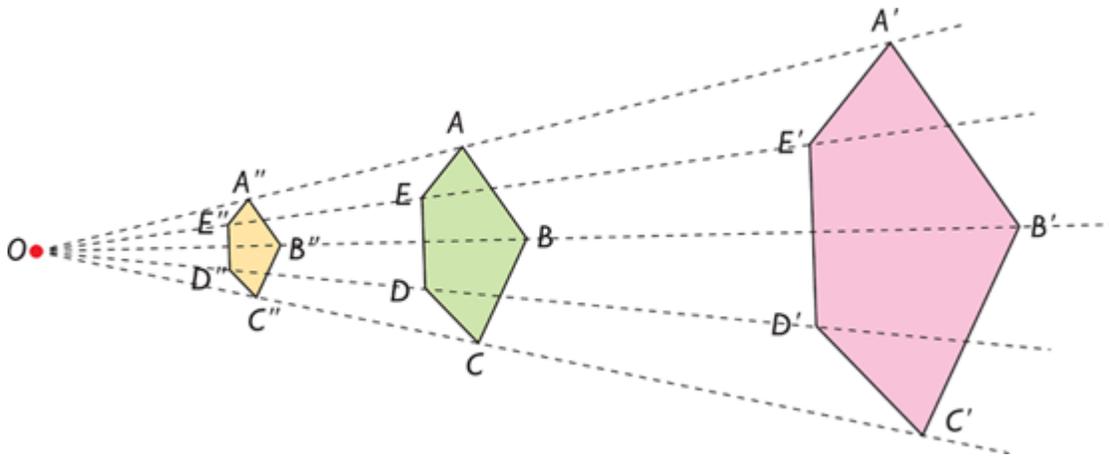
$$3) \frac{x^2 + x}{(x - 1)^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3} =$$

$$4) \left( \frac{5}{x^2 - x} - \frac{5}{4x - 4} \right) \cdot \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 8x + 16} =$$

$$5) \frac{-x^2 + 10x - 25}{3x + 15} : \frac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 3x - 10} =$$

$$6) \left( \frac{3x}{x + 3} + \frac{3x^2}{x^2 - x - 12} \right) : \left( 1 - \frac{x + 2}{x + 3} \right) =$$

# SEMEJANZA

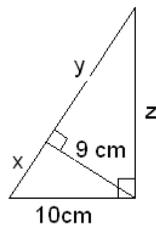


- 1 Con un cable de 50 metros se quiere conseguir un polígono semejante a otro de 90 metros de perímetro. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 5 metros?
- 2 Las áreas de dos polígonos semejantes están en la razón 1:64. ¿Cuál es la razón de semejanza?
- 3 Se quiere dibujar un polígono de perímetro 60 cm, semejante a otro de perímetro 180 cm. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo de un lado del segundo polígono que mide 15 metros?
- 4 Los lados de un cuadrilátero son:  $a=1$  cm,  $b=6$  cm,  $c=7$  cm y  $d=4$  cm. Se sabe que el área de otro semejante es 16 veces mayor que el área del primero. Determina la medida de los lados del cuadrilátero semejante.
- 5 Dado un prisma rectangular de 5 cm de altura y lados de la base 3 y 4 cm, construimos otro semejante a él de razón de semejanza 0,5. Calcula el volumen del segundo por dos métodos: utilizando la fórmula del volumen del prisma y utilizando la razón de semejanza entre volúmenes.
- 6 Dos ciudades situadas a 63 km están representadas en un mapa a una distancia de 4 cm. ¿A qué distancia se encontrarán dos ciudades que distan 233 km?
- 7 Dado un trapecio isósceles de 4 cm de altura y bases 8 y 6 cm, construimos otro semejante a él de razón de semejanza 1,5. Calcula la superficie del segundo por dos métodos: utilizando la fórmula del área del trapecio y utilizando la razón de semejanza entre áreas.
- 8 En el plano de una vivienda, a escala 1:350, las medidas del jardín son 36 mm y 29 mm. ¿Cuál es la superficie real de la terraza?

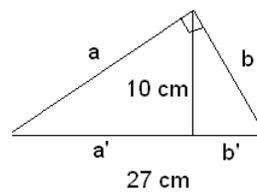
- 10 La sombra de una torre eléctrica mide 10 m y en el mismo instante, la sombra de un joven mide 1,5 m. Si el joven tiene una altura de 1,8 m, ¿cuál es la altura de la torre?
- 11 Se consideran dos triángulos semejantes. Del primero conocemos un ángulo,  $35^\circ$ , y del segundo sabemos que uno de sus ángulo es  $55^\circ$ . Con estos datos, ¿qué podemos averiguar de los triángulos?
- 12 La base de un triángulo mide el doble que la de otro triángulo, y su altura también. ¿Podemos afirmar siempre que son triángulos semejantes?
- 13 Si dos triángulos rectángulos son semejantes y las hipotenusas miden, respectivamente, 26 y 39 cm, y el menor de los catetos del primer triángulo mide 10 cm, ¿cuánto miden los otros lados en ambos triángulos?

14 Encuentra los lados desconocidos:

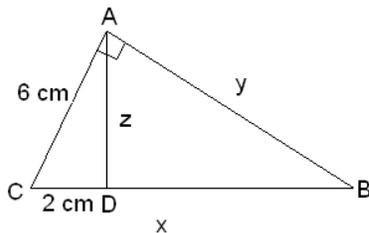
a)



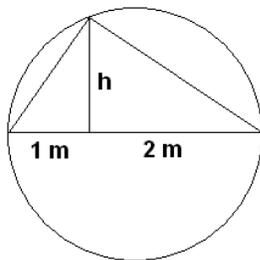
b)



15 Un cateto de un triángulo rectángulo mide 6 cm y su proyección sobre la hipotenusa mide 2 cm. Determinar los otros dos lados y la altura sobre la hipotenusa.

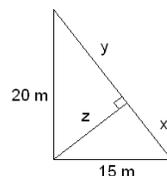


16 Calcula h en la siguiente figura:

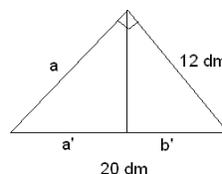


17 Encuentra los lados desconocidos:

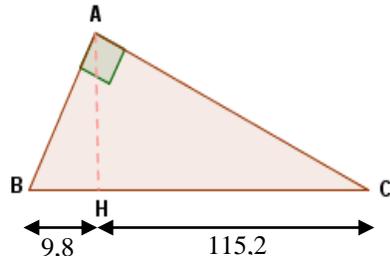
a)



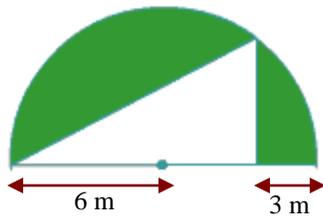
b)



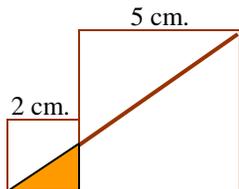
18 Halla la medida de los tres lados del siguiente triángulo rectángulo y el valor de la altura sobre la hipotenusa.



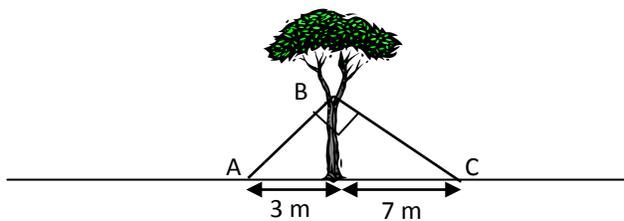
19 Para atender a los afectados por un desastre natural, la Cruz Roja ha instalado varias carpas. La entrada de una de ellas es una semicircunferencia de 6 metros de radio. Observa la figura y halla la altura del poste que han situado a 3 metros de uno de los extremos y que es perpendicular al diámetro.



20 En la figura se muestran dos cuadrados de 2 y 5 centímetros de lado, respectivamente. Calcula el área de la región sombreada.



21 Un árbol está sujeto con dos cuerdas a dos estacas alineadas con él de modo que, como muestra la figura, el triángulo ABC que se forma es rectángulo. Calcula la medida de las dos cuerdas.



# TRIGONOMETRÍA

(MEDIDA DE TRIÁNGULOS)



## APLICACIONES:

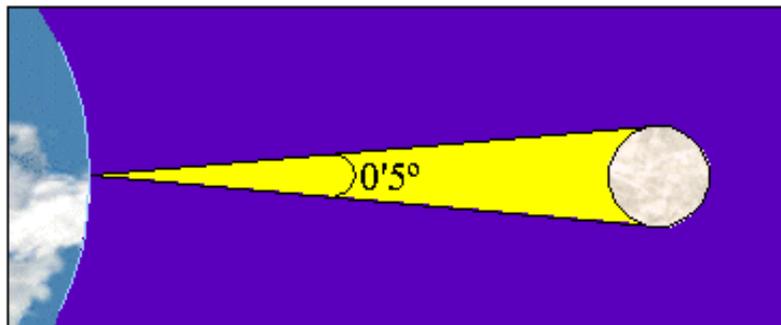
**ASTRONOMÍA:** Cálculo del radio de la Tierra, distancia de la Tierra a la Luna, distancia de la Tierra al Sol, predicción de eclipses, confección de calendarios...

**CARTOGRAFÍA:** Elaboración del mapa de un lugar del que se conocen algunas distancias y algunos ángulos.

**CONSTRUCCIONES:** Cómo construir un edificio para que cumpla ciertas exigencias de orientación. En qué dirección se excava un túnel para que salga, al otro lado de la montaña, en el lugar deseado.

**NAVEGACIÓN:** Construcción de cartas marinas en las que se detalle la ubicación de arrecifes...

### Distancia de la Tierra a la Luna



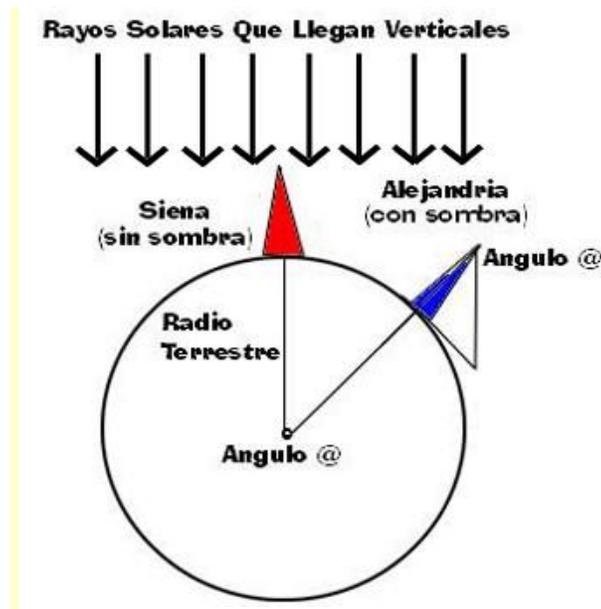
(El radio de la Luna es 1738 Km)

# EL HOMBRE QUE MIDIÓ LA TIERRA CON SU CABEZA

Antes de que Magallanes y Elcano realizaran en el siglo XVI el primer viaje alrededor del mundo, muchos pensaban todavía que la Tierra podía ser plana. Resulta asombroso pensar que, casi 2000 años antes, los pensadores griegos no solo habían aportado pruebas convincentes de su esfericidad, sino que uno de ellos, Eratóstenes, consiguió calcular su tamaño.



Habiendo comprobado que en Alejandría el día del solsticio de verano el sol no distaba del cénit más que la quincuagésima parte de circunferencia del gran círculo de la esfera, adoptando la cantidad de 252.000 estadios como la longitud total del meridiano. El estadio egipcio tenía 300 codos, por lo que la longitud es de unos 40.000.000 m.



Para medir la distancia de Alejandría a Siena envió un servidor, que fue contando los pasos. Esa distancia es de unos 800 Km.

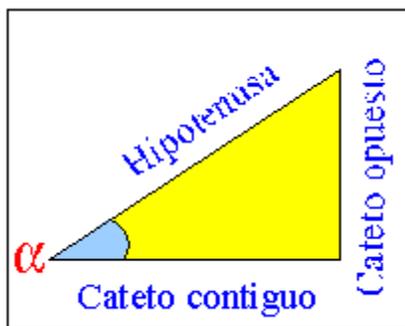
El ángulo @ lo calculó en base a la altura de la torre en Siena y el largo de la sombra proyectada, justo cuando en Alejandría el sol caía verticalmente, es decir, al medio día.

Dicho ángulo es de 7 grados, que es el mismo que forman los dos radios terrestres en el centro de la Tierra.

Con estos datos razonó así: Si para un ángulo de 7 grados la distancia es de 800 Km. ¿cuánto será para los 360 grados correspondiente a toda la circunferencia de la Tierra?. Como 7 grados entra unas 50 veces en los 360 grados, multiplicó 50 por 800 igual a: 40.000 km. de perímetro. Dividiendo esta distancia por  $\pi$ , obtuvo el diámetro que es igual a: 13.100 Km.

El valor exacto es : **12890 Km.** , lo que supone un error del 1%.

# TRIGONOMETRÍA



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto contiguo}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

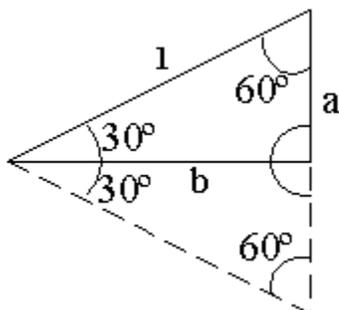
Por el Teorema de Pitágoras:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \left( \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \right)^2 + \left( \frac{\text{Cateto contiguo}}{\text{Hipotenusa}} \right)^2 = \frac{\text{Cateto}^2_{\text{opuesto}} + \text{Cateto}^2_{\text{contiguo}}}{\text{Hipotenusa}^2} = \frac{\text{Hipotenusa}^2}{\text{Hipotenusa}^2} = 1$$

RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

## CÁLCULO EXACTO DE LAS RAZONES DE LOS ÁNGULOS DE 30°, 45° y 60°

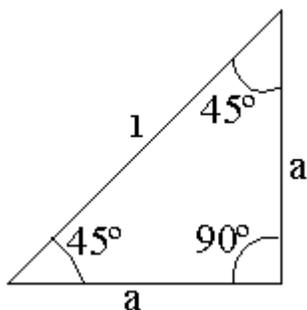


Al duplicar el triángulo como indica la figura, resulta otro triángulo con los 3 ángulos iguales (de 60°), es decir, resulta un triángulo equilátero. Por tanto,  $a = 0.5$

$$\text{sen} 30^\circ = \frac{a}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos} 30^\circ = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg} 30^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Por el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + a^2 = 1 \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen} 45^\circ = \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos} 45^\circ = \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{sen} 60^\circ = \text{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

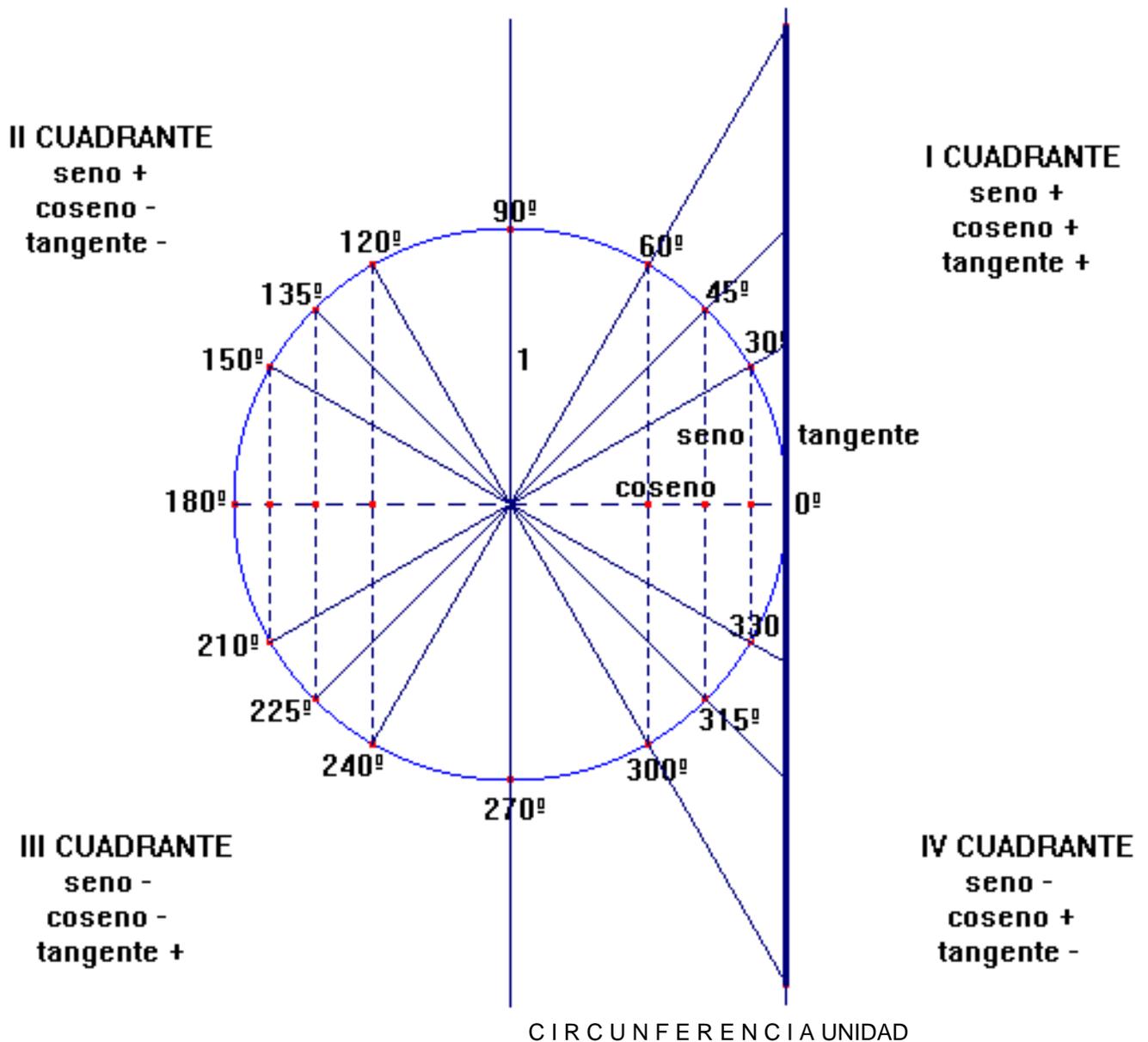
$$\text{cos} 60^\circ = \text{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

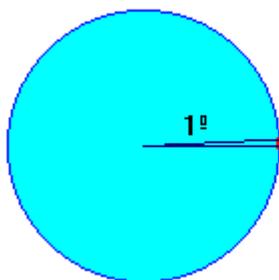
# TRIGONOMETRÍA



## ÁNGULOS BÁSICOS

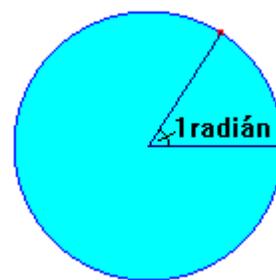


## RELACIÓN ENTRE ÁNGULOS Y RADIANES



$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radianes}$$



# TRIGONOMETRÍA



Completa la siguiente tabla:

ÁNGULO en GRADOS	ÁNGULO en RADIANES	SENO	COSENO	TANGENTE
0°				
30°				
45°				
60°				
90°				
120°				
135°				
150°				
180°				
210°				
225°				
240°				
270°				
300°				
315°				
330°				
360°				
720°				

# TRIGONOMETRÍA



**1.** Halla sin calculadora:

- a)  $4\cos 30^\circ - 2\operatorname{tg} 0^\circ - 4\cos 60^\circ =$   
 b)  $2\operatorname{sen} 150^\circ - 5\operatorname{tg} 225^\circ + 3\operatorname{sen} 270^\circ =$   
 c)  $5\cos 315^\circ + 6\operatorname{sen} 330^\circ - 9\cos 120^\circ =$   
 d)  $5\cos \frac{\pi}{2} + 2\cos \frac{\pi}{6} + 3\cos(2\pi) =$   
 e)  $2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4\operatorname{sen} \pi - 2\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} =$

**2.** Busca un ángulo del primer cuadrante cuyas razones trigonométricas coincidan, en valor absoluto, con las del ángulo:

- a)  $100^\circ \sim$                       b)  $215^\circ \sim$                       c)  $124^\circ \sim$                       d)  $342^\circ \sim$   
 e)  $90^\circ 50' \sim$                       f)  $122^\circ 34' 2'' \sim$                       g)  $285^\circ 20' 39'' \sim$                       h)  $321^\circ 08'' \sim$

**3.** Halla con la calculadora el ángulo  $\alpha$ :

- a)  $\operatorname{sen} \alpha = -0,8$     $\alpha < 270^\circ \Rightarrow \alpha =$                       b)  $\operatorname{cos} \alpha = -0,37$     $\alpha > 180^\circ \Rightarrow \alpha =$   
 c)  $\operatorname{tg} \alpha = 1,36$     $\operatorname{sen} \alpha < 0 \Rightarrow \alpha =$                       d)  $\operatorname{cos} \alpha = 0,23$     $\operatorname{sen} \alpha < 0 \Rightarrow \alpha =$

**4.** Sabiendo que el ángulo  $\alpha$  es obtuso, completa la siguiente tabla:

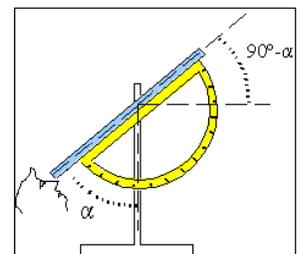
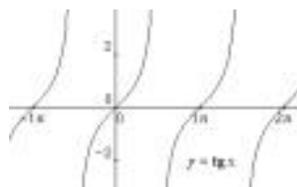
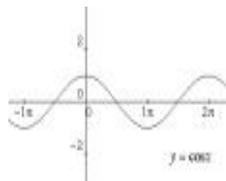
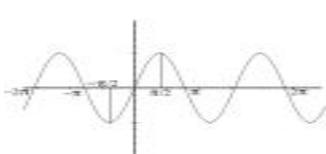
$\operatorname{sen} \alpha$	0,92		0,5		
$\operatorname{cos} \alpha$		- 0,12			- 0,8
$\operatorname{tg} \alpha$				- 4	

**5.** Halla las razones trigonométricas de  $\alpha$ :

- a)  $\operatorname{sen} \alpha = -0,75$     $\alpha < 270^\circ$   
 b)  $\operatorname{cos} \alpha = 2/3$     $\operatorname{tg} \alpha < 0$   
 c)  $\operatorname{tg} \alpha = -3$     $\alpha < 180^\circ$

**6.** Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ( $\hat{C}=90^\circ$ ):

- a)  $a = 5 \text{ cm}$  ,  $b = 12 \text{ cm}$ .                      b)  $a = 43 \text{ m}$  ,  $\hat{A} = 37^\circ$                       c)  $a = 8 \text{ m}$  ,  $B = 58^\circ 25' 47''$   
 d)  $c = 5,8 \text{ km}$  ,  $\hat{A} = 71^\circ 4' 21''$                       e)  $c = 9,2 \text{ cm}$  ,  $B = 43^\circ 29''$                       f)  $b = 4,3 \text{ m}$ ,  $c = 6,7 \text{ m}$

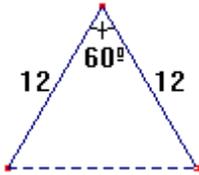


# TRIGONOMETRÍA



## PROBLEMAS

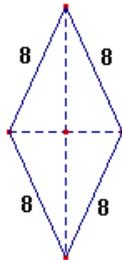
1. Si las dos ramas de un compás forman un ángulo de  $60^\circ$  y cada rama mide 12 cm, halla el radio de la circunferencia que puede trazarse.



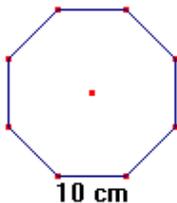
2. Las puntas de las ramas de un compás distan 7 cm y cada rama mide 12 cm. Halla el ángulo que forman las ramas del compás.

3. Al recorrer 3 km por la carretera, hemos ascendido 280 m. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

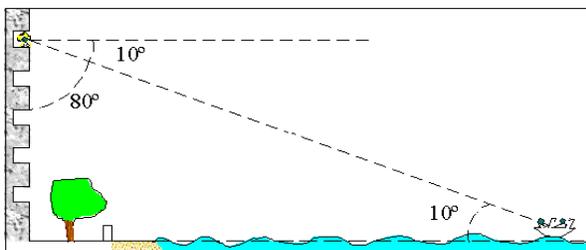
4. El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de  $48^\circ$ . ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?



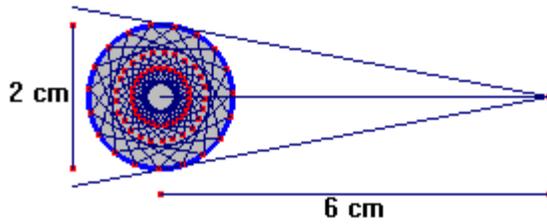
5. Calcula el área de un octógono regular de lado 10 cm.



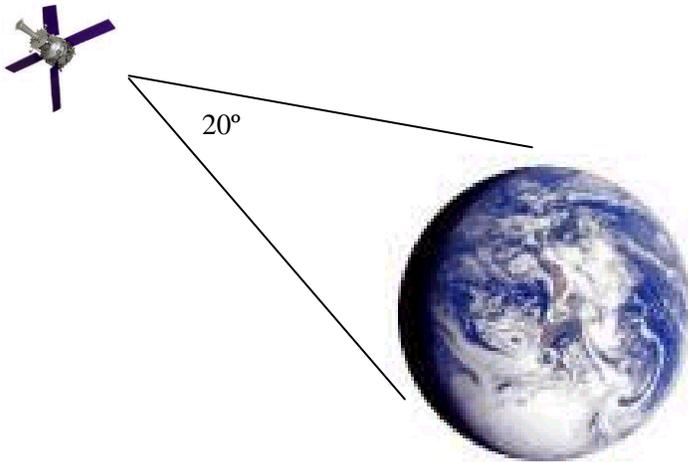
6. Marta, que vive en primera línea de playa, observa un hidropedal averiado bajo un ángulo de depresión de  $10^\circ$ . Si está a 20 m de altura, ¿cuántos metros deben nadar sus ocupantes para llegar a la costa?.



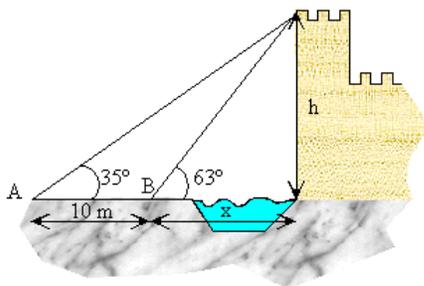
7. Una moneda mide 2 cm de diámetro. Halla el ángulo que forman las tangentes a dicha moneda desde un punto situado a 6 cm del centro.



8. Desde una nave espacial se ve la Tierra bajo un ángulo de  $20^\circ$ . Siendo el radio de la Tierra 6370 km, halla la distancia de la nave a la superficie terrestre.

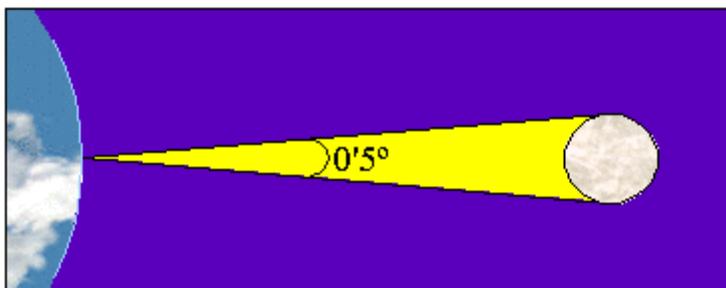


9. Se desea calcular la altura de la torre, para ello se miden los ángulos de elevación desde los puntos A y B. Halla dicha altura.

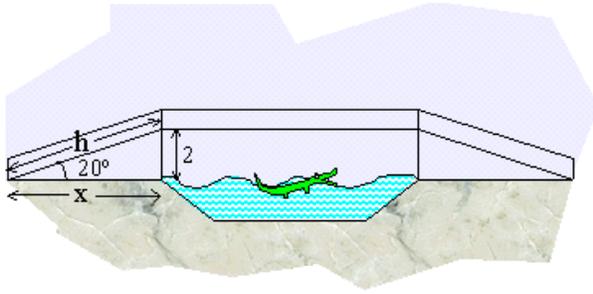


10. Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de  $40^\circ 23'$  y si se retrocede 40 m se ve bajo un ángulo de  $28^\circ 30' 25''$ . Halla la altura del árbol y el ancho del río

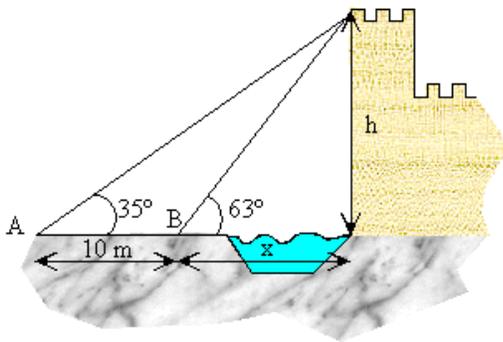
11. Sabiendo que el radio lunar es 1738 km, calcula la distancia de la Tierra a la Luna.



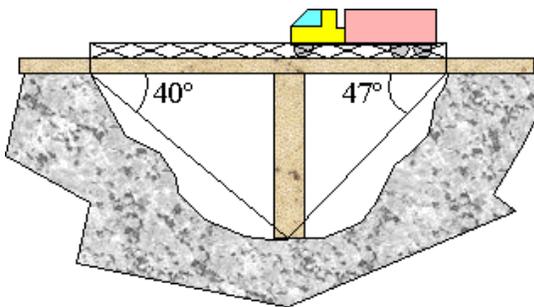
12. Se desea construir un puente sobre un río, que mida 10 m de ancho, de manera que quede a una altura de 2 m sobre el agua y que las rampas de acceso tengan una inclinación de  $20^\circ$ . ¿Cuál debe ser la longitud de la baranda?, ¿a qué distancia del cauce se situará el comienzo de la rampa?



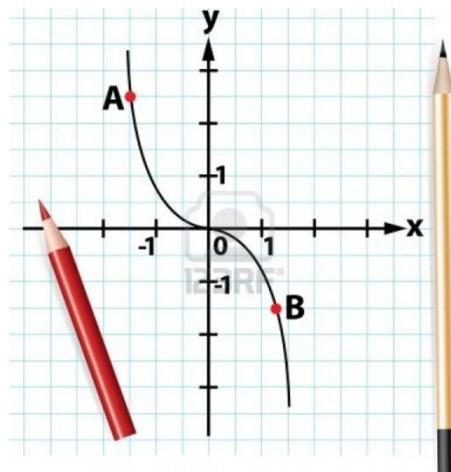
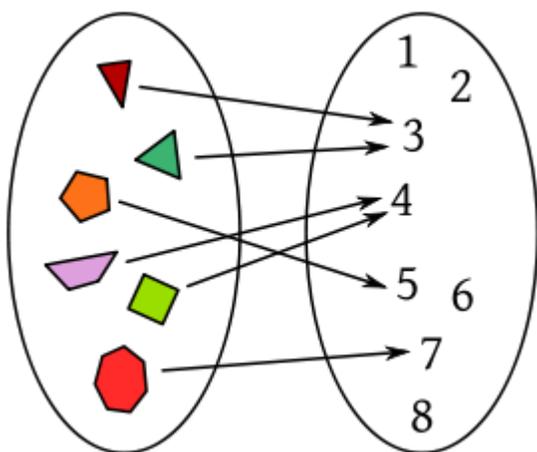
13. Calcula la altura de la torre:



14 Halla la altura del puente, sabiendo que tiene 17 m de largo.

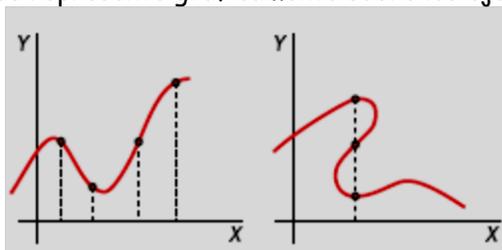


# FUNCIONES



Una función es una relación entre dos variables,  $x$  e  $y$ .

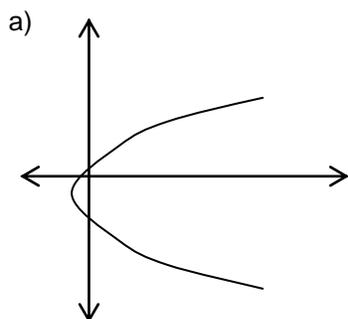
A cada valor de la  $x$  (variable independiente) le corresponde un único valor de  $y$  (variable dependiente). La función se representa gráficamente sobre los ejes cartesianos.



La primera gráfica corresponde a una función: a cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$ .

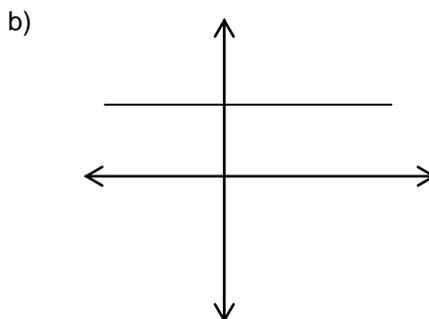
La segunda gráfica no es de una función: hay valores de  $x$  que les corresponde más de un  $y$ .

1.- ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones? ¿Por qué?



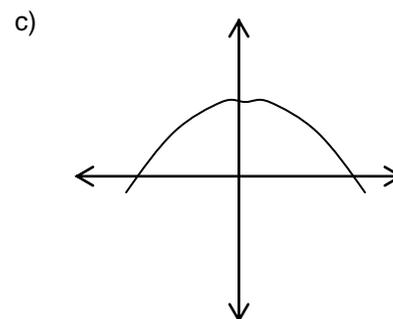
Si  No

Porque:



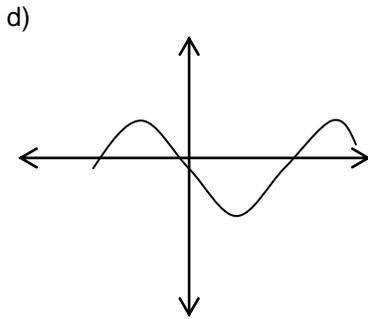
Si  No

Porque:



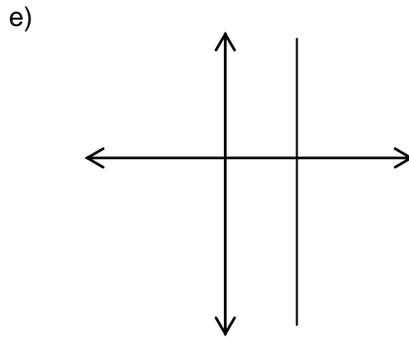
Si  No

Porque:



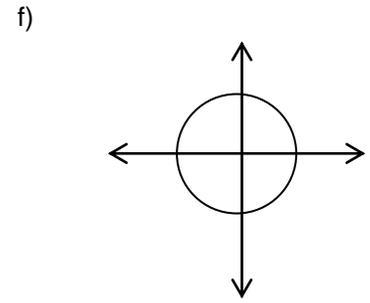
Si  No

Porque:



Si  No

Porque:

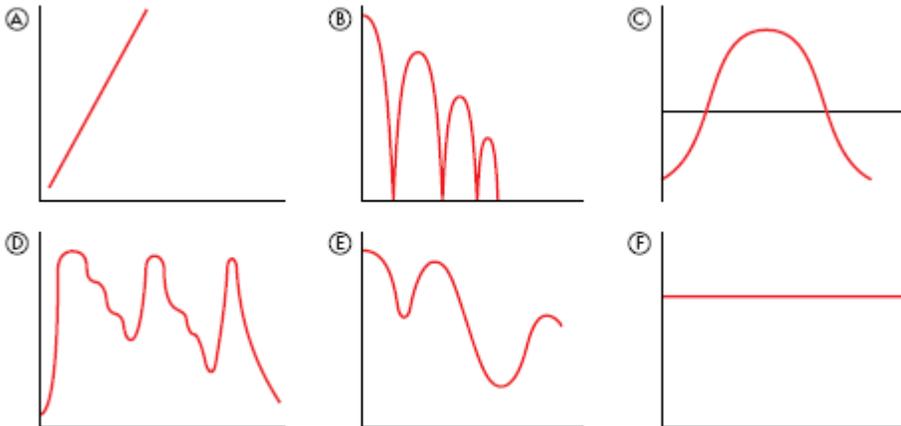


Si  No

Porque:

Las funciones describen fenómenos mediante las relaciones entre las variables que intervienen.  
 Observando la gráfica de una función podemos comprender cómo evoluciona el fenómeno que en ella se describe

2.- Asocia cada gráfica con las situaciones descritas más abajo, y di en cada caso que representan los ejes de abscisas y los de ordenadas.



1) Altura de una pelota que bota al pasar el tiempo...B)

x: el tiempo que transcurre en segundos y: la altura en centímetros que alcanza.

2) Nivel de ruido desde las seis de la mañana hasta las seis de la tarde.....

x:..... y:.....

3) Temperaturas mínimas diarias en Segovia a lo largo de un año.....

x:..... y:.....

4) Precio de las bolsas de patatas fritas.....

x:..... y:.....

5) Nivel de agua de un pantano a lo largo de un año.....

x:..... y:.....

6) Distancia a la Tierra de un satélite artificial, al pasar el tiempo.....

x:..... y:.....

## CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

3.- La siguiente gráfica muestra la estatura media de los varones españoles según su edad:

a) ¿Cuál es la variable dependiente? ..... ¿y la independiente? .....

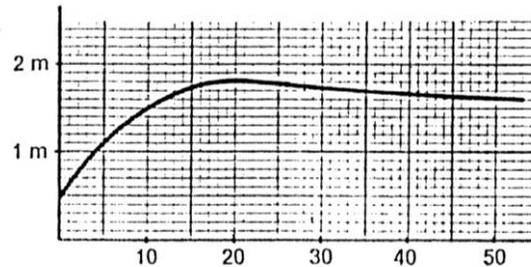
b) ¿Cuál es la estatura media a los 10 años? .....

c) ¿Cuál es la etapa de vida de crecimiento?  
.....

d) ¿A partir de que edad se disminuye de altura?.....

e) ¿A que edad la altura es máxima?  
.....

f) ¿Cuál es la altura mínima?  
.....



4.- Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo ingresado en la U.C.I. a lo largo de un día.

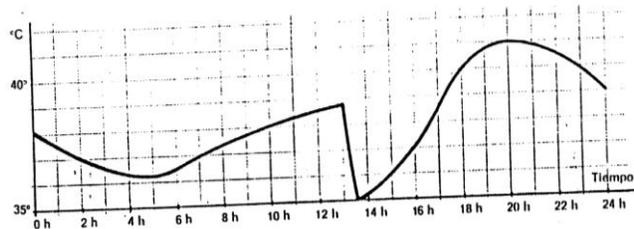
a) ¿Hubo algún descenso de temperatura durante la madrugada?  
..... ¿Entre que horas?  
.....

b) ¿A qué hora del día la temperatura fue mínima? ..... ¿Y máxima? .....

c) ¿Qué pasó entre las dos horas? .....

d) ¿Cuándo tuvo el enfermo la temperatura mínima entre las 0 h y las 12 h? .....

e) ¿A qué hora entre las 8 y las 16 horas alcanza el enfermo la temperatura máxima? .....

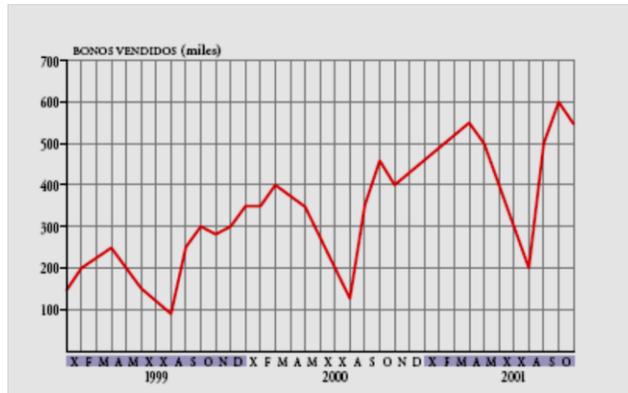


Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar la variable independiente  $x$  en ese intervalo aumenta también la variable dependiente  $y$   
 Una función es **decreciente** en un intervalo cuando al aumentar la variable independiente  $x$  en ese intervalo disminuye también la variable dependiente  $y$

Una función  $y = f(x)$  tiene un **máximo relativo** en un punto  $a$  de su dominio si el valor de la función en ese punto,  $f(a)$ , es mayor que los valores que toma la función en los puntos próximos a  $a$

Una función  $y = f(x)$  tiene un **mínimo relativo** en un punto  $a$  de su dominio si el valor de la función en ese punto,  $f(a)$ , es menor que los valores que toma la función en los puntos próximos a  $a$

4.- Una compañía de transporte público recogió en una gráfica la información que tiene sobre la venta de bonos para viajar en sus líneas.

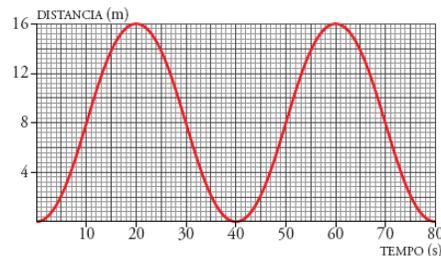


- a) ¿Durante cuánto tiempo se hizo este estudio?
- b) ¿En qué momento del año 1999 se vendieron menos bonos? .....  
 ¿Y en cada uno de los años 2000 y 2001? .....
- c) ¿En que momento del año 2001 se produce la máxima venta? .....  
 ¿A qué lo atribuyes? .....
- d) ¿En qué periodos anuales es mayor el crecimiento en la venta de bonos? .....  
 ¿En qué estación del año es decreciente la venta? .....

Una función  $y = f(x)$  se dice **periódica de período T** cuando toma valores iguales (de "y"), a medida que "x" toma valores en un cierto intervalo de longitud T.  
 Una función periódica queda perfectamente determinada conociendo como se comporta en un intervalo de longitud igual a un período (T).

5 Los cestos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Esta es la representación gráfica de la función: *tiempo-distancia* al suelo de un cesto.

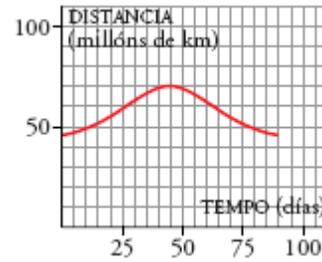
- a) ¿Cuánto tarda en dar una vuelta completa?.....
- b) Observa cual es la altura máxima y cuál es el radio de la noria.....
- c) ¿Es esta una función periódica?.....  
 ¿Cuál es el período?.....



- d) Explica cómo calcular la altura a los 130 segundos sin necesidad de continuar la gráfica

6 Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de km., según muestra la gráfica *tiempo-distancia*

- a) ¿Es esta función periódica?..... ¿Cual es el período?.....
- b) ¿En que momento la distancia de Mercurio al Sol es máxima? .....
- c) Desde que inicia la órbita, ¿durante cuánto tiempo aumenta la distancia al Sol?.....
- d) Completa la gráfica de la distancia de Mercurio al Sol durante 300 días.



7 Describe el comportamiento de un carrusel mediante la siguiente gráfica, que relaciona el tiempo que transcurre desde que comienza a moverse hasta que empieza una nueva vuelta

- a) ¿Es una función periódica?.....



- b) ¿Cuál es el periodo?.....
- c) Desde que comienza a moverse ¿Durante cuánto tiempo aumenta su velocidad?.....
- d) ¿Cuánto tiempo mantiene la velocidad constante?.....
- e) ¿Cuánto tiempo está parado?.....

Una función  $y = f(x)$  se dice **continua** en su dominio cuando su gráfica es de trazo continuo en el mismo. En caso contrario se dice **discontinua**.

Las discontinuidades de una función pueden ser debidas a:

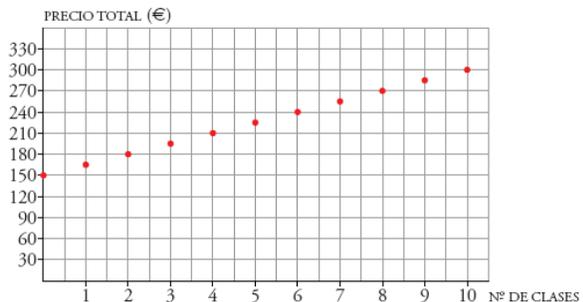
- Si la variable independiente "x" toma únicamente valores discretos, la gráfica de la función consta de una serie de puntos.
- Si la variable "x" toma valores en un intervalo pero la variable "Y" toma valores discretos, la función tiene una gráfica: "a saltos". Decimos entonces que es discontinua en los "x" en que se producen los saltos.

8 En la autoescuela "Loranca" las tarifas son las siguientes:

Precio de cada clase.....15€  
 Precio matrícula carné.....150€

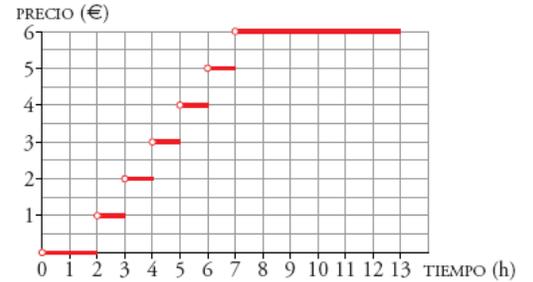
Observando la gráfica adjunta correspondiente al coste del carné según el número de clases recibidas, contesta a las siguientes preguntas:

- a) Con 5 clases obtuve el carné, ¿Cuánto pagué en total?.....
- b) ¿Es la función que relaciona nº de horas-precio continua?.....
- c) ¿Qué tipo de discontinuidad tiene?.....



9. Esta es la gráfica del coste de aparcamiento, en un centro comercial, en función del número de horas que mantenga el automóvil en el garaje.

- a) ¿Es la función: *tiempo-coste* continua?.....  
 b) ¿De que discontinuidad se trata?.....  
 .....  
 c) Describe mediante una tabla de valores los costes del aparcamiento en ese centro comercial.



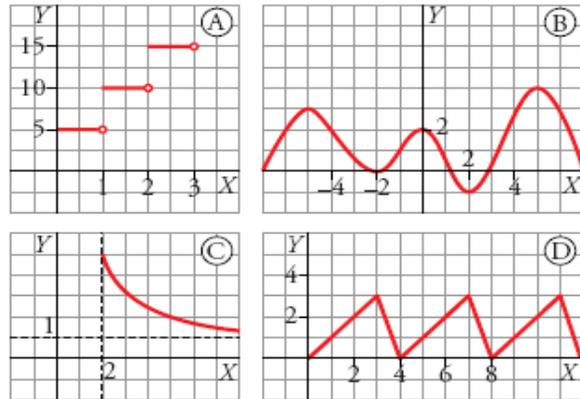
Una función es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos  $x$  e  $y$ .

- $x$  es la **variable independiente**
- $y$  es la **variable dependiente**
- Una función asocia a cada valor de  $x$  un **único** valor de  $y$ .

El tramo de valores de  $x$  para los cuales hay valores de  $y$  se llama **dominio** de definición de la función

El tramo de valores  $y$  correspondiente a cada valor de  $x$  se llama **recorrido**.

10. En cada una de estas gráficas indica: Dominio, Recorrido, Intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos. Indica también si alguna es discontinua o si alguna es periódica.



Completa la siguiente tabla para las funciones arriba señaladas :

FUNCIÓN	A	B	C	D
Dominio	$x \geq 0$			
Crecimiento	Siempre			
Decrecimiento	Nunca			

Máximos	No tiene
Mínimos	No tiene
Discontinua	Sí, en N
Periódica	No

11 Los coches, una vez se compran, empiezan a perder valor a un ritmo de un 20% anual, aproximadamente.

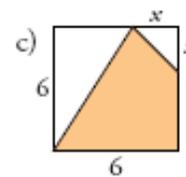
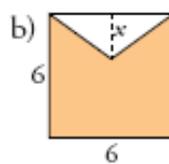
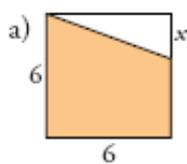
a) Haz una tabla de valores que nos dé el valor de un coche que costó 15000 €, en años sucesivos.

Años	Valor del Coche(€)
0	15000€
1	
2	
3	
4	
5	

b) Representa la función años- valor del coche.

c) Halla una fórmula que permita calcular el precio del coche en función de los años transcurridos hasta su venta.

12 Escribe en función de “x” el área de la parte coloreada de cada una de estas figuras.



En el caso a) se obtiene así:

$$\text{Área Cuadrado} = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2 \quad \text{Área triángulo} = \frac{6 \cdot x}{2} = 3x$$

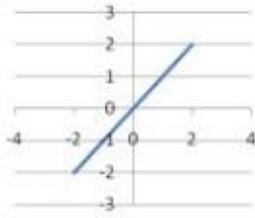
$$\text{Área Coloreada} = f(x) = 36 - 3x$$

FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES

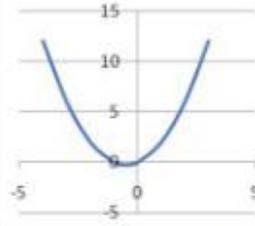
$y=f(x)$

$F(x) = ax + b$



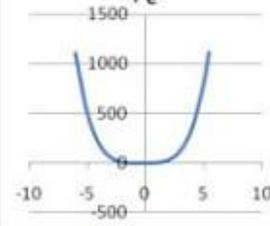
**LINEAL (Recta)**

$F(x) = ax^2 + bx + c$



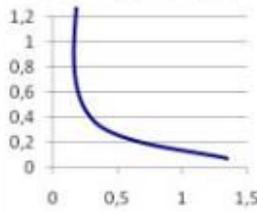
**CUADRÁTICA (Parábola)**

$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$



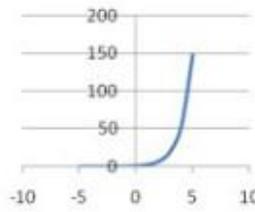
**POLINÓMICA**

$F(x) = p(x)/q(x)$



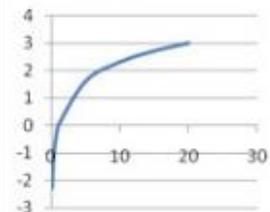
**RACIONAL**  
(prop. inversa, 1/x, Hipérbola)

$F(x) = e^x$



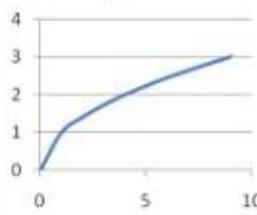
**EXPONENCIAL**

$F(x) = \ln x$



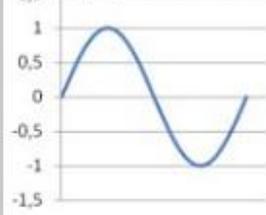
**LOGARÍTMICA**

$F(x) = \sqrt{x}$



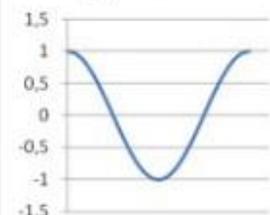
**IRRACIONAL**

$F(x) = \text{sen } x$



**SENO (Sinusoide)**

$F(x) = \text{cos } x$



**COSENO (Cosinusoide)**

TIPOS DE FUNCIONES

nombre expresión gráfica

## **FUNCIONES LINEALES**

Observando la siguiente tabla, puedes ver que los precios de alquiler de vídeos depende de si, previamente, te hiciste o no socio del videoclub.

nº de vídeos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Precio no socios</b>	0	2,5	5	7,5							
<b>Precio socios</b>	12	13	14	15							

a) Completa la tabla anterior.

b) Completa la gráfica de la derecha, representando con puntos rojos los resultados para los socios y con puntos verdes los resultados para los no socios.

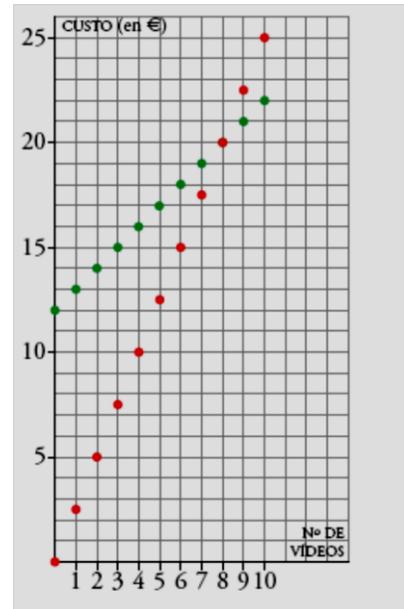
c) ¿A partir de cuántos vídeos conviene hacerse socio del videoclub?.....

d) Si la expresión del coste de "x" vídeos, sin ser socio, es :  $y = 2,5 \cdot x$

¿Cuál es la fórmula correspondiente siendo socio?

.....  
 d) ¿Son las gráficas que obtuviste líneas rectas discontinuas?..... ¿Por qué son discontinuas?

.....



Dos magnitudes se dicen "directamente proporcionales" cuando al aumentar una de ellas (doble, triple,.....) también aumenta la otra del mismo modo (doble, triple,....) y al disminuir una (mitad, tercera parte,...) la otra disminuye del mismo modo (mitad, tercera parte,....). De modo más preciso: cuando los valores de una de ellas se obtienen a partir de los de la otra multiplicándolos por un número fijo al que llamamos, "constante de proporcionalidad" (en el ejemplo anterior, el coste del alquiler de vídeos para los no socios en relación con el nº de vídeos alquilados; en este caso esa constante de proporcionalidad es:2,5).

Todas las funciones que relacionan dos magnitudes directamente proporcionales se representan mediante una recta.

En algunos casos la relación entre dos magnitudes no proporcionales también se describe mediante una recta (en el ejemplo anterior, el coste del alquiler de vídeos para los socios en relación con el nº de videos alquilados, se relacionan también mediante una recta).

1.- Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.

a) Completa la tabla que convierte millas en km.

<b>Millas(x)</b>	0	1	2	3	4	5	6	7
<b>Kilómetros(y)</b>	0	1,6	3,2					

- b) ¿Cuál es la fórmula que relaciona: millas-km?.....  
 c) ¿Cual es el valor de la constante de proporcionalidad?.....  
 d) ¿Qué significado tiene esta constante?.....  
 .....

c) Dibuja la gráfica de la relación: millas-km.

- d) ¿Cuántos km. recorreré si he hecho 25 millas?.....  
 ¿Y cuántas millas recorreré si he hecho 176 km.?.....

2.- Al colgar diferentes pesos de un resorte, este se va alargando según los valores que indica esta tabla:

<b>Peso, x(g)</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>10</b>
<b>Longitud ,y(cm.)</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7,5</b>	<b>10</b>

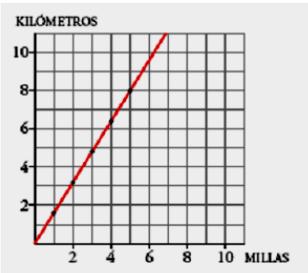
a) Representa los "puntos" de la tabla en un sistema de ejes cartesianos.

b) Calcula la expresión analítica (fórmula) que relaciona: peso-longitud.

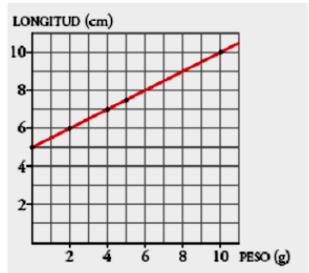
c) ¿Qué longitud tendrá el resorte cuando cuelgue un peso de 850 centigramos?.....  
 .....

**Funciones lineales**

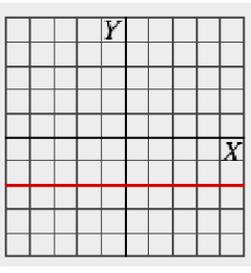
Son aquellas que se representan mediante una recta. Entre estas tenemos:



Func. de proporcionalidad  
 Recta que pasa por:  $(0,0)$   
 Ecuación:  $y = m \cdot x$   
*m es la pendiente*



Función Afín  
 Recta corta eje y en  $(0,n)$   
 Ecuación:  $y = m \cdot x + n$   
*m es la pendiente*

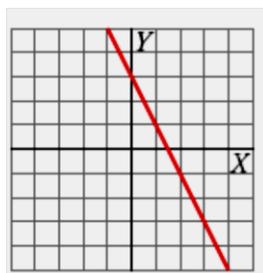


Función Constante  
 Paralela al eje X  
 Ecuación:  $y = n$   
 la pendiente es 0

3 Indica el tipo de las funciones lineales de que se trata de entre todas las dadas a continuación, y posteriormente dibuja su gráfica sobre unos ejes cartesianos:

- a)  $y = x$    b)  $y = -2x$    c)  $y = 1$    d)  $y = 3x - 2$    e)  $y = -2$    f)  $y = 4x$    g)  $y = 3 - 2x$

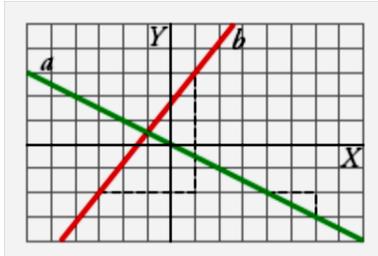
La gráfica de la función  $y = 3 - 2x$  sería:



Para cada una de ellas responde las preguntas siguientes:

- a) ¿pasa por el (0,0)?..... ¿y por el (1,1)?.....
- b) ¿es continua?.....
- c) ¿cuánto vale la pendiente?.....
- d) ¿es creciente?.....

La pendiente de una recta es la variación (positiva o negativa) que experimenta el valor de "y" cuando el valor de "x" aumenta una unidad.  
 Para calcularla dividimos la variación de "y" entre la variación de "x" de dos puntos cualesquiera de esa recta.

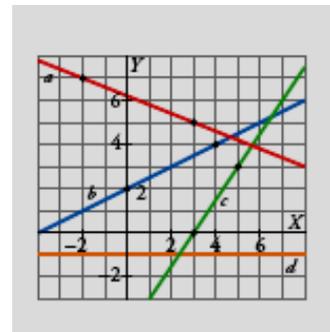
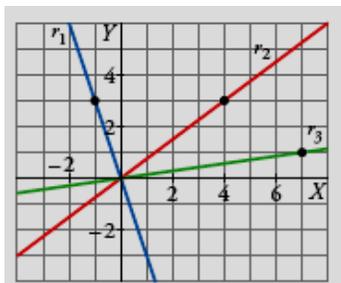
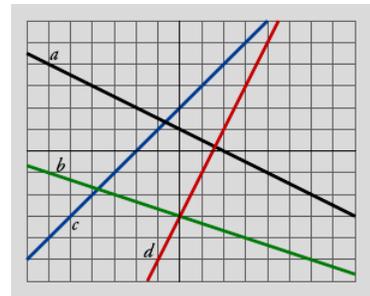
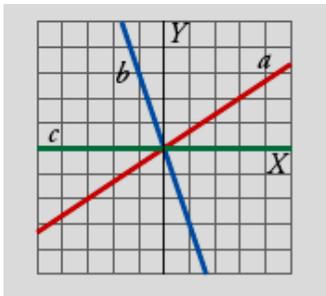


Observa como la recta b) que pasa por los puntos: (1,3) y (-3,-2) tiene por pendiente:

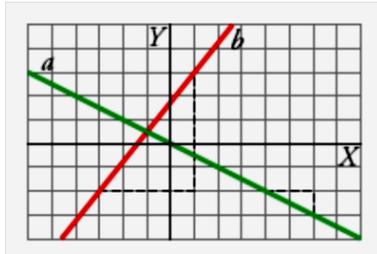
$$m = \frac{3 - (-2)}{1 - (-3)} = \frac{5}{4}$$

Calcula tú la pendiente de la recta a)

4. Calcula las pendientes de las siguientes rectas:



Si conocemos un punto  $P = (x_1, y_1)$  de una recta y su pendiente "m" entonces su ecuación es de la forma  $y = y_1 + m(x - x_1)$



En este caso para la recta b) su pendiente es  $\frac{5}{4}$  y pasa por el punto:  $P=(1,3)$

Por tanto su ecuación es:  $y = 3 + \frac{5}{4}(x - 1)$  Calcula tú la ecuación de la recta a).

5.- Calcula las ecuaciones de las rectas del ejercicio anterior.

6.- Estas son las gráficas que nos muestran la distancia que recorre el sonido en diferentes medios según el tiempo que transcurre.

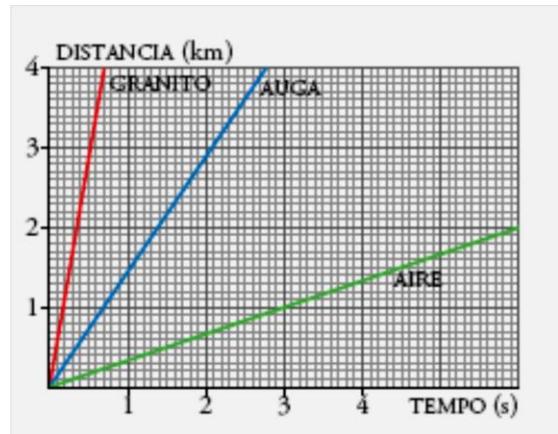
a) ¿Cuál es la pendiente de cada una?.....

.....  
b) explica el significado de la pendiente: así

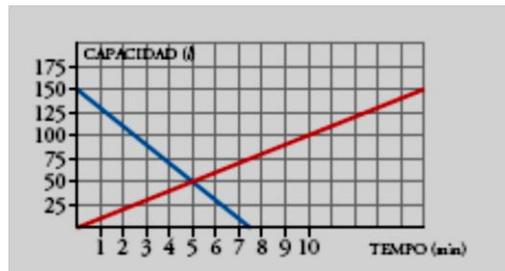
$m = 1,5$  significa que el sonido recorre 1,5 Km. en una hora en el agua

.....

c) Escribe las ecuaciones de cada recta



Para estudiar conjuntamente dos funciones lineales, representamos las dos rectas sobre los mismos ejes. Las coordenadas del punto de corte de ambas, si lo tienen, se calcula resolviendo el sistema de dos ecuaciones lineales al que dan lugar.



Observa que para las gráficas dadas el punto de corte es:  $P = (5,50)$ .

# FUNCIONES POLINÓMICAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1. Calcula, razonadamente, el dominio de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2}$

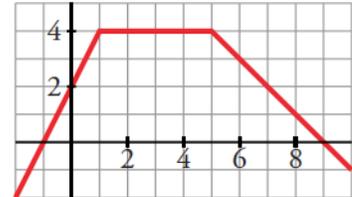
b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

c)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. a) Representa la gráfica de la función:  $y = 4x - x^2 + 5$ , calculando previamente el vértice y los cortes con los ejes.

b) Calcula analíticamente los puntos de corte de la parábola anterior con la recta de ecuación  $2x - y = 14$

3. Halla la expresión analítica de la función representada.

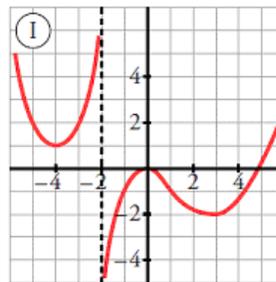


4. Observa la siguiente gráfica. Calcula:

- a) Dominio
- b) Cortes con los ejes
- c) Máximos y mínimos relativos
- d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x),$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



5 Sea la función  $f(x) = \log_2 x$  Calcula su dominio, dibuja su gráfica, indica el recorrido, la ecuación de sus asíntotas, señala si es creciente o decreciente.

6 Una persona ingresa 20000 euros en un banco al 6% de interés compuesto anual (los intereses se acumulan cada año al capital inicial).

- a) Escribe la función que sirve para hallar el capital acumulado al cabo de t años.
- b) ¿Cuál será el capital acumulado al cabo de 2, 4 ó 6 años?
- c) ¿Cuántos años deben pasar para que se duplique el capital inicial?

7 Una empresa ha calculado que necesita una superficie de 600 m<sup>2</sup> para almacenar sus existencias y ha decidido construir una nave rectangular para tal fin. Llamaremos x e y a los lados de dicho rectángulo.

- a) Explica los valores entre los que se mueven x e y.
- b) Encuentra la función que relaciona y con x. ¿De qué tipo es? Dibuja su gráfica.
- c) Halla la función que relaciona el perímetro de la nave con el lado x.

8 La función exponencial  $y = ka^x$  pasa por los puntos (0, 2) y (2, 1'28). Calcula k y a.

9 Calcula el dominio de definición de las funciones

$f(x) = \frac{3}{2x+1} + 5$

$f(x) = \sqrt{2x+1}$

# FUNCIÓNES

## EJERCICIOS



1. Escribe la función que relaciona tu edad con la edad de tu padre. ¿Qué edad tendrá tu padre cuando tú tengas 20 años? ¿Qué edad tendrás cuando tu padre tenga 65 años?



2. Deseas pasar unas vacaciones de ciclo-turista con tus amigos. Alquilas una bici y te cobran 5 euros al entregarte la bici y 0,6 € por cada día que transcurra. Escribe la fórmula del coste de alquiler de la bici en función de los días de los que dispones de ella. Representa esta función.



3. Representa en un mismo sistema de coordenadas cartesianas las gráficas de:

- a)  $y = x/2$       b)  $y = 4x$       c)  $y = 6x$   
d)  $y = -0,5x$       e)  $y = -4x$       f)  $y = -6x$

4. Del ejercicio anterior selecciona las funciones que son crecientes e indica su pendiente. Haz lo mismo con las decrecientes. ¿Qué puedes concluir?

5. Decide si la recta  $y = 5x - 2$  pasa por los puntos  $(0,1)$ ,  $(0,-2)$ ,  $(1/2,0)$  y  $(1,1)$ .

6. ¿Qué valor debe tener  $k$  para que la recta  $y = -2x + k$  pase por el punto  $(1,2)$ ?

7. Calcula los ángulos que forman el semieje OX positivo con las rectas del ejercicio 3.

8. Calcula el ángulo que forma el semieje OX positivo con la recta que pasa por los puntos  $(1,2)$  y  $(2,4)$ .

9. Un teléfono móvil tiene el siguiente contrato: por realizar la conexión 0,25 € y por cada 3 minutos o fracción de ellos 0,30 € más. Representa la función coste.



10. En el mes de enero todos los establecimientos suelen hacer rebajas. En un comercio todos los artículos están rebajados un 25%. ¿Cuál es el precio rebajado de unas deportivas que costaban 90€? ¿Y el de un DVD que costaba 150€? ¿Qué función relaciona los precios antiguos con los nuevos?

11. Estudia si la parábola  $y = -x^2 + 3x - 5$  pasa por los puntos (0,-5), (-1,-9) y (7,1).

12. Calcula los cortes con los ejes, el eje de simetría y el vértice de estas parábolas. Representálas.

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| a) $y = 2x^2 + 1$      | b) $y = -x^2 - 1$      |
| c) $y = x^2 - 2x + 1$  | d) $y = x^2 - 4x + 3$  |
| e) $y = x^2 - 6x + 5$  | f) $y = -x^2 + 4x + 4$ |
| f) $y = x^2 + 5$       | g) $y = -x^2 + 4x - 6$ |
| h) $y = -x^2 - 2x - 8$ | i) $y = x^2 - 2x + 2$  |

13. Representa gráficamente las parábolas:

- |                     |                          |
|---------------------|--------------------------|
| a) $y = 5/4x + 4/3$ | b) $y = 3x^2 + 9x - 30$  |
| c) $y = -x/3 + 2/5$ | d) $y = -3x^2 - 3x + 36$ |

14. Para realizar un trabajo de ordenador 8 chicos tardan 15 días. Si en lugar de 8, fueran 15, ¿cuántos días tardarían? Construye una tabla haciendo variar los obreros necesarios para el mismo trabajo. ¿Qué tipo de función definen?. ¿Cuál es su expresión algebraica? Representa gráficamente la función.

15. Representa gráficamente las funciones:

- |              |               |                    |
|--------------|---------------|--------------------|
| a) $y = 2/x$ | b) $y = -4/x$ | c) $x \cdot y = 8$ |
|--------------|---------------|--------------------|

# ESTADÍSTICA

## Pregunta 1

Las notas de inglés de una clase de 40 alumnos han sido las siguientes:

1 7 9 2 5 4 4 3 7 8  
 4 5 6 7 6 4 3 1 5 9  
 2 6 4 6 5 2 2 8 3 6  
 4 5 2 4 3 5 6 5 2 4

Calcula la nota media.

## Pregunta 2

En una clase de un IES hemos medido la altura de los 25 alumnos. Sus medidas, en cm, son:

167 159 168 165 150 170 172 158 163 156  
 151 173 175 164 153 158 157 164 169 163  
 160 159 158 174 164

Elabora una tabla que represente estos resultados con sus frecuencias absolutas, relativas y porcentajes. Toma intervalos de amplitud 5 cm comenzando por 150.

## Pregunta 3

En un examen de matemáticas los 30 alumnos de una clase han obtenido las puntuaciones recogidas en la siguiente tabla:

Calificaciones	Nº alumnos
[0,1)	2
[1,2)	2
[2,3)	3
[3,4)	6
[4,5)	7
[5,6)	6
[6,7)	1
[7,8)	1
[8,9)	1
[9,10)	1



## Pregunta 4

En una clase de 25 alumnos hemos preguntado la edad de cada uno, obteniendo estos resultados:

14, 14, 15, 13, 15, 14, 14, 14, 14, 15, 13, 14, 15, 16, 14, 15, 13, 14, 15, 13, 14, 14, 14, 15, 14

Haz una tabla donde aparezcan las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas.

### **Pregunta 5**

Calcula la varianza y la desviación típica de los siguientes datos:

4, 7, 5, 3, 6.

### **Pregunta 6**

Halla el número medio de hijos por mujer en 1998 en España a partir de los datos de las comunidades autónomas:

Andalucía	1,28
Aragón	1,05
Asturias (Principado de)	0,8
Baleares (Islas)	1,44
Canarias	1,24
Cantabria	0,94
Castilla y León	0,91
Castilla-La Mancha	1,24
Cataluña	1,21
Comunidad Valenciana	1,17
Extremadura	1,2
Galicia	0,9
Madrid (Comunidad de)	1,19
Murcia (Región de)	1,41
Navarra (C. Foral de)	1,7
País Vasco	0,97
Rioja (La)	1,12
Ceuta y Melilla	1,87

(Fuente: INE)



### **Pregunta 7**

Calcula el percentil  $P_{65}$  de los siguientes datos:

$x_i$	$f_i$
2	12
4	10
6	8
8	7
10	5
12	8
14	10

### **Pregunta 8**

Calcula la media de viajeros en establecimientos hoteleros durante 1999. Después calcula la desviación típica para ver si esa media es representativa de todos los meses del año.

(Fuente: INE)

Mes	Viajeros
Enero	2.775.738
Febrero	3.205.892
Marzo	4.143.343
Abril	4.931.385
Mayo	5.724.555
Junio	5.834.331
Julio	6.415.298
Agosto	6.986.211
Septiembre	6.349.504
Octubre	5.447.890
Noviembre	3.570.715
Diciembre	3.204.082

### **Pregunta 9**

Representa mediante diagrama de barras las ganancias medias de los trabajadores, según el sexo, en el cuarto trimestre de 1999, que se recogen en la siguiente tabla:

Sector	Sueldo en ptas.	
	Varones	Mujeres
Industria	284.363	206.204
Construcción	214.446	205.372
Servicios	263.554	195.447

(Fuente: INE)

### **Pregunta 10**

Haz un diagrama de sectores que represente la procedencia de los extranjeros residentes en España, en diciembre de 1999, recogidos en la siguiente tabla:

Procedencia	
Europa	353.556
América	166.709
Asia	66.340
África	213.012
Oceanía	1.013
Desconocida	699

(Fuente: INE)

### **Pregunta 11**

Calcula la media de la población en las Comunidades Autónomas que nos indica la siguiente tabla:

CCAA	Habitantes
Andalucía	7.236.459
Aragón	1.183.234
Asturias	1.081.834
Baleares (Islas)	796.483
Canarias	1.630.015
Cantabria	527.137
Castilla y León	2.484.603
Castilla-La Mancha	1.716.152
Cataluña	6.147.610
Ceuta	72.117
Comunidad Valenciana	4.023.441
Extremadura	1.069.419
Galicia	2.724.544
Madrid	5.091.336
Melilla	60.108
Murcia	1.115.068
Navarra	530.819
País Vasco	2.098.628
Rioja (La)	263.644
TOTAL ESPAÑA	39.852.651



### **Pregunta 12**

Se ha hecho una encuesta sobre el número de hijos en 50 familias, con los siguientes resultados:

0	2	1	2	5	2	1	1	1	4	0	0	2
	0	4	4	1	1	2	2	3	1	2	3	0
	3	1	3	2	2	3	3	1	5	4	3	3
	1	2	2	2	3	2	2	1	0	2	2	1
	1											

Haz una tabla donde se recojan estos datos con sus frecuencias absolutas acumuladas y relativas acumuladas.

### **Pregunta 13**

Las edades de los jugadores de un equipo de baloncesto son: 27, 18, 28, 26, 25, 19, 31, 19, 24 y 26 años.  
¿Cuál es la edad media?

### **Pregunta 14**

Lanzamos un dado 25 veces y obtenemos los siguientes resultados:

5, 3, 2, 6, 5, 1, 2, 3, 2, 1, 5, 1, 5, 2, 4, 5, 6, 1, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 3.

Calcula el percentil  $P_{30}$ .



### **Pregunta 15**

Representa mediante un diagrama de barras las ciudades más pobladas (en 1995):

Ciudad	Habitantes (en millones)
Tokio (Japón)	26,8
Sao Paulo (Brasil)	16,4
Nueva York (EE.UU.)	16,3
C. De México (México)	15,6
Bombay (India)	15,1
Shangai (China)	15,1
Los Ángeles (EE.UU.)	12,4
Pekín (China)	12,4
Calcuta (India)	11,7
Seúl (Corea del Sur)	11,6

(Fuente: Naciones Unidas)



### **Pregunta 16**

En una clase de un IES hemos medido la altura de los 25 alumnos. Sus medidas, en cm, se reflejan en la siguiente tabla agrupados en intervalos:

Alturas	Nº alumnos (fi)
[150,155)	3
[155,160)	7
[160,165)	6
[165,170)	4
[170,175)	5

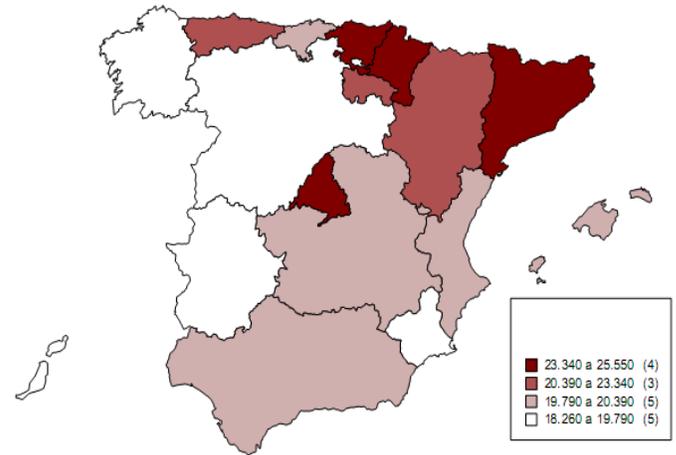
Calcula la varianza y la desviación típica.

### **Pregunta 17**

Calcula el sueldo medio en España de varones y mujeres en la industria y los servicios, según los datos de 1999 ofrecidos por el INE:

CC.AA.	Sueldo medio	
	Varones	Mujeres
Andalucía	248.389	158.901
Aragón	282.054	156.485
Asturias (Principado de)	275.406	177.203
Baleares (Islas)	253.681	176.835
Canarias	217.843	167.953
Cantabria	270.570	163.153
Castilla y León	260.336	171.002
Castilla-La Mancha	226.887	146.525
Cataluña	281.496	195.771
Comunidad Valenciana	244.350	159.117
Extremadura	220.644	133.952
Galicia	229.395	163.609
Madrid (Comunidad de)	308.122	235.456
Murcia (Región de)	218.924	144.544
Navarra (C. Foral de)	289.006	195.560
País Vasco	322.222	232.367
Rioja (La)	255.193	166.257

Comparación del salario medio por comunidades autónomas



### **Pregunta 18**

Las calificaciones de 180 alumnos se recogen en la siguiente tabla:

Calificación	Alumnos
0	1
1	5
2	15
3	20
4	30
5	35
6	22
7	14
8	16
9	14
10	8

Calcula  $P_{90}$ .

### **Pregunta 19**

La siguiente tabla muestra el uso del suelo español, calcula los porcentajes que hay de cada tipo.

(Fuente: INE)

Uso del suelo español	Superficie (Ha.)
Cultivos herbáceos	11.123.000
Cultivos leñosos	5.060.000
Barbechos	4.048.000
Prados y pastizales	2.530.000
Forestal desarbolado	12.650.000
Forestal arbolado ralo	4.048.000
Forestal arbolado normal	8.602.000
Otros usos	2.530.000

**Pregunta 20**

Se han pesado 40 piezas. Los resultados de las pesadas, expresados en gramos, son:

64,1 66,4 64 66,7 65,3 64,4 63,9 63 65,4 64,3  
 68,8 66,6 65,1 64,2 68,5 65,7 65,8 63,1 64,6 63,5  
 65 66,4 67,3 65,7 64 61,5 64,1 65 63 63,2  
 66,9 66,3 67 66,1 66,8 65,3 64,4 64,5 63,1 65,5

Confecciona una tabla estadística para presentar los resultados agrupando en intervalos los valores observados y donde aparezcan también las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas. Toma intervalos de amplitud de 1 cm. comenzando por 61.

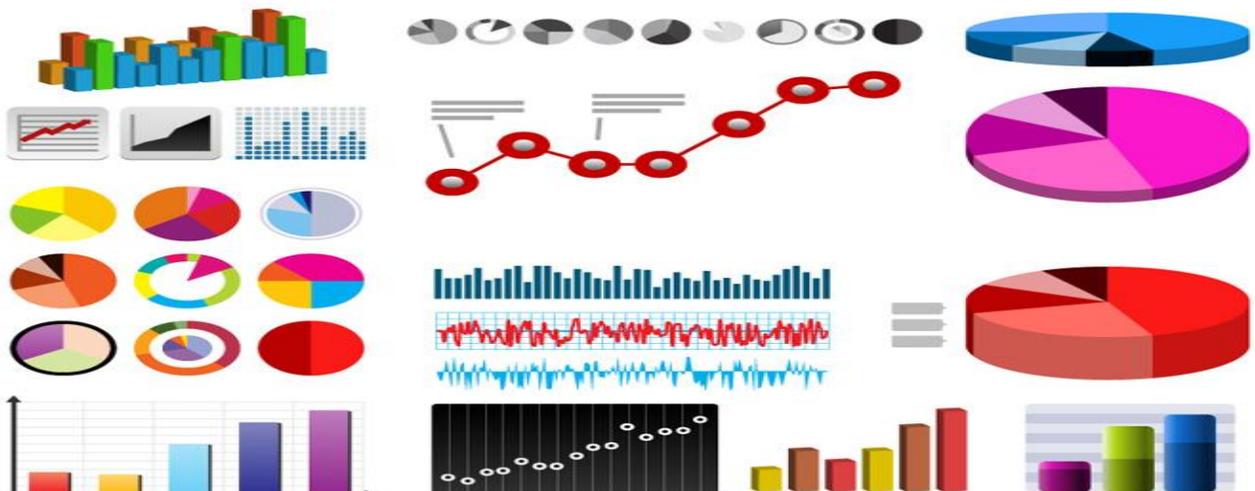
**Pregunta 21**

Halla la media del número de establecimientos hoteleros que hay en las distintas Comunidades Autónomas de España. Después, con ayuda de la desviación típica, comenta si esta media es representativa de todas las comunidades autónomas.

CC.AA.	Nº establecimientos hoteleros
Andalucía	2.266
Aragón	712
Asturas (Principado de)	620
Baleares (Islas)	1.483
Canarias	532
Cantabria	496
Castilla y León	1.452
Castilla-La Mancha	842
Cataluña	2.713
Comunidad Valenciana	1.019
Extremadura	418
Galicia	1.526
Madrid (Comunidad de)	1.242
Murcia (Región de)	209
Navarra (C. Foral de)	150
País Vasco	396
Rioja (La)	117
Ceuta y Melilla	36



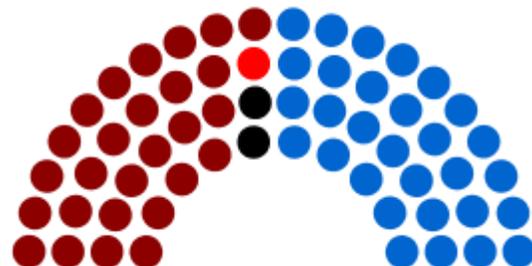
(Fuente: INE)



### **Pregunta 22**

Calcula el porcentaje de participación en las elecciones a Cortes Generales de marzo de 2000, teniendo en cuenta los datos de la tabla siguiente:

	Total electores con derecho a voto	Votantes
Andalucía	5.916.783	4.068.793
Aragón	1.019.845	728.060
Asturias (Principado de)	981.504	657.553
Baleares (Islas)	652.009	400.559
Canarias	1.393.410	845.348
Cantabria	468.607	336.508
Castilla y León	2.186.659	1.586.950
Castilla-La Mancha	1.420.894	1.084.236
Cataluña	5.293.465	3.388.128
Comunidad Valenciana	3.366.210	2.447.384
Extremadura	878.292	662.393
Galicia	2.547.784	1.656.662
Madrid (Comunidad de)	4.317.146	3.111.662
Murcia (Región de)	917.217	674.516
Navarra (C. Foral de)	463.892	306.494
País Vasco	1.810.666	1.155.999
Rioja (La)	230.427	170.997
Ceuta	55.848	30.801
Melilla	48.985	26.450
ESPAÑA	33.969.640	23.339.490



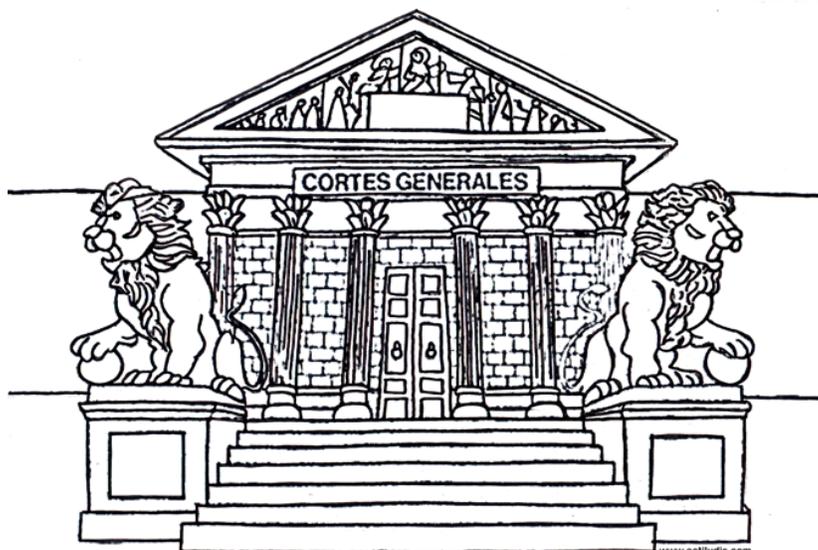
(Fuente: INE)

### **Pregunta 23**

Representa mediante un gráfico de sectores la distribución de escaños en las elecciones a Cortes Generales de 2000.

Partidos políticos	Escaños
PP	183
PSOE	125
CIU	15
IU	8
EAJ-PNV	7
CC	4
Otros*	8

(\* BNG, PA, ERC, IC-V, EA, CHA)  
(Fuente: INE)



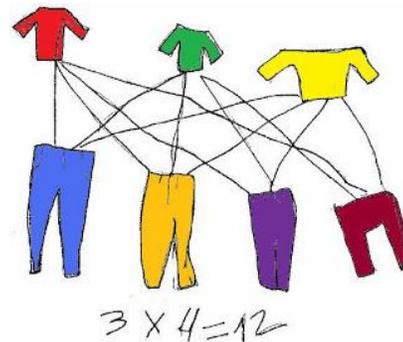
# COMBINATORIA

		AGRUPACIONES	SIN REPETICIÓN	CON REPETICIÓN
¿IMPORTA EL ORDEN DE COLOCACIÓN?	Si	<b>VARIACIONES</b> Tomamos algunos elementos.	$V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m-n+1)$ $V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$	$VR_m^n = m^n$
	No	<b>PERMUTACIONES</b> Tomamos todos los elementos. $n = m$	$V_m^m = P_n = n!$ $n! = \text{Factorial de } n$ $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$	$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!}$
			$C_m^n = \frac{\text{Variaciones}}{\text{Permutaciones}} = \frac{V_m^n}{P_n}$	
		<b>COMBINACIONES</b>	$C_m^n = \binom{m}{n}$ Número combinatorio Se lee "m sobre n" $\Rightarrow C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$	

1. ¿Cuántas palabras diferentes de tres letras pueden formarse con las letras de la palabra CIMA, sin que se repita ninguna letra? Una vez calculado el número, escríbelas todas ordenadamente.
2. Calcula cuántas palabras diferentes de cuatro letras distintas pueden formarse con las letras de la palabra MUSA. Después escríbelas ordenadamente.
3. ¿Cuántos subconjuntos distintos de tres elementos pueden formarse con un conjunto de 8 elementos?
4. Calcular el valor de m para que  $V_{m,3} = 2 V_{m,2}$
5. Hallar el valor de m para que se verifique  $V_{m,2} + V_{m-1,2} + V_{m-2,2} = 62$
6. Escribir como cociente de números factoriales las siguientes expresiones:

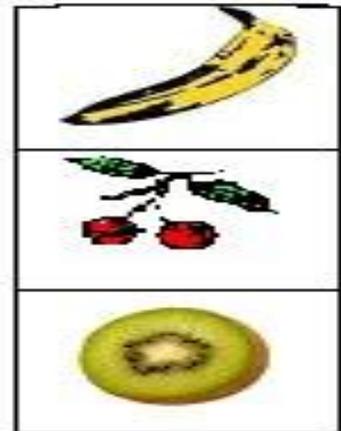
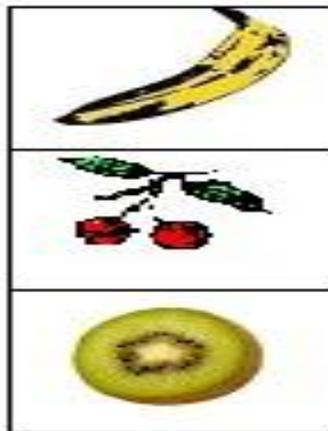
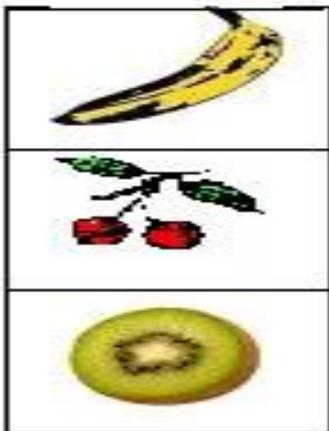
- a)  $11 \times 10 \times 9$
- b)  $(x+1) \times (x-1)$
- c)  $(p-2) (p-3) (p-4)$

7. Resolver la ecuación  $P_{x-1} = 56 P_{x-3}$
8. Resolver la ecuación  $V_{x,2} + 5 P_3 = 9x + 6$
9. Hallar x sabiendo que  $C_{x,x-2} = 10$
10. Resolver la ecuación  $3 C_{x,4} = 5 C_{x,2}$



11. En una carrera en la que participan 10 caballos existen dos tipos de apuesta: en la primera hay que acertar quién va a quedar primero, quién segundo y quién tercero; en la segunda hay que acertar cuáles van a ser los cuatro primeros caballos en llegar, pero no su clasificación. ¿Cuál de los dos tipos de apuesta crees que es más sencilla?
12. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas pueden escribirse con las cifras 0, 2, 4, 6?
13. Dibuja una circunferencia y marca sobre la misma doce puntos. Uniendo parejas de esos puntos ¿Cuántos pentágonos distintos se podrían formar?
14. Con las cifras 0, 2, 4, 6 y 8 ¿cuántos números distintos de tres cifras, todas ellas diferentes, pueden formarse?
15. ¿Cuántos números mayores que 4100 se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4 sin que se repita ninguna?
16. Recordando que una diagonal de un polígono convexo es el segmento que une dos vértices no consecutivos ¿cuántas diagonales se pueden trazar en un octógono convexo?
17. Averiguar cuántas guardias de cinco personas se pueden programar con 14 soldados, con la condición de que el más antiguo de ellos ha de participar en todas.
18. Calcular la suma de todos los números de 4 cifras distintas que se pueden formar con las cifras 1, 3, 5, 7.
19. En una fábrica hay varios centros de almacenamiento, cada uno de los cuales está unido a los demás por una cinta transportadora. Calcula el número de centros de la fábrica si se sabe que el número de cintas transportadoras es 66.
20. ¿Cuántos números distintos de tres cifras diferentes pueden formarse con las cifras 2, 3, 5, 7, 8, teniendo que ser la primera cifra par?
21. Hallar cuántos números distintos de tres cifras diferentes pueden formarse con las cifras 2, 3, 4, 5, 6, 7 que estén comprendidos entre 400 y 600.
22. Calcula la suma de todos los números de cuatro cifras significativas, todas ellas pares y diferentes.

	SIN Repetición	CON Repetición
VARIACIONES	$V_n^p$	$VR_n^p$
PERMUTACIONES	$P_n$	$PR_n^{a,b,c}$
COMBINACIONES	$C_n^p$	$CR_n^p$



23. Se tienen nueve puntos en un plano. Cuatro de ellos están alineados y los restantes están dispuestos de forma que no hay nunca 3 alineados. ¿Cuántos triángulos pueden formarse que tengan sus vértices sobre esos 9 puntos? ¿Cuántas rectas distintas determinan esos puntos?
24. ¿Cuántas señales distintas pueden hacerse con cinco banderas distintas agrupándolas de tres en tres y sin que se repita ninguna? ¿Y agrupándolas de todas las formas posibles (es decir, de una en una, de dos en dos, etc)?
25. Halla la suma de todos los números de cinco cifras diferentes que pueden formarse con las cifras 0, 1, 2, 3, 4.
26. ¿Cuántas palabras (con sentido o no) pueden formarse que tengan exactamente las mismas letras de la palabra CASTO y que empiecen y terminen por vocal?
27. En un club de fútbol hay 23 jugadores, de los que 3 son porteros. ¿Cuántas alineaciones diferentes puede hacer el entrenador si cualquiera de los jugadores de campo puede jugar como defensa, medio o delantero?
28. ¿Cuántos equipos de baloncesto de 5 jugadores cada uno pueden hacerse en un club de 11 jugadores, con la condición de que los jugadores A, B y C no pueden estar simultáneamente en el mismo equipo?
29. Averiguar cuántos números mayores que 200 y menores que 700 pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sin que tengan cifras repetidas. Responde a la misma cuestión en el caso de que las cifras se puedan repetir.
30. ¿Cuántas quinielas de fútbol habría que hacer para tener la certeza de tener una de 14 aciertos? (No tenemos en cuenta la opción del pleno al 15). ¿Cuántas apuestas habría que rellenar en el Bono Loto o en la Lotería Primitiva para tener la certeza de tener una de 6 aciertos? ¿Cuántos números de la Lotería Nacional tendría que adquirir para estar seguro de que me toca el gordo? Averigua los precios actuales de cada una de esas apuestas y explica por qué existe esa variedad.
31. Con las letras de la palabra BRAVO, ¿cuántas ordenaciones distintas pueden hacerse de forma que no haya dos vocales juntas?
32. Suponemos ordenadas en forma creciente todas las permutaciones que pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 5, 8, 9 sin que se repita ninguna. ¿Qué lugar ocupará la permutación 598132?
33. ¿Cuántos puntos de intersección producen 8 rectas coplanarias, sabiendo que dos de ellas son paralelas?
34. ¿Cuántas palabras que contengan dos consonantes y dos vocales pueden formarse con cinco consonantes y cuatro vocales?
35. Resolver la ecuación  $\frac{2VR_x^3}{V_x^2} = 9$
36. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse con las cifras 4, 5, 6 y 7? ¿Cuántos de esos números terminan en 5? Calcula la suma de todos los números obtenidos en las dos preguntas anteriores?



[dreamstime.com](http://dreamstime.com)

37. Se suponen ordenadas en sentido creciente todas las permutaciones posibles con las cifras 1, 2, 3, 5, 7, y 8 ¿Qué lugar ocupará la permutación 731825?
38. Con, exactamente, las letras de la palabra FRANCISCO ¿cuántas palabras pueden formarse con la condición de que empiecen por N y terminen por una consonante?
39. De cierto número de rectas coplanarias se sabe que no hay tres de ellas que concurran en el mismo punto y no hay ninguna pareja de rectas paralelas. Esas rectas producen 45 puntos al cortarse. ¿De cuántas rectas estamos hablando?
40. En cada uno de los ocho vértices del octógono en que termina la torre de mando de un buque hay luces de colores diferentes. ¿Cuántas señales distintas se podrán hacer encendiendo menos de cinco luces?
41. ¿Cuántas multiplicaciones distintas de tres factores distintos con una cifra cada uno pueden hacerse con la condición de que el resultado debe ser distinto de cero? ¿Y si quitamos la condición de que los factores sean distintos?

$$1. \binom{m}{1} = m$$

$$2. \binom{m}{m} = 1$$

$$3. \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$4. \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

$$5. \binom{m}{n} = \frac{m}{n} \binom{m-1}{n-1}$$

$$6. \binom{m}{n} = \frac{m}{m-n} \binom{m-1}{n}$$

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

42. Calcular de la forma más rápida posible el valor de los siguientes números combinatorios:

a)  $\binom{500}{498}$       b)  $\binom{100}{97}$

Por demostrar que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

Trabajamos ambas expresiones:

Lado izquierdo:  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Lado derecho:

$$\begin{aligned} \binom{m}{m-n} &= \frac{m!}{(m-n)!(m-(m-n))!} = \\ &= \frac{m!}{(m-n)!(n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \end{aligned}$$

**Ambas Expresiones son iguales, q.e.d.**

43. Comprobar si la siguiente igualdad es correcta:  $\binom{m}{n} = \frac{m}{n} \binom{m-1}{n-1}$

44. ¿Cómo comprobarías, sin hallar sus valores, que los números combinatorios siguientes son iguales?

$$\binom{6483}{3597} \quad \binom{6483}{2886}$$

45. Resolver la ecuación  $\binom{17}{x} = \binom{17}{9}$

46. Calcula el valor de m para que se verifique la siguiente igualdad:  $\binom{m+1}{2} + \binom{m}{2} + \binom{m-1}{2} = 19$

47. Resolver la ecuación  $\binom{16}{x+1} = \binom{16}{x-1}$

48. Resolver la ecuación  $7 \binom{2x-2}{x-1} = 2 \binom{2x}{x}$

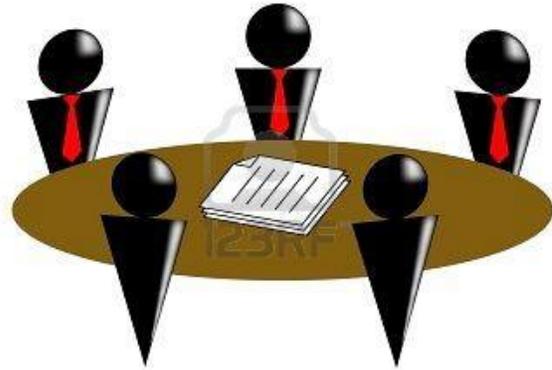
49. Calcula el valor de  $\binom{525}{523} + \binom{525}{524}$

50. Resuelve la ecuación  $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} \cdot \binom{x}{2} = \frac{x^2}{2} + 2$

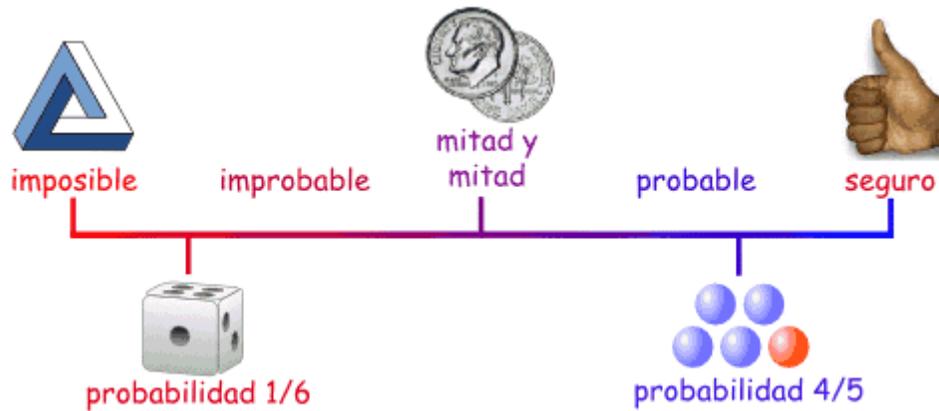


51. ¿Cuántos productos diferentes pueden formarse con los números 7, 9, 11, 13 y 17 tomados de tres en tres?
52. Con seis pesas de 1, 2, 5, 10, 20, y 50 kg ¿Cuántas pesadas diferentes pueden obtenerse tomándolas de tres en tres?
53. ¿Cuántos números enteros distintos mayores que 10 y menores que 100 pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8?
54. ¿Cuántas palabras, con significado o no, pueden formarse con todas las letras de la palabra "problema"?
55. ¿Cuántos números distintos de cinco cifras diferentes pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 que sean menores que 54000?
56. Un depósito de agua tiene 5 caños de desagüe, que arrojan 1, 3, 5, 10 y 20 litros por minuto respectivamente. Abriendo indistintamente cuatro de estos caños, ¿en cuántos tiempos diferentes se puede desaguar el depósito?
57. Se tienen 14 letras diferentes. ¿De cuántas en cuántas habrá que tomarlas para que el número de sus combinaciones sea el mayor posible?

58. ¿Cuántas sumas diferentes de dos sumandos se pueden obtener con los números 1, 3, 5, 11, 21 y 41?
59. Una clase tiene 24 alumnos y el profesor pregunta cada día la lección a dos de ellos. El profesor desea que no se repita nunca la misma pareja ¿Durante cuánto tiempo lo podrá conseguir?
60. A una persona se le sirven en cada comida cuatro platos, de los nueve que son de su agrado. ¿Cuántas comidas diferentes puede hacer esa persona?
61. En una fila de cine de 10 butacas, ¿cuántas posiciones diferentes pueden ocupar tres individuos?
62. ¿Cuántas palabras de dos vocales y dos consonantes pueden formarse con cuatro consonantes y dos vocales, con la condición de que no pueden figurar dos vocales seguidas?
63. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse 10 personas alrededor de una mesa?
64. En una carrera de seis caballos, ¿cuántas clasificaciones distintas pueden producirse si se supone que no hay ningún tipo de empate?
65. El número de variaciones de  $n$  objetos tomados de seis en seis es 720 veces mayor que el de combinaciones de estos objetos tomados de cuatro en cuatro. ¿De cuántos objetos se trata?
66. La diferencia entre el número de variaciones de  $n$  objetos tomados de dos en dos y el de combinaciones de esos mismos objetos tomados también de dos en dos es 190. ¿Cuántos objetos hay?
67. Con las cifras del número 8.752.436 ¿cuántos números distintos de tres cifras se pueden formar no repitiendo ninguna? ¿y repitiendo? ¿Cuántos de esos números son mayores que 500 (en ambos casos)?
68. Se tienen los números 5874 y 12369. ¿Cuántos números enteros pueden formarse que contengan dos cifras no repetidas del primero y tres cifras no repetidas del segundo? La misma cuestión pudiendo repetirse las cifras. La misma cuestión no repitiendo las cifras del primero pero sí las del segundo.
69. Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 ¿cuántos números distintos de cinco cifras se pueden formar con la condición de que entren todos y de que el 3 ocupe siempre la cifra de las centenas?
70. Halla la suma de todas las posibles combinaciones que pueden hacerse con 10 letras tomadas de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, ..., de ocho en ocho y de nueve en nueve.



# PROBABILIDAD



$$P[A] = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$



## EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

### Pregunta 1

Se hace una quiniela con un dado para hacer quinielas que lleva en sus caras tres veces el 1, dos veces la X y una vez el 2. Calcula la probabilidad de que salga una X o un 2.

### Pregunta 2

En una urna hay 3 bolas blancas, 2 rojas y 4 azules. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar, salga roja.

### **Pregunta 3**

Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas, y se consideran los siguientes sucesos:  $A =$  "obtener una de oros",  $B =$  "obtener una sota" y  $C =$  "obtener un tres". Di si son compatibles o incompatibles estos tres sucesos. ¿Por qué?

### **Pregunta 4**

Un dado está trucado para que el 6 tenga una probabilidad de salir de 0,25. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un 6?



### **Pregunta 5**

En el lanzamiento de un dado, consideramos los sucesos  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{2, 4, 6\}$ . Halla el suceso unión de  $A$  y  $B$  y el suceso intersección de  $A$  y  $B$ .

### **Pregunta 6**

Se lanza 100 veces un dado y se obtiene:

Cara	1	2	3	4	5	6
Frecuencia absoluta	12	17	18	16	18	19

Calcula la frecuencia relativa del suceso "obtener múltiplo de 3".

### **Pregunta 7**

Se lanza dos veces un dado. Representamos el espacio muestral de la siguiente forma:  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (6, 6)\}$  donde en cada pareja el primer número representa lo que se obtiene en la primera tirada y el segundo en la segunda. Sean los sucesos:  $A =$  "la suma de las dos tiradas es 7" y  $B =$  "el primer número es par".

Calcula la probabilidad de  $A \cup B$ .

### **Pregunta 8**

Se lanza una moneda dos veces. Si consideramos los sucesos  $A =$  "obtener lo mismo en las dos tiradas",  $B =$  "la primera vez sale cara" y  $C =$  "obtener al menos una cruz".

Halla los sucesos:

$$A \cup B, A \cap B, B \cup C \text{ y } B \cap C$$

### **Pregunta 9**

Se lanza 100 veces un dado y se obtiene:

Cara	1	2	3	4	5	6
Frecuencia absoluta	12	17	18	16	18	19

Calcula la frecuencia relativa de los siguientes sucesos:

a)  $A =$  Salir par.

b)  $B =$  No salir par.



**Pregunta 10**

En el lanzamiento de un dado, consideramos los sucesos  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{2, 4, 6\}$ . Halla la probabilidad del suceso unión de  $A$  y  $B$ .

**Pregunta 11**

Calcula la probabilidad de aprobar un examen de matemáticas si se sabe que hay una probabilidad de 0,4 de no aprobar.

**Pregunta 12**

Se lanza dos veces un dado. Representamos el espacio muestral de la siguiente forma:  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (6, 6)\}$  donde en cada pareja el primer número representa lo que se obtiene en la primera tirada y el segundo en la segunda. Sean los sucesos:  $A =$  "obtener primero un 4 y después un 3" =  $(4, 3)$ ,  $B =$  "la suma de las dos tiradas es 7",  $C =$  "el primer número es par" y  $D =$  "obtener el mismo número en las dos tiradas".

Halla los siguientes sucesos:

$$A \cup B, B \cap C, A \cup D, C \cap D \text{ y } B \cap D$$

**Pregunta 13**

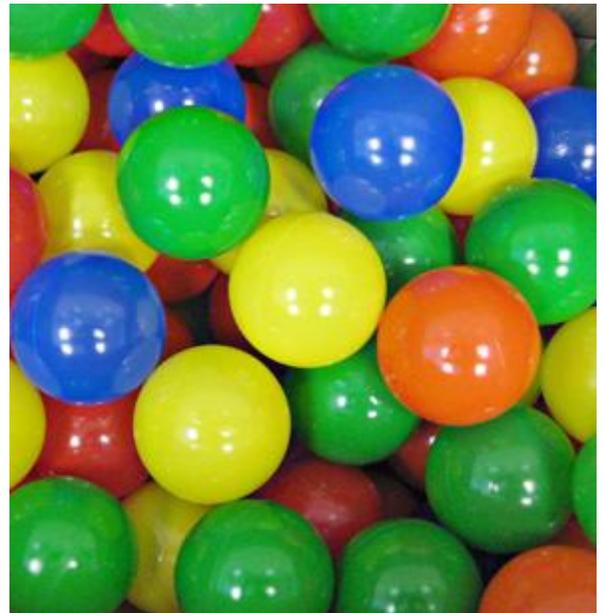
Una urna contiene 3 bolas blancas ( $B$ ), 2 rojas ( $R$ ) y 1 amarilla ( $A$ ). Se extrae una bola al azar. Indica cuáles son los sucesos elementales, el suceso seguro y el suceso imposible.

**Pregunta 14**

En el lanzamiento de un dado, consideramos los sucesos  $A = \{2, 3\}$  y  $B = \{2, 4, 6\}$ . Halla el suceso unión de  $A$  y  $B$  y el suceso intersección de  $A$  y  $B$ .

**Pregunta 15**

¿Cuál es el espacio muestral del experimento "suma de los puntos obtenidos al lanzar dos dados"?



# PROBABILIDAD II

## MÁS EJERCICIOS

- Disponemos de una urna que contiene 9 bolas numeradas del 0 al 8 y extraemos una. Definimos los siguientes sucesos:  
A = "Sacar múltiplo de 3" B = "Sacar número par" C = "Sacar número menor que 3"  
a) Indica cuál es el espacio muestral del experimento.  
b) Indica qué elementos del espacio muestral forman parte de A; B;  $A \cap B$ ;  $A \cup B$ ;  $\bar{A}$ ;  $\bar{B}$ .  
c) Estudia si los sucesos A, B y C son compatibles (se realizan comparaciones por parejas).
- Si extraes una carta de una baraja española, calcula la probabilidad de que:  
a) Sea un rey b) Sea un oro c) Sea el rey de oros d) Sea un rey o un oro  
e) Sea una espada mayor que 4.
- En una academia de idiomas, se sabe que el 68% de los alumnos estudian inglés, el 36% estudian francés y el 24% estudian inglés y francés. Se escoge un alumno al azar. Calcula la probabilidad de que el alumno seleccionado: a) Estudie inglés o francés b) Estudie sólo inglés
- Los resultados obtenidos en el recuento de votos de una mesa electoral son los siguientes: 25 votos para el partido A, 20 votos para el partido B, y 140 para el partido C. Se sacan dos papeletas de forma consecutiva y sin reemplazamiento  
a) Espacio muestral.  
b) Representa el problema mediante un diagrama en árbol.  
c) ¿Cuál es la probabilidad de coger dos papeletas que sean del partido A?  
d) Resuelve el apartado c), si el problema se realiza con reemplazamiento.
- En la urna A hay 5 bolas azules y 3 rojas y en la urna B hay 7 azules y 4 rojas. Inicialmente se lanza una moneda, si sale cara se saca bola de la urna A y si sale cruz de la urna B.  
a) Representa la situación mediante un diagrama en árbol.  
b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar bola roja?
- El alumnado que ingresa en bachillerato puede elegir entre las modalidades: "Humanidades y Ciencias sociales" y "Ciencias y Tecnología". 300 alumnos/as han rellenado el impreso de matrícula, 110 optaron por humanidades de los que 20 eran chicos y 80 chicas eligieron Ciencias y Tecnología.  
Se escoge al azar un alumno/a. Halla la probabilidad de que: a) Sea una chica; b) Sea alguien que eligió Ciencias y Tecnología; c) Sea un chico de Humanidades y Ciencias Sociales; d) Sabiendo que es un chico, haya elegido Humanidades y CCSS; e) Sabiendo que ha elegido Ciencias y Tecnología, sea una chica.

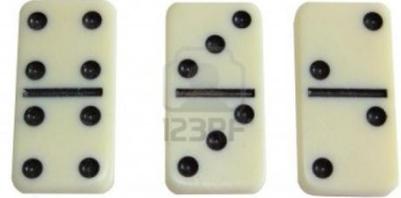


7. En una fiesta hay 34 personas de las que 21 son mujeres y el resto hombres. Sabemos que 8 de los hombres llevan traje negro y 10 de las mujeres traje blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una persona sea mujer y vaya vestida de blanco?

8. Elegimos al azar una ficha de un juego de dominó. a) Escribe el espacio muestral.

Calcula la probabilidad de:

b) Obtener doble c) Sumar los puntos de la ficha y que el resultado sea 7



9. Lanzamos un dado y definimos los siguientes sucesos:

A = "Sacar múltiplo de 4" B = "Sacar número impar"

C = "Sacar número mayor que 2"

a) Indica qué elementos del espacio muestral forman parte de A; B;  $A \cap B$ ;  $A \cup B$ ;  $\bar{A}$ ;  $\bar{B}$ .

b) Estudia si los sucesos A, B y C son incompatibles (se realizan comparaciones por parejas).

10. En una bolsa hay 7 bolas numeradas del 1 al 7 y se extraen dos bolas al mismo tiempo.

a) Describe el espacio muestral.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan números impares?

c) ¿Y de que ambos números sean pares?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las bolas sea el 4?

11. El próximo lunes hay un examen de Matemáticas para el que se han dado siete temas. El profe elegirá preguntas sólo sobre dos temas.

a) ¿Cuál es el espacio muestral de la elección anterior?

b) Si Clara sólo ha estudiado cuatro temas, ¿qué probabilidad tiene de haber estudiado todas las preguntas que salgan en el examen?

12. En un grupo de 1º Bachiller la probabilidad de ser aficionado al baloncesto es 0.25 y la de ser aficionado al fútbol 0.4. La probabilidad de ser aficionado a ambos deportes es 0.1. ¿Qué probabilidad hay de no ser aficionado a ninguno de los dos?

13. De una baraja española se sacan de forma consecutiva dos cartas (resuelve este problema con devolución y sin devolución). Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos cartas sean de bastos.

b) La primera sea una figura y la segunda de oros.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$


---


$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

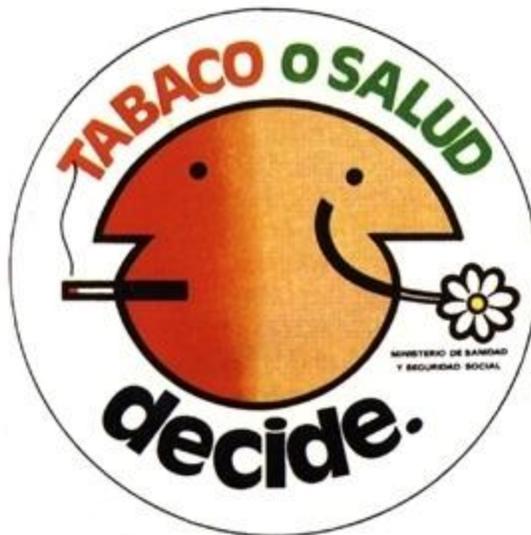
14. En un campeonato deportivo de estudiantes el 50% estudian en bachillerato, el 30% hacen un ciclo y el 20% estudian ESO. En el primer grupo el 78% son de La Palma, en el segundo el 56% también son de La Palma y en el tercer grupo el 7% son de otras islas. Se elige un deportista al azar.
- Representa la situación mediante un diagrama en árbol.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de La Palma?
  -

15. En un centro hay 1000 alumnos repartidos como indica la tabla:  
Se elige al azar uno de ellos, halla la probabilidad de:

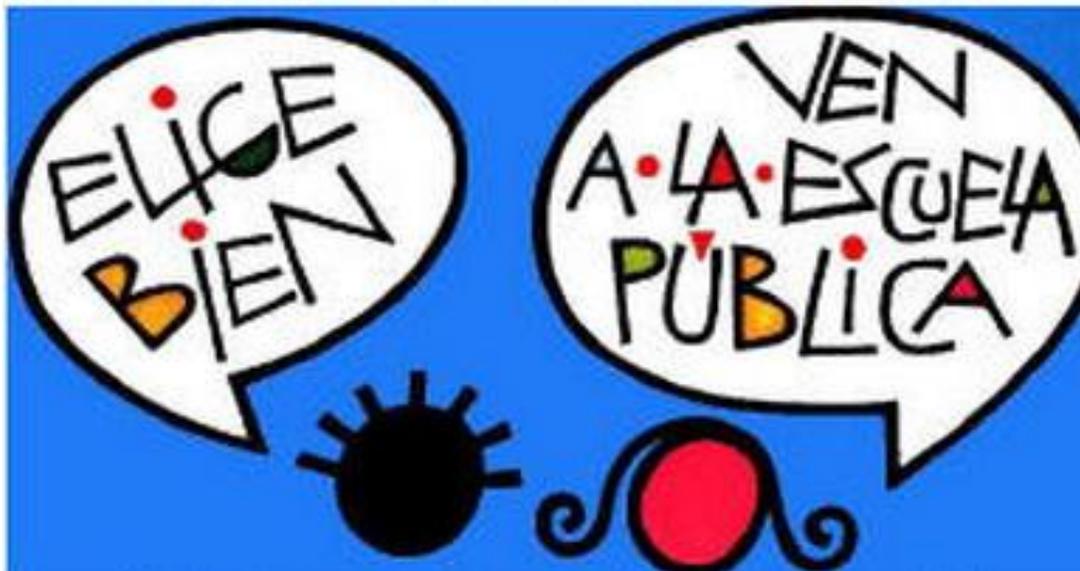
- Que sea chico
- Que sea chica
- Que use gafas
- Que no use gafas
- Que sea chico con gafas
- Sabiendo que usa gafas, que sea chico
- Sabiendo que es chica, que no use gafas.

	Chicos	Chicas
Usan gafas	187	113
No usan gafas	413	287

16. Se estudia en un grupo de 80 personas el consumo de tabaco y refrescos. Se sabe que 63 personas no consumen refrescos, que 52 no fuman y que entre las que fuman, 5 también consumen refrescos. Se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de:
- Que sea fumadora pero no consuma refrescos.
  - Que sea no fumadora.
  - Sabiendo que es fumadora, no consuma refrescos.
  - Sabiendo que consume refrescos, sí sea fumadora.



Hoy más que nunca,  
¡Escuela Pública!



*Junio 2013*