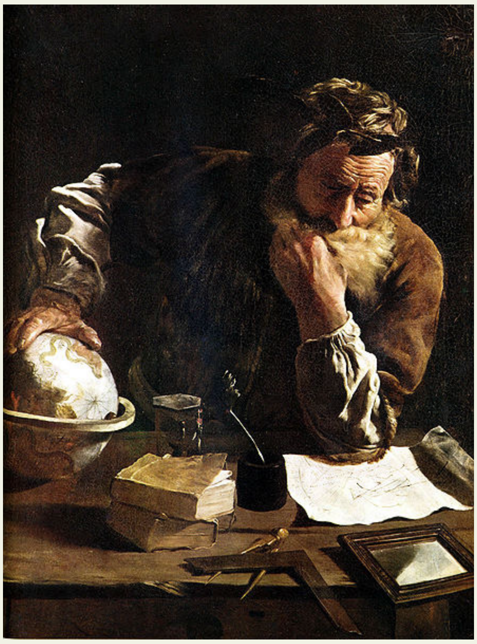
UNIDAD

10 La integral

La integración y la derivación son las más potentes herramientas de las que jamás hayan dispuesto las ciencias, tanto naturales como sociales, y las ingenierías, para la resolución de infinidad de problemas. Ambas están englobadas en lo que se conoce como Cálculo Infinitesimal, Cálculo o Análisis matemático. Algunos autores sostienen que lo comienza Arquímedes de Siracusa (*c.* 287 a. C. – *c.* 212 a. C.), con la intención de obtener un método para el cálculo de cualquier área. Sin embargo, como en el resto de la materia del Análisis que hemos visto, hubo que esperar al siglo XIX para encontrarle una justificación rigurosa: la noción actual de integral de una función continua es obra del matemático alemán G. F. B. Riemann (1826 – 1866).



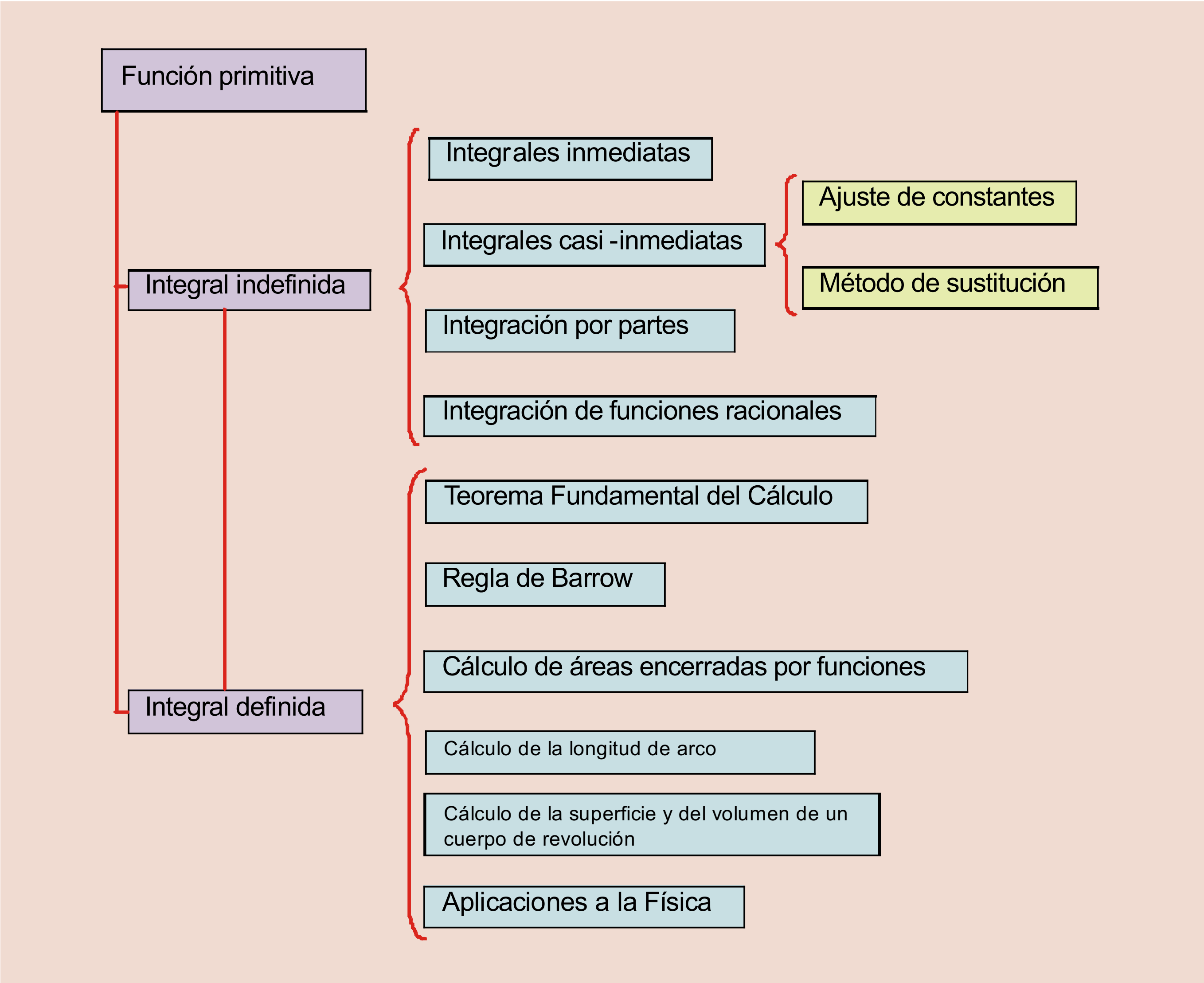
• *Arquímedes de Siracusa.*
(Wikipedia.org. Dominio público)

Alteramos el desarrollo histórico con fines didácticos. En primer lugar introducimos el concepto de función primitiva y lo usamos para hacer aparecer la integral indefinida como operación inversa a la derivada. Es muy importante que aprendas los rudimentos de la integración y que seas capaz de resolver con soltura integrales inmediatas, a partir de la tabla de dichas integrales y casi-inmediatas, bien por ajuste directo de constantes, bien usando el método de sustitución. Aparecen después el método de integración por partes y la integración de funciones racionales. Con todo ello se adquieren notables conocimientos del cálculo integral, que permiten enfrentarse con éxito a su posible ampliación.

Si el cálculo del área hizo aparecer la integral, tenemos que estudiar de dónde surge la idea y cómo la relacionamos con el área. Aparecen la integral definida, el teorema fundamental del cálculo y la Regla de Barrow. En este punto, hemos de mostrar que, aunque la integral se invente como herramienta para el cálculo de áreas, hay que distinguir entre dicho cálculo y la integral definida. Una vez aclarada la diferencia, abordamos el cálculo del área encerrada por una función y el eje *OX*, y también el cálculo del área encerrada por dos o más funciones.

A partir de lo señalado, esta Unidad tiene como **objetivos** los siguientes:

1. Calcular la función primitiva de una función.
2. Calcular integrales inmediatas y casi-inmediatas.
3. Calcular integrales por los métodos de sustitución e integración por partes.
4. Calcular integrales de funciones racionales sencillas.
5. Calcular integrales definidas.
6. Calcular áreas encerradas por funciones.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INTEGRAL INDEFINIDA **254**
1.1. Función primitiva 254
1.2. Integral indefinida 255
1.3. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas 256
2. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN **257**
2.1. Integración por sustitución o cambio de variable 257
2.2. Integración por partes 262
2.3. Integrales racionales sencillas 264
3. INTEGRAL DEFINIDA Y SUS APLICACIONES **268**
3.1. Integral definida 268
3.2. Teorema fundamental del Cálculo. Regla de Barrow. Derivada de una integral. Cálculo de integrales definidas 270
3.3. Cálculo de áreas 275
3.4. Aplicaciones de la integral en la Física 282

1. Integral indefinida

1.1. Función primitiva

Se dice que **F** es una **función primitiva** o **primitiva de f** si $F'(x) = f(x)$**.** Por lo tanto, intentamos reconstruir una función F a partir del conocimiento de su derivada f.

Por ejemplo, como $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = x \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ es una primitiva de $f(x) = x$. También $(\text{sen}\, x)' = \cos x \Rightarrow$ $F(x) = \text{sen}\, x$ es una primitiva de $f(x) = \cos x$. Observa que hay que retroceder usando como guía las reglas de la derivación.

Un hecho importante es que la primitiva no es única, pues si sumamos una constante cualquiera a la primitiva, la nueva primitiva sigue siendo primitiva de la misma función: $\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)' = x\,;\left(senx - 7\right)' = \cos x$. Por ello hay que escribir siempre $F(x) + k$, $k \in R$, donde k designa a la constante. Esta constante tiene distintas interpretaciones y toma diferentes valores, dependiendo del contexto en el que aparezca la primitiva.

La siguiente tabla muestra las primitivas que se obtienen directamente:

Función	Primitiva
x^n, $n \in R - \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\cos x$	$\text{sen}\, x$
$\text{sen}\, x$	$-\cos x$
e^x	e^x
$1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg}\, x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sen}\, x$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc cos}\, x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tg}\, x$

La primera primitiva es el resultado de la regla $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$: la derivada baja el grado en una unidad; al retroceder hay que sumar uno y, como el exponente multiplica al derivar, hay que dividir por él: $\left(x^3\right)' = 3x^2 \Rightarrow x^2 = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)'$.

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2/3}\right)'.$$

Esta fórmula sirve también para exponentes negativos y fraccionarios, salvo para $n = -1$. Si intentas aplicársela queda como primitiva $\frac{x^0}{0}$, que no es válida. En este caso $f(x) = \frac{1}{x}$, que procede de derivar $F(x) = ln\,|x|$. Es necesario el valor absoluto porque

$$\ln\lvert x\rvert = \begin{cases} \ln(-x),\ si\ x<0 \\ \ln x,\ si\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0.$$

Las otras primitivas son una aplicación directa de la derivada de las funciones conocidas. Hay que hacer notar la similitud entre las primitivas de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y de $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. Podríamos escribir también $-\text{arc cos}\, x$ y $-\text{arc sen}\, x$, respectivamente, aunque mantendremos los resultados escritos en la tabla anterior.

1.2. Integral indefinida

Usando la idea de función primitiva, definimos la integración como la inversa de la derivación: la integral deshace lo que la derivada hace y viceversa (ver gráfico). Al no ser la primitiva única, se vuelve a una familia de funciones que difieren en una constante, no a la función de partida.

$$\frac{x^2}{2} \underset{\text{Integral}}{\overset{\text{Derivada}}{\rightleftarrows}} x$$

Aunque en el gráfico hemos representado la **integral indefinida** con I, en la práctica se usa el símbolo $\int$, que semeja una S alargada. Escribimos la integral como $\int f = F + k$ ó $\int f(x)dx = F(x) + k$. El término dx (que se lee *diferencial de* x) indica únicamente cuál es la variable respecto de la que integramos; procede de la notación de Leibniz $\left(f'(x) = \frac{df}{dx} \right)$. Esta segunda notación, más antigua, es la que usaremos, pues tiene ventajas a la hora de enfrentarse a integrales complicadas. Todo lo que aparece bajo el símbolo $\int$, salvo el diferencial, se denomina integrando. No podemos quitar este símbolo hasta que no demos la primitiva del integrando.

Hay una **tabla de integrales inmediatas**, que consiste en la tabla de primitivas rescrita con la notación para las integrales. Hay que aprendérsela de memoria:

Integrales inmediatas	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, n \in R - \{-1\}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int senx \cdot dx = -\cos x + k$
$\int (1 + tg^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + k$	$\int \cos x \cdot dx = senx + k$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sen\ x + k = -arc\cos x + k$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x + k$

Ejemplo

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int dx = x + k.$

b) $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + k = \frac{x^3}{3} + k.$

c) $\int x^9 dx = \frac{x^{9+1}}{9+1} + k = \frac{x^{10}}{10} + k.$

d) $\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + k = \frac{x^{-4}}{-4} + k = -\frac{1}{4x^4} + k.$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} = \int x^{-\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + k = \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + k = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + k.$

f) $\int \sqrt[7]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{7}} dx = \frac{x^{\frac{2}{7}+1}}{\frac{2}{7}+1} + k = \frac{7}{9} x^{\frac{9}{7}} + k = \frac{7}{9}\sqrt[7]{x^9} + k.$

Hay que escribir los radicales como potencias fraccionarias y las x del denominador como potencias negativas. Derivando la primitiva comprobamos que la integral está bien resuelta.

1.3. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas

Las **propiedades de linealidad** sirven para calcular integrales más complicadas, haciendo las veces del álgebra de derivadas. Sólo hay dos:

- $\int (f+g) = \int f + \int g \equiv$ La integral de una suma es igual a la suma de las integrales.
- $\int (\lambda f) = \lambda \int f, \lambda \in R \equiv$ La integral del producto de una constante λ por una función es igual a la constante por la integral de la función.

Estas propiedades suelen abreviarse escribiendo $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$. Es decir, sacamos las constantes multiplicativas e integramos las funciones. Observa que son las propiedades recíprocas a las derivadas de una suma de funciones y del producto de una constante por una función. Sólo se escribe una constante k en la primitiva.

Ejemplo

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (x^2+x)dx = \int x^2dx + \int xdx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k.$

b) $\int 5\cos x \cdot dx = 5\int \cos x \cdot dx = 5senx + k.$

c) $\int \frac{dx}{8x} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{8}\ln|x| + k.$

d) $\int \frac{7}{x^3}dx = 7\int x^{-3}dx = 7\frac{x^{-2}}{-2} + k = -\frac{7}{2x^2} + k.$

e) $\int \frac{\sqrt[8]{x^3}}{11}dx = \frac{1}{11}\int x^{\frac{3}{8}}dx = \frac{1}{11}\frac{x^{\frac{11}{8}}}{\frac{11}{8}} + k = \frac{8}{121}\sqrt[8]{x^{11}} + k.$

f) $\int \left(6e^x + \frac{7}{x}\right)dx = \int 6e^xdx + \int \frac{7}{x}dx = 6\int e^xdx + 7\int \frac{dx}{x} = 6e^x + 7\ln|x| + k.$

g) $\int \left(\frac{3}{1+x^2} + 1\right)dx = \int \frac{3}{1+x^2}dx + \int dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}dx + x + k = 3arc\ tg\ x + x + k.$

Se calcula la integral directamente, sin escribir detalladamente la propiedad:

h) $\int \left(3x^5 - \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{9}{\cos^2 x}\right)dx = \frac{x^6}{2} + 7arc\cos x + 9tgx + k.$

i) $\int \left(8e^x - \frac{5}{3x} + \frac{2}{x^4}\right)dx = 8e^x - \frac{5}{3}\ln|x| - \frac{2}{3x^3} + k.$

j) $\int \left(2senx + \frac{11}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{5}{x^2}\right)dx = -2\cos x + 11arc\ sen\ x + \frac{5}{x} + k.$

Actividades

1. Calcula: **a)** $\int \left(x^3+4x^2+7\sqrt[5]{x^3}\right)dx$; **b)** $\int \left(-x^2+9x+1\right)dx$.
2. Halla: **a)** $\int \left(3-\frac{2}{3x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}-\frac{6}{x^3}\right)dx$; **b)** $\int \left(\frac{5}{1+x^2}-7\cos x+9e^x-\frac{8}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.
3. Averigua: **a)** $\int \left(\frac{7}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sqrt[8]{x^7}}-\frac{2}{x^7}\right)dx$; **b)** $\int \left(3x^3-7x^2+8x-4\right)dx$.
4. Calcula: **a)** $\int \left(9\sqrt[5]{x^2}+5senx+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; **b)** $\int \left(8e^x-\frac{5}{x}+9x+6\right)dx$.
5. Halla: **a)** $\int \left(6+6tg^2x-5\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)dx$; **b)** $\int \left(\frac{3}{7\sqrt{x}}+\frac{4}{x^5}-3senx\right)dx$.

2. Métodos de integración

2.1. Integración por sustitución o cambio de variable

Se habla de **integrales casi-inmediatas** cuando la función que debemos integrar puede convertirse de forma sencilla en una integral inmediata. Podemos distinguir dos tipos:

- Un primer tipo en el que efectuando las operaciones indicadas (sumas, restas, productos, divisiones …) pasamos a tener integrales inmediatas.
- Un segundo tipo en el que habitualmente se reconoce la derivación siguiendo la regla de la cadena, es decir, aparece una función y su derivada, salvo constantes que multiplican.

Ejemplos

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(3x^2-5x\right)\left(x^3+2x\right)dx=\int \left(3x^5-5x^4+6x^3-10x^2\right)dx=\frac{x^6}{2}-x^5+\frac{3x^4}{2}-\frac{10x^3}{3}+k.$

b) $\int \frac{2x^4-5x^2+1}{x^2}dx=\int \left(2x^2-5+\frac{1}{x^2}\right)dx=2\frac{x^3}{3}-5x+\frac{x^{-1}}{-1}+k=\frac{2x^3}{3}-5x-\frac{1}{x}+k.$

c) $\int \frac{4x^2+3x-7}{2\sqrt{x}}dx=\int \left(2x^{3/2}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{7}{2}x^{-1/2}\right)dx=\frac{4\sqrt{x^5}}{5}+\sqrt{x^3}-7\sqrt{x}+k.$

Al efectuar los productos y cocientes, se obtienen integrales inmediatas.

4. Calcula: **a)** $\int e^{7x}dx$; **b)** $\int 5\cos 4x dx$; **c)** $\int \frac{7x}{x^2+1}dx$; **d)** $\int 3x\left(x^2-7\right)^5dx$; **e)** $\int tg^2 x dx$.

Solución :

a) $\left(e^{7x}\right)' = 7e^{7x}$: hay que multiplicar por 7 para que sea inmediata. Para no cambiar el valor, si multiplicamos por 7 dividimos también por 7: $\int e^{7x}dx = \frac{1}{7}\int 7e^{7x}dx = \frac{1}{7}e^{7x} + k$.

b) $\left(sen4x\right)' = 4\cos 4x$: falta multiplicar por 4. Como antes, multiplicamos y dividimos por un mismo número:

$\int 5\cos 4xdx = \frac{5}{4}\int 4\cos 4xdx = \frac{5}{4}sen4x + k$.

c) $\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' = \frac{2x}{x^2+1}$: falta multiplicar por 2. Se multiplica y se divide por 2: $\int \frac{7x}{x^2+1}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$

$= \frac{7}{2}\ln\left(x^2+1\right) + k$. No es necesario el valor absoluto para el argumento del neperiano, porque siempre es positivo.

d) $\left(\left(x^2-7\right)^6\right)' = 12x\left(x^2-7\right)^5$: falta multiplicar por 12. Se multiplica y se divide por 12:

$\int 3x\left(x^2-7\right)^5 dx = \frac{3}{12}\int 12x\left(x^2-7\right)^5 dx = \frac{1}{4}\left(x^2-7\right)^6 + k$.

e) Este es un ejemplo de idea feliz: como $\left(tgx\right)' = 1+tg^2x$, falta un 1 sumando en el integrando para que sea inmediata. Pues se lo sumamos y, para no cambiar el valor, se lo restamos: $\int tg^2xdx = \int\left(1+tg^2x-1\right)dx =$

$= \int\left(1+tg^2x\right)dx - \int dx = tgx - x + k$

Fíjate en que hemos de tener cierta idea sobre la posible primitiva. Además, conforme se complica el integrando, el ajuste de constantes se vuelve más difícil. Por esta razón se usa el **método de sustitución** o de **cambio de variable**, que consiste en cambiarle el nombre a la función cuya derivada aparece, de modo que tras dicho cambio quede una integral inmediata. También hay que cambiar el diferencial: si hacemos $z = f\left(x\right)$ entonces $z' = \frac{dz}{dx} \Rightarrow$ $dz = z'dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{z'}$. El cambio de variable lo escribimos simbólicamente como: $\left\{\begin{matrix} f \longrightarrow z \\ dx \longrightarrow \frac{dz}{z'} \end{matrix}\right\}$. Al hacerlo, debe desaparecer la variable *x*, quedando una integral inmediata en *z*, que se integra tal y como hemos hecho con las de *x*. Al final, se deshace el cambio, volviendo a la variable original.

Ejemplos

5. Calcula: **a)** $\int 8x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}dx$; **b)** $\int 7xe^{3x^2-5}dx$.

Solución:

a) $\left(1-x^2\right)' = -2x \propto x \Rightarrow z = 1-x^2 \Rightarrow \int 8x\sqrt[3]{1-x^2}dx = \left\{\begin{matrix} z = 1-x^2 \Rightarrow z' = -2x \\ dx = \frac{dz}{-2x} \end{matrix}\right\} = \int 8x\cdot z^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{dz}{-2x} =$

$= -4\int z^{\frac{1}{3}}dz = -3z^{\frac{4}{3}} + k = -3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^4} + k$.

El símbolo $\propto$ se usa para indicar la proporcionalidad. Fíjate en que, al hacer el cambio, en z sólo va la función, no el exponente, que ya pondremos después.

b) $\left(e^{3x^2-5}\right)' = 6xe^{3x^2-5} \propto xe^{3x^2-5} \Rightarrow z = e^{3x^2-5} \Rightarrow \int 7xe^{3x^2-5}dx = \left\{\begin{matrix} z = e^{3x^2-5} \Rightarrow z' = 6xe^{3x^2-5} \\ dx = \dfrac{dz}{6xe^{3x^2-5}} = \dfrac{dz}{6xz} \end{matrix}\right\} = \int 7xz\dfrac{dz}{6xz} = \dfrac{7}{6}\int dz =$

$= \dfrac{7}{6}z + k = \dfrac{7}{6}e^{3x^2-5} + k.$

6. Calcula: **a)** $\int 6x^2\left(3x^3+2\right)^2 dx$; **b)** $\int \dfrac{\ln x}{x}dx.$

Solución :

a) $\left(3x^3+2\right)' = 9x^2 \propto x^2 \Rightarrow z = 3x^3+2 \Rightarrow \int 6x^2\left(3x^3+2\right)^2 dx = \left\{\begin{matrix} z = 3x^3+2 \Rightarrow z' = 9x^2 \\ dx = \dfrac{dz}{9x^2} \end{matrix}\right\} =$

$= \int 6x^2 \cdot z^2 \cdot \dfrac{dz}{9x^2} = \dfrac{2}{3}\int z^2 dz = \dfrac{2z^3}{9} + k = \dfrac{2\left(3x^3+2\right)^3}{9} + k.$

b) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x} \Rightarrow z = \ln x \Rightarrow \int \dfrac{\ln x}{x}dx = \left\{\begin{matrix} z = \ln x \Rightarrow z' = \dfrac{1}{x} \\ dx = \dfrac{dz}{\frac{1}{x}} = xdz \end{matrix}\right\} = \int \dfrac{z}{x}xdz = \int zdz = \dfrac{z^2}{2} + k = \dfrac{\left(\ln x\right)^2}{2} + k$. No puede escribirse el valor absoluto del argumento, pues el integrando sólo existe para los valores de x positivos.

7. Calcula: **a)** $\int \dfrac{4}{1+3x}dx$; **b)** $\int \dfrac{-5x}{4+7x^2}dx.$

Solución:

a) $\left(1+3x\right)' = 3 \propto k; z = 1+3x \Rightarrow \int \dfrac{4}{1+3x}dx = \left\{\begin{matrix} z = 1+3x \Rightarrow z' = 3 \\ dx = \dfrac{dz}{3} \end{matrix}\right\} = \int \dfrac{4}{z}\dfrac{dz}{3} = \dfrac{4}{3}\int \dfrac{dz}{z} = \dfrac{4}{3}\ln|z| + k = \dfrac{4}{3}\ln|1+3x| + k.$

b) $\left(4+7x^2\right)' = 17x \propto x \Rightarrow z = 4+7x^2 \Rightarrow \int \dfrac{-5x}{4+7x^2}dx = \left\{\begin{matrix} z = 4+7x^2 \Rightarrow z' = 14x \\ dx = \dfrac{dz}{14x} \end{matrix}\right\} = \int \dfrac{-5x}{z}\dfrac{dz}{14x} = -\dfrac{5}{14}\int \dfrac{dz}{z} =$

$= -\dfrac{5}{14}\ln z + k = -\dfrac{5}{14}\ln\left(4+7x^2\right) + k.$ No es necesario el valor absoluto para el argumento del neperiano, porque siempre es positivo.

Los ejemplos anteriores se pueden hacer ajustando constantes y sería conveniente que así fuera para adquirir agilidad en el cálculo de primitivas. Observa que el **5 b)** responde a $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$ y el **7** a $\left(\ln|f(x)|\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}.$

El **7** se generaliza como: $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \ln|ax+b| + k$. Este resultado se usa para integrar funciones racionales.

A veces hay que operar en el integrando, incluso después de haber hecho el cambio.

8. Calcula: **a)** $\int \frac{7}{5+3x^2}dx$; **b)** $\int \frac{3+2\ln x}{5x\ln x}dx$.

Solución:

a) Se parece a un arco tangente. Hay que llevar a que el denominador sea $1+z^2$:

$5+3x^2 = 5\left(1+\frac{3x^2}{5}\right) = 5\left(1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2\right) \Rightarrow \int \frac{7dx}{5+3x^2} = \frac{7}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2}$. Ahora podemos hacer el cambio $z=\sqrt{\frac{3}{5}}x$ o ajustar constantes. En ambos casos queda $\frac{7}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}arc\,tg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)+k = \frac{7\sqrt{15}}{15}arc\,tg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)+k$.

b) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow z=\ln x \Rightarrow \int \frac{3+2\ln x}{5x\ln x}dx = \left\{\begin{matrix} z=\ln x \Rightarrow z'=\frac{1}{x} \\ dx=\frac{dz}{1/x}=xdz \end{matrix}\right\} = \int \frac{3+2z}{5xz}xdz = \int \frac{3}{5z}dz+\frac{2}{5}\int dz =$

$= \frac{3}{5}\ln z+\frac{2}{5}z+k = \frac{3}{5}\ln(\ln x)+\frac{2}{5}\ln x+k$. No puede escribirse el valor absoluto del argumento, pues el integrando sólo existe para los valores de x positivos.

9. Calcula: **a)** $\int sen^2 x\cos x dx$; **b)** $\int sen^3 xdx$; **c)** $\int \cos^5 xdx$.

Solución:

a) $\left\{\begin{matrix} z=senx \Rightarrow z'=\cos x \\ dx=\frac{dz}{z'}=\frac{dz}{\cos x} \end{matrix}\right\} = \int z^2\cos x\frac{dz}{\cos x} = \int z^2dz = \frac{z^3}{3}+k = \frac{1}{3}sen^3x+k$.

b) $\int sen^3 xdx = \int sen^2 xsenxdx = \int\left(1-\cos^2 x\right)senxdx = \int senxdx - \int \cos^2 xsenxdx = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+k$.

Observa que tenemos la fórmula $\left(\left[f(x)\right]^n\right)' = n\left[f(x)\right]^{n-1}\cdot f'(x)$ (la función elevada a una potencia multiplicada por su derivada). Por ello, $\int sen^5 x\cos xdx = \frac{1}{6}sen^6 x+k$, $\int \cos^7 xsenxdx = -\frac{1}{8}\cos^8 x+k$.

Cuando el exponente de la razón trigonométrica es impar ($2n+1$), se descompone en el producto de la razón elevada a par ($2n$) por la razón. Así, todas son inmediatas, sin más que seguir la pauta del presente ejemplo.

c) $\int \cos^5 xdx = \int \cos^4 x\cos xdx = \int\left(1-sen^2 x\right)^2\cos xdx = \int\left(1-2sen^2x+sen^4x\right)\cos xdx =$

$= \int \cos xdx - 2\int sen^2 x\cos xdx + \int sen^4 x\cos xdx = senx-\frac{2}{3}sen^3x+\frac{1}{5}sen^5x+k$.

10. Calcula: **a)** $\int sen^4 xdx$; **b)** $\int \cos^6 xdx$.

Solución:

a) Aquí no sirve el método anterior. Ahora hay que quitar el exponente recurriendo al ángulo doble:

$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. En este caso:

$\int sen^4 xdx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx$. Volvemos a aplicar la fórmula, teniendo en cuenta que cada vez que la usemos tenemos que duplicar el ángulo de partida.

$\int \cos^2 2xdx = \int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}sen4x$. La integral queda:

$\int sen^4 xdx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}sen4x + k = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + k.$

Dado que la integral de partida ni lleva ángulos dobles ni cuádruples, debemos operar para que la primitiva quede en función de x: $sen2x = 2senx\cos x$, $sen4x = 2sen2x\cos 2x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $sen^2 x = 1-\cos^2 x$.

Se obtiene: $\int sen^4 xdx = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}senx\cos x - \frac{1}{4}sen^3 x\cos x + k.$

b) $\int \cos^6 xdx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int\left(1+3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x\right)dx$; $\int \cos^2 2xdx = \int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}sen4x$; $\int \cos^3 2xdx = \int \cos^2 2x\cos 2xdx = \int\left(1-sen^2 2x\right)\cos 2xdx = \int \cos 2xdx - \int sen^2 2x\cos 2xdx = \frac{1}{2}sen2x - \frac{1}{6}sen^3 2x$. La integral queda: $\int \cos^6 xdx = \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}sen2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}sen4x + \frac{1}{16}sen2x - \frac{1}{48}sen^3 2x + k.$

Igual que antes, se obtiene operando: $\int \cos^6 xdx = \frac{5}{16}x + \frac{5}{16}senx\cos x + \frac{5}{24}senx\cos^3 x + \frac{1}{6}senx\cos^5 x + k.$

11. Calcula: $\int \sqrt{1-x^2}dx.$

Solución:

En este tipo de integrales se usan las funciones trigonométricas seno o coseno:

$$\left\{\begin{matrix} x = sent \\ dx = \cos tdt\end{matrix}\right\} = \int \sqrt{1-sen^2 t}\cdot\cos t\cdot dt = \int \cos^2 tdt = \int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen2t + k.$$

Deshacemos el cambio $t = arc\ sen\ x \Rightarrow \int\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}arc\ senx + \frac{1}{2}sent\cos t + k = \frac{1}{2}arc\ senx + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k.$

12. Calcula: $\int \sqrt{3-7x^2}dx.$

Solución:

$$\int\sqrt{3-7x^2}dx = \sqrt{3}\int\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{7}{3}}x\right)^2}dx = \left\{\begin{matrix} \sqrt{\frac{7}{3}}x = sent \Rightarrow t = arc\ sen\left(\sqrt{\frac{7}{3}}x\right) \\ \sqrt{\frac{7}{3}}dx = \cos tdt \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{3}{7}}\cos tdt\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{7}}\int\cos^2 tdt = \frac{3}{2\sqrt{7}}\left(t + sent\cos t\right) + k = \frac{3}{2\sqrt{7}}arc\ sen\left(\sqrt{\frac{7}{3}}x\right) + \frac{x\sqrt{3-7x^2}}{2} + k.$$

2.2. Integración por partes

¿Cómo podremos integrar cuando hay un producto, pero una función no es la derivada de la otra? Recordemos que la derivada de un producto de funciones es $(u\cdot v)'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ o, usando los diferenciales y sobreentendiendo que tanto u como v son funciones de la variable x, $d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv$, por lo que $u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$ e integrando queda $\boxed{\int udv = u\cdot v-\int v\cdot du}$. Ésta es la fórmula habitual de lo que se conoce como **integración por partes**. El *quid* está en que la integral de la derecha sea más sencilla que la de la izquierda o directamente inmediata. Para ello, hay que elegir las funciones u y dv convenientemente. Como du se obtiene derivando y v integrando, la pauta habitual es elegir dv como una integral inmediata. Con u y dv tenemos que recoger todos los términos del integrando. Veamos los casos habituales:

Ejemplos

13. Calcula: **a)** $\int xe^x dx$; **b)** $\int \ln x dx$; **c)** $\int arc\ tgx dx$.

Solución :

a) Aquí se integran bien tanto x como e^x. Sin embargo, la primitiva de x es $\frac{x^2}{2}$, lo que nos complicaría la integral de la derecha. Por lo tanto, procederemos así:

$$\int xe^x dx=\left\{\begin{array}{l} u=x\Rightarrow du=u'\cdot dx=dx \\ dv=e^x dx\Rightarrow v=\int e^x dx=e^x\end{array}\right\}=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+k=(x-1)e^x+k.$$

b) En este caso sólo tenemos la posibilidad siguiente:

$$\int \ln x dx=\left\{\begin{array}{l} u=\ln x\Rightarrow du=u'\cdot dx=\frac{dx}{x} \\ dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x\end{array}\right\}=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+k=x(\ln x-1)+k.$$

c) Igual que en **b)**: $\int arc\ tgx dx=\left\{\begin{array}{l} u=arc\ tgx\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x\end{array}\right\}=x arc\ tgx-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x arc\ tgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+k.$

14. Calcula: **a)** $\int x^2e^{-x}dx$; **b)** $\int 3x^3\cos x dx$; **c)** $\int (arc\ senx)^2 dx$.

Solución :

a) $\int x^2e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l} u=x^2\Rightarrow du=2xdx \\ dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right\}=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$. La integral de la derecha también hay que resolverla por partes, pero no podemos llamar u a lo que antes llamamos dv, pues llegaríamos a que la integral es igual a ella misma. $\int xe^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right\}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}$;

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{x}-2xe^{-x}-2e^{x}+k=-(x^2+2x+2)e^{-x}+k.$$

b) $3\int x^3\cos x dx=\left\{\begin{array}{l} u=x^3\Rightarrow du=3x^2dx \\ dv=\cos x dx\Rightarrow v=senx\end{array}\right\}=3x^3senx-9\int x^2senxdx$;

$$\int x^2 senxdx = \begin{Bmatrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = senxdx \Rightarrow v = -\cos x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x \cos xdx;$$

$\int x \cos xdx = \begin{Bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos xdx \Rightarrow v = senx \end{Bmatrix} = xsenx - \int senxdx = xsenx + \cos x$. Agrupando adecuadamente los datos obtenidos se tiene que:

$$\int 3x^3 \cos xdx = 3x^3 senx + 9x^2 \cos x - 18xsenx - 18\cos x + k = 3x\left(x^2 - 6\right)senx + 9\left(x^2 - 2\right)\cos x + k.$$

c) $\int \left(arc\ senx\right)^2 dx = \begin{Bmatrix} u = \left(arc\ senx\right)^2 \Rightarrow du = \dfrac{2arc\ senx}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{Bmatrix} = x\left(arc\ senx\right)^2 - \int \dfrac{2xarc\ senx}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

$\int \dfrac{xarc\ senx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{Bmatrix} u = arc\ senx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{Bmatrix} = -\sqrt{1-x^2} \cdot arc\ senx + \int dx$. Queda:

$$\int \left(arc\ senx\right)^2 dx = x\left(arc\ senx\right)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot arc\ senx - 2x + k.$$

15. Calcula: **a)** $\int e^x senxdx$; **b)** $\int e^{4x} \cos 5xdx$; **c)** $\int e^{-2x} \cos 7xdx$.

Solución :

a) $\int e^x senxdx = \begin{Bmatrix} u = senx \Rightarrow du = \cos xdx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{Bmatrix} = e^x senx - \int e^x \cos xdx;$

$$\int e^x \cos xdx = \begin{Bmatrix} u = \cos x \Rightarrow du = -senxdx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{Bmatrix} = e^x \cos x + \int e^x senxdx.$$

¡Llegamos a la misma integral! No obstante, se resuelve sin problemas. Llamando $I = \int e^x senxdx$, se tiene que

$$I = e^x senx - e^x \cos x - I \Rightarrow 2I = e^x\left(senx - \cos x\right) \Rightarrow I = \frac{e^x\left(senx - \cos x\right)}{2} + k.$$

Estas integrales son cíclicas, pues las dos funciones, e^x y $senx$, se repiten al derivar.

b) $\int e^{4x} \cos 5xdx = \begin{Bmatrix} u = e^{4x} \Rightarrow du = 4e^{4x}dx \\ dv = \cos 5xdx \Rightarrow v = \dfrac{sen5x}{5} \end{Bmatrix} = \dfrac{e^{4x}sen5x}{5} - \dfrac{4}{5}\int e^{4x} sen5xdx;$

$\int e^{4x} sen5xdx = \begin{Bmatrix} u = e^{4x} \Rightarrow du = 4e^{4x}dx \\ dv = sen5xdx \Rightarrow v = -\dfrac{\cos 5x}{5} \end{Bmatrix} = -\dfrac{e^{4x}\cos 5x}{5} + \dfrac{4}{5}\int e^{4x} \cos 5xdx$. Llamamos

$I = \int e^{4x} \cos 5xdx$ y se tiene $I = \dfrac{e^{4x}sen5x}{5} + \dfrac{4e^{4x}\cos 5x}{25} - \dfrac{16}{25}I \Rightarrow \dfrac{41}{25}I = \dfrac{\left(5sen5x + 4\cos 5x\right)e^{4x}}{25} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{\left(5sen5x + 4\cos 5x\right)e^{4x}}{41} + k.$$

c) Como conocemos la estructura de la solución, podemos decir que $\int e^{-2x} \cos 7xdx = \left(Asen7x + B\cos 7x\right)e^{-2x}$.

Si derivamos ambos miembros tendremos: $e^{-2x} \cos 7x = e^{-2x}\left(7A\cos 7x - 7Bsen7x - 2Asen7x - 2B\cos 7x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 7A - 2B = 1 \\ 2A + 7B = 0 \end{Bmatrix}$. Resolviendo el sistema se obtiene $A = \dfrac{7}{53}, B = -\dfrac{2}{53} \Rightarrow I = \dfrac{\left(7sen7x - 2\cos 7x\right)e^{-2x}}{53} + k.$

Repite los apartados **a)** y **b)** usando este procedimiento.

2.3. Integrales racionales sencillas

Se habla de integrales de funciones racionales cuando el integrando es un cociente de polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$. Tienen una ventaja: hay un método que conduce al resultado. También un inconveniente: el cálculo puede ser muy pesado. Dependiendo de los resultados de la factorización del denominador, hay 5 posibilidades:

1. El denominador tiene raíces reales sencillas.
2. El denominador tiene raíces reales simples y múltiples.
3. El denominador tiene raíces complejas.
4. El denominador tiene raíces reales simples y complejas.
5. El denominador tiene raíces reales simples y múltiples, así como complejas.

El grado del numerador siempre ha de ser menor que el del denominador. Si no es así, se divide quedando $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$. Veamos con ejemplos cada uno de los casos:

Ejemplos

16. Calcula: **a)** $\int \frac{x-1}{x^3-4x}dx$; **b)** $\int \frac{6}{(x+1)(x-3)^2}dx$; **c)** Te ofrecemos este otro ejemplo para profundizar: $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$.

Solución:

a) En primer lugar resolvemos la ecuación $DEN(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 2$. Después planteamos la ecuación $\frac{x-1}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}$. Observa que $\int \frac{x-1}{x^3-4x}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x+2}dx + \int \frac{C}{x-2}dx =$ $= A\ln|x| + B\ln|x+2| + C\ln|x-2| + k$. La ecuación es $A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2) = x-1$.
Tenemos dos caminos: plantear y resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas o dar valores convenientes (las raíces del denominador) a la x para hallar los coeficientes. $x = 0 \Rightarrow -4A = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$; $x = -2 \Rightarrow$ $8B = -3 \Rightarrow B = \frac{-3}{8}$; $x = 2 \Rightarrow 8C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{8}$. Por lo tanto, $\int \frac{x-1}{x^3-4x}dx = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{3}{8}\ln|x+2| + \frac{1}{8}\ln|x-2| + k$.
Fíjate en que hay tantas fracciones como factores tenga el denominador y que la primitiva es una suma de logaritmos neperianos.

b) Como el denominador está factorizado, este paso lo saltamos. Ahora hay que plantear la ecuación $\frac{6}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$. Observa que ahora $\int \frac{6}{(x+1)(x-3)^2}dx = \int \frac{A}{x+1}dx + \int \frac{B}{x-3}dx +$ $+ \int \frac{C}{(x-3)^2} = A\ln|x+1| + B\ln|x-3| - \frac{C}{x-3} + k$. La ecuación es $A(x-3)^2 + B(x+1)(x-3) + C(x+1) = 6$.
Sólo tenemos dos raíces, con las que determinamos dos coeficientes. Para el tercero damos otro valor a la x: $x = -1 \Rightarrow 16A = 6 \Rightarrow A = \frac{3}{8}$; $x = 3 \Rightarrow 4C = 6 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$; $x = 1 \Rightarrow 4A - 4B + 2C = 6 \Rightarrow B = -\frac{3}{8}$. Luego

$$\int \frac{6}{(x+1)(x-3)^2}dx = \frac{3}{8}\ln|x+1| - \frac{3}{8}\ln|x-3| - \frac{3}{2(x-3)} + k.$$

Ahora, para cada factor necesitamos tantas fracciones como sea la multiplicidad de la raíz. Si la raíz es doble, dos (ejemplo resuelto); si la raíz es triple, tres… Observa que si todas las raíces son simples, necesitamos una fracción por raíz (caso **a**)).

c) $x^2+4x+7\neq 0 \Rightarrow$ tiene dos raíces complejas conjugadas. Recordando los trinomios cuadrados perfectos podemos escribir:

$x^2+4x+7=(x+2)^2+3=3\left[1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$. Por lo tanto, en la primitiva va a haber un arco tangente. Si el numerador fuera sólo un número, la primitiva sería ese arco tangente, pero, al tener también x, aparecerá un neperiano, porque siempre podremos tener la derivada del denominador en el numerador. Para ello, como $(x^2+4x+7)'=2(x+2)$, cambiamos la x del nume rador por $x+2$ y ajustamos el término independiente: $3(x+2)=3x+6\Rightarrow 3x+5=3(x+2)-1$. $\int\frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx=\int\frac{3(x+2)-1}{x^2+4x+7}dx=\int\frac{3(x+2)}{x^2+4x+7}dx-\int\frac{1}{x^2+4x+7}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7)-$

$-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7)-\frac{\sqrt{3}}{3}\,arc\,tg\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+k$

17. Calcula: **a)** $\int\frac{x+2}{3x^3-11x^2-2x-8}dx$; **b)** $\int\frac{5x+1}{x(x-4)^2}dx$; **c)** $\int\frac{7x-2}{2x^2+3x+3}dx$.

Solución:

a) Usando Ruffini se obtiene que $3x^3-11x^2-2x-8=(x-4)(3x^2+x+2)$. Hacemos $\frac{x+2}{3x^3-11x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{Mx+N}{3x^2+x+2}$. El numerador del polinomio irreducible de 2º grado debe ser un binomio de primer grado $Mx+N$. De esta segunda fracción obtendremos un neperiano y un arco tangente.

La ecuación es ahora: $A(3x^2+x+2)+(Mx+N)(x-4)=x+2$; $x=4\Rightarrow A=\frac{1}{9}$; $x=0\Rightarrow 2A-4N=2\Rightarrow$

$N=-\frac{4}{9}$; $x=1\Rightarrow 6A-3M-3N=3\Rightarrow M=-\frac{1}{3}$. Como $x=0$ no es raíz, puede usarse para calcular N. En caso de que lo fuera, tanto el segundo como el tercer valor serían arbitrarios. Ya tenemos que

$\int\frac{x+2}{3x^3-11x^2-2x-8}dx=\frac{1}{9}\ln|x-4|-\frac{1}{9}\int\frac{3x+4}{3x^2+x+2}dx$. Hay que operar la integral de la derecha:

$(3x^2+x+2)'=6x+1=6\left(x+\frac{1}{6}\right)\Rightarrow 3x+4=3\left(x+\frac{1}{6}\right)+\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{3x+4}{3x^2+x+2}=\frac{3\left(x+\frac{1}{6}\right)}{3x^2+x+2}+\frac{\frac{7}{2}}{3x^2+x+2}$.

El primer término da $\frac{1}{2}\ln(3x^2+x+2)$. Para el segundo hay que operar el denominador: $3x^2+x+2=$

$=3\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)=3\left[\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2}{3}-\frac{1}{36}\right]=3\cdot\frac{23}{36}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{23}}{6}}\right)^2\right]=\frac{23}{12}\left[\left(\frac{6x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1\right]$. Aparece $\frac{6}{\sqrt{23}}$ como derivada del argumento, luego habrá que dividir por él: $\frac{\frac{7}{2}}{\frac{23}{12}}\cdot\frac{\sqrt{23}}{6}\cdot\frac{\frac{6}{\sqrt{23}}}{1+\left(\frac{6x+1}{\sqrt{23}}\right)^2}\Rightarrow\frac{7\sqrt{23}}{23}\,arc\,tg\left(\frac{6x+1}{\sqrt{23}}\right)$.

Resumiendo se tiene: $\int\frac{x+2}{3x^3-11x^2-2x-8}dx=\frac{1}{9}\ln|x-4|-\frac{1}{18}\ln(3x^2+x+2)-\frac{7\sqrt{23}}{207}\,arc\,tg\left(\frac{6x+1}{\sqrt{23}}\right)+k$.

Aunque es preferible aprender el procedimiento para convertir el polinomio irreducible en arco tangente, hay una fórmula que reduce el trabajo: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} arc\ tg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)$, con $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante)

A la vista del presente ejercicio, puedes imaginarte lo que supone la última posibilidad: raíces reales simples y múltiples aderezadas con raíces complejas. Como muestra te ponemos el ejemplo:

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Observa que el coeficiente de la raíz múltiple es un número C, mientras que el del polinomio irreducible es un binomio $Mx + N$. El procedimiento es el mismo, sólo cambia la cantidad de cálculos a realizar.

b) $\frac{5x+1}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} \Rightarrow A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx = 5x+1 \Rightarrow A = \frac{1}{16}(x=0), C = \frac{21}{4}(x=4),$

$B = -\frac{1}{16}(x=1) \Rightarrow \int \frac{5x+1}{x(x-4)^2}dx = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{16}\ln|x-4| - \frac{21}{4(x-4)} + k.$

c) $2x^2+3x+2 \neq 0, (2x^2+3x+2)' = 4x+3 = 4\left(x+\frac{3}{4}\right), -\Delta = 7$. Por lo tanto, $7x-2 = 7\left(x+\frac{3}{4}\right) - \frac{21}{4} - 2 =$

$= 7\left(x+\frac{3}{4}\right) - \frac{29}{4} \Rightarrow \int \frac{7\left(x+\frac{3}{4}\right)}{2x^2+3x+2}dx - \frac{29}{4}\int \frac{dx}{2x^2+3x+2} \overset{\substack{a=2\\b=3}}{=} \frac{7}{4}\ln(2x^2+3x+2) - \frac{29}{2\sqrt{7}} arc\ tg\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right).$

18. Calcula: **a)** $\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}dx$; **b)** $\int \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}dx$; **c)** $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

Solución:

a) $(x^3-2x^2+x-1):(x^2-3x+2) = x+1+\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$; $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$. Así,

$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow A(x-2)+B(x-1) = 2x-3 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=1 \Rightarrow A=1 \\ x=2 \Rightarrow B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + \ln|x-2| + k.$

b) $(3x^2+x+3):(x^2+1) = 3 + \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}dx = 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k.$

c) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right\} = \int \frac{(1+t^2)2t}{1+t}dt$. Efectuamos la división obteniendo

$(2t^3+2t):(t+1) = 2t^2-2t+4-\frac{4}{1+t} \Rightarrow \int \frac{2t^3+2t}{t+1}dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 4t - 4\ln|1+t| + k.$

Deshaciendo el cambio se tiene que $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + k.$

19. Calcula: **a)** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x} - \sqrt[3]{3-x} - 2\sqrt[6]{3-x}}$; **b)** $\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{3x}}$.

Solución:

a) Como el índice común de las raíces es 6, hacemos el cambio $\left\{\begin{matrix} 3-x = t^6 \\ dx = -6t^5 dt \end{matrix}\right\}$. Se obtiene

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3-x}-\sqrt[3]{3-x}-2\sqrt[6]{3-x}}=-6\int\frac{t^5dt}{t^3-t^2-2t}=-6\int\frac{t^4dt}{t^2-t-2},$$ que es una integral racional.

Efectuamos la división $t^4:\left(t^2-t-2\right)=t^2+t+3+\dfrac{5t+6}{t^2-t-2}$. Como $t^2-t-2=(t+1)(t-2)$ escribiremos

$$\frac{5t+6}{t^2-t-2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-2}\Rightarrow A=-1/3,B=16/3\Rightarrow\int\frac{t^4}{t^2-t-2}dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+3t-\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{16}{3}\ln|t-2|.$$

Al deshacer el cambio y multiplicar por -6, se tiene:

$$I=2\ln\left|\sqrt[6]{3-x}+1\right|-2\sqrt{3-x}-3\sqrt[3]{3-x}-18\sqrt[6]{3-x}-32\ln\left|\sqrt[6]{3-x}-2\right|+k.$$

b) Con el cambio $e^x=t, e^x dx=dt\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{t}$ pasamos a $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2+t^3}$. El denominador factorizado es $t^2(t+1)$,

luego $\dfrac{1}{t^2+t^3}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t^2}+\dfrac{C}{t+1}\Rightarrow A=-1,B=1,C=1\Rightarrow$. Deshaciendo el cambio tenemos:

$$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+e^{3x}}=\ln\left(e^x+1\right)-x-\frac{1}{e^x}+k.$$

Actividades

6. Calcula: **a)** $\int\left(x^3+1\right)\left(x^2-1\right)dx$; **b)** $\int 4x\left(7x^2-5\right)^3dx$; **c)** $\int\dfrac{7x}{4+3x^2}dx$.

7. Halla: **a)** $\int 5x\sqrt[3]{1-9x^2}\,dx$; **b)** $\int\dfrac{4}{5+8x}dx$; **c)** $\int 3x\cos x^2dx$.

8. Averigua: **a)** $\int\dfrac{2x}{\sqrt[3]{8x^2+1}}dx$; **b)** $\int 3xe^{-x^2}dx$; **c)** $\int\dfrac{3\cos x}{5senx-8}dx$.

9. Calcula: **a)** $\int 7e^{3x+4}dx$; **b)** $\int 3e^{-x}dx$; **c)** $\int\dfrac{7}{3-5x}dx$.

10. Halla: **a)** $\int\dfrac{5x+15}{x^2+6x-4}dx$; **b)** $\int 8xe^{7-3x^2}dx$; **c)** $\int\dfrac{9}{e^x+e^{-x}}dx$.

11. Averigua: **a)** $\int sen^3 4xdx$; **b)** $\int\cos^2 7xdx$; **c)** $\int sen^2 3x\cdot\cos^3 3xdx$.

12. Calcula: **a)** $\int\cos^4 5xdx$; **b)** $\int\sqrt{36-9x^2}\,dx$.

13. Halla: **a)** $\int e^{-2x}\left(x^2-5\right)dx$; **b)** $\int x^3\ln xdx$; **c)** $\int\left(arc\cos x\right)^2dx$.

14. Calcula: **a)** $\int x^2 arc\,tgxdx$; **b)** $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^5}}dx$; **c)** $\int e^{5x}sen3xdx$.

15. Averigua: **a)** $\int\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}dx$; **b)** $\int\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+4}dx$.

16. Halla: **a)** $\int\dfrac{x^3+2}{x^3+4x^2}dx$; **b)** $\int\dfrac{x+2}{x^3-x^2+x-1}dx$; **c)** $\int\dfrac{dx}{1+e^x}$ con el cambio $z=e^x$.

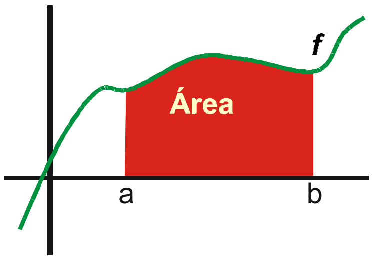
17. Calcula: **a)** $\int\dfrac{dx}{x^3-1}$; **b)** $\int xe^{4x}dx$; **c)** $\int\dfrac{x}{x^4+9}dx$.

18. Averigua: $\int\dfrac{x^2+4}{x^2-5x+6}dx$.

3. Integral definida y sus aplicaciones

3.1. Integral definida

Históricamente, la integral surge como herramienta para el cálculo de áreas de figuras planas y es anterior a la derivación. El procedimiento es el siguiente: llamamos $\int_a^b f(x)dx$ al área encerrada por la función continua *f*, el eje

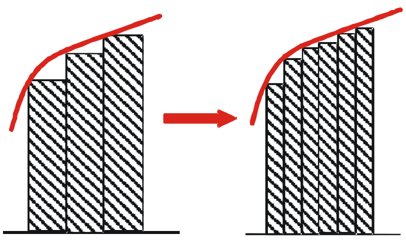


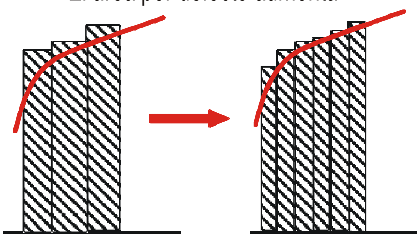
OX, y las rectas $x = a$, $x = b$ (zona coloreada). Los puntos *a*, *b* que aparecen en la integral son sus *extremos* o *límites de integración* e indican desde y hasta donde queremos calcular el área. Por comodidad, suponemos *f* positiva en el intervalo [*a, b*]. Más adelante veremos qué hay que hacer cuando no sea así.

Para calcular el área de la figura, podemos descomponerla en *n* rectángulos y sumar el área de todos ellos. Este troceamiento del intervalo de integración se llama *partición P*, que está caracterizada por su $diámetro = \dfrac{anchura}{n^o\ de\ trozos} = \dfrac{b-a}{n}$. Obtenemos *n* subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, con $x_0 = a$, $x_n = b$. Si la función es continua, siempre tendrá un mínimo y un máximo en cualquier intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición *P*, a los que llamaremos *mín* (*f*, $[x_{i-1}, x_i]$) y *máx* (*f*, $[x_{i-1}, x_i]$), respectivamente. Los rectángulos tienen de base $\frac{b-a}{n}$ y pueden tener de altura:

- *mín* (*f*, $[x_{i-1}, x_i]$); la *Suma inferior* $L(f,P) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} mín\left(f,[x_{i-1},x_i]\right)$ (*L* de *Lower*, inferior) es la suma del área de todos estos rectángulos. Es un área por defecto.
- *máx* (*f*, $[x_{i-1}, x_i]$); la *Suma superior* $U(f,P) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} máx\left(f,[x_{i-1},x_i]\right)$ (*U* de *Upper*, superior) da un área por exceso.

Claramente $L(f,P) \le \int_a^b f(x)dx \le U(f,P)$, estando acotada la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función en cada trozo de la partición.


El área por defecto aumenta


El área por exceso disminuye

Como con toda aproximación, podemos mejorarla volviendo a dividir el intervalo por la mitad. El primer mínimo quedará en uno de los dos nuevos trozos, por lo que en el otro el nuevo mínimo es mayor o igual que el antiguo. Por ello, aumenta la suma inferior. Si subdividimos, otra vez ocurrirá lo mismo, siendo el nuevo mínimo de alguno de los trozos mayor que el antiguo. Se tiene una sucesión monótona creciente: $L(f, P_1) \le L(f, P_2) \le L(f, P_3) \le ....$

El primer máximo quedará en uno de los trozos, por lo que en el otro el nuevo máximo es menor o igual que el antiguo. Así, disminuye la suma superior, sucediendo esto cada vez que subdividimos. Se obtiene una sucesión monótona decreciente: $U(f, P_1) \ge U(f, P_2) \ge U(f, P_3) \ge ....$

Además, la diferencia entre ambas sumas se hace cada vez menor, pues, al disminuir el diámetro de la partición (cuando $n \to \infty$, $\frac{b-a}{n} \to 0$), el mínimo y el máximo se acercan, aproximándose ambos a $f(x_i)$. De este modo, si el área por defecto aumenta y disminuye el área por exceso, y, parece claro que el área existe, tendrán que coincidir. En ese momento tendremos calculada el área de la figura, definida también como $\int_a^b f(x)dx$.

Este procedimiento que hemos descrito tan brevemente es en realidad más complicado, tanto en la teoría como en la práctica:

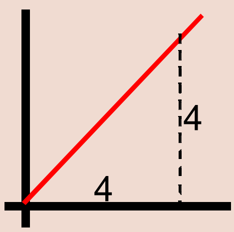
- A nivel teórico hacen falta varias comprobaciones para demostrar que el límite de las sumas inferiores y superiores coincide; éstas exceden del nivel de nuestro libro.
- A nivel práctico, se busca una expresión para L y U como sucesiones; las sumas de estas sucesiones, que se denominan series, pueden ser tremendamente complicadas, incluso para funciones muy sencillas.

Ejemplo

20. Calcula el área encerrada por la función $f(x) = x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución :

La figura es un triángulo rectángulo de área 8 u^2. Dividiendo en n trozos obtenemos los intervalos $\left[0,\frac{4}{n}\right],\left[\frac{4}{n},\frac{8}{n}\right],\ldots,\left[\frac{4n-4}{n},4\right]$, cada uno con un diámetro de $\frac{4}{n}$. Al ser la recta creciente, el mínimo de un trozo coincide con el máximo del anterior. Se tiene entonces que: $\begin{cases} mín\left(f,\left[0,\frac{4}{n}\right]\right)=0 \\ máx\left(f,\left[0,\frac{4}{n}\right]\right)=f\left(\frac{4}{n}\right)=\frac{4}{n}\end{cases}$, $\begin{cases} mín\left(f,\left[\frac{4}{n},\frac{8}{n}\right]\right)=f\left(\frac{4}{n}\right)=\frac{4}{n} \\ máx\left(f,\left[\frac{4}{n},\frac{8}{n}\right]\right)=f\left(\frac{8}{n}\right)=\frac{8}{n}\end{cases}$, ...,



$\begin{cases} mín\left(f,\left[\frac{4n-4}{n},4\right]\right)=f\left(\frac{4n-4}{n}\right)=\frac{4n-4}{n} \\ máx\left(f,\left[\frac{4n-4}{n},4\right]\right)=f(4)=4\end{cases}$. Usando la fórmula de la suma de una progresión aritmética (se pone como denominador común a n) se obtiene:

$$L(f,P)=\frac{4}{n}\left(0+\frac{4}{n}+\frac{8}{n}+\ldots+\frac{(4n-4)}{n}\right)=\frac{4}{n}\cdot\frac{\frac{0+4n-4}{n}}{2}\cdot n=\frac{8(n-1)}{n},\ U(f,P)=\frac{4}{n}\cdot\left(\frac{4}{n}+\frac{8}{n}+\ldots+\frac{4n}{n}\right)=$$

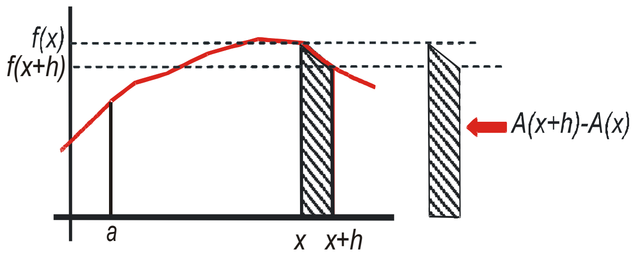
$$=\frac{4}{n}\cdot\frac{\frac{4+4n}{n}}{2}\cdot n=\frac{8(n+1)}{n}.$$ Al tomar límites tenemos: $\lim\limits_{n\to\infty} L(f,P)=\lim\limits_{n\to\infty} U(f,P)=8$.

Como $\int_a^b f(x)dx$ es una suma, es posible trocearla, de modo que se verifica que

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx, \forall c$ tal que $a \le c \le b$. Además, $\int_a^a f(x)dx=0$, pues la base de nuestro rectángulo vale cero. Estos resultados permiten ampliar la integral definida a las funciones que no sean continuas, siempre que las discontinuidades sean de salto finito y el número de discontinuidades sea finito. Para ello, se trocea el intervalo de integración, aislando los puntos en los que aparecen dichas discontinuidades. Del mismo modo, $\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ pues la constante se saca como factor común en todo el proceso de sumas.

Una cuestión de notación: si llamamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, y suponemos que *mín* $(f, [x_{i-1}, x_i])$ = *máx* $(f, [x_{i-1}, x_i]) = f(x_i)$ (lo que ocurre si la anchura del intervalo es suficientemente pequeña), las sumas se escriben como $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, por lo que $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$, estableciéndose las equivalencias $\Sigma \to \int$, $\Delta x \to dx$ cuando $\Delta x \to 0$ (que es lo que sucede cuando $n \to \infty$).

3.2. Teorema fundamental del Cálculo. Regla de Barrow. Derivada de una integral. Cálculo de integrales definidas



Dado lo tedioso del cálculo del área mediante el procedimiento de las sumas superior e inferior, averiguaremos el valor de la derivada del área $A(x) = \int_a^x f(t)dt$. Observa que como A es función de x se escribe otra variable en la integral. En el gráfico vemos que:

$$f(x+h)\cdot h \le A(x+h) - A(x) \le f(x)\cdot h \Rightarrow f(x+h) \le \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le f(x) \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h) \le \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le$$

$$\le \lim_{h\to 0} f(x) \Rightarrow f(x) \le A'(x) \le f(x) \Rightarrow A'(x) = f(x) \Rightarrow$$ El área encerrada por la función es su primitiva: calcular áreas es calcular primitivas.

Algunas apreciaciones:

- La función dibujada es decreciente en $[x, x+h]$, pero el que fuese creciente en dicho intervalo no cambia el resultado.
- Para poder tomar el límite, y obtener el resultado obtenido, la función f ha de ser continua y la función A derivable.

Gracias al resultado anterior, conocido como el **Teorema fundamental del cálculo**, podemos escribir que $\boxed{\int_a^x f(t)dt = F(x) + k}$. La **Regla de Barrow** permite que el área no quede en función de una constante arbitraria k; su demostración es sencilla:

Sabemos que $\int_a^x f(t)dt = F(x) + k$; además $\int_a^a f(t)dt = F(a) + k = 0$, luego $k = -F(a)$. Como $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ entonces $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}$ (**Regla de Barrow**).

El segundo igual no es más que otra forma de escribir dicha regla usando la barra de las particularizaciones.

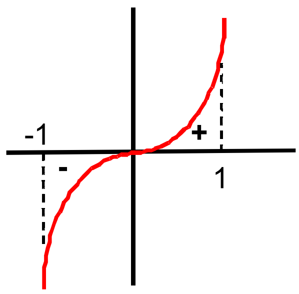
Hay que tener cuidado al aplicar el teorema fundamental del cálculo para hallar la **derivada de una integral**.

En general, $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt = F(g_2(x)) - F(g_1(x))$; al derivar, usando la regla de la cadena, $\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt\right)' =$

$= \left(F(g_2(x))\right)' - \left(F(g_1(x))\right)' = F'(g_2(x))\cdot g_2'(x) - F'(g_1(x))\cdot g_1'(x)$. Como $F'(x) = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(g(x)) = f(g(x))$, entonces $\boxed{\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g_2(x))\cdot g_2'(x) - f(g_1(x))\cdot g_1'(x)}$.

Aunque empezamos definiendo la integral definida como el área encerrada por una función, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$, no podemos usarla para esta tarea sin más, pues la integral definida es el área si la función es positiva. Por ejemplo, para la función $f(x) = x^3$, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$, no podemos decir que su área sea $A = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\,u^2$ pues un área no puede ser nula. Encontramos la explicación al representar gráficamente $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$: la función tiene una parte negativa, con su área, y otra positiva, con la suya. Da la casualidad (nada casual, pues no lo habríamos puesto como ejemplo) de que ambas son iguales, pero tienen signos distintos, por lo que se anulan.



Es decir, la integral por sí sola no es capaz de calcular correctamente el área, de ahí que se distinga entre **integral definida**, que puede tomar cualquier valor (positivo, negativo o nulo), y el área, que sólo puede ser positiva. Cuando escribimos $\int_a^b f(x)dx$ entendemos que es una integral definida, por lo que, una vez calculada la primitiva, usaremos directamente la Regla de Barrow, sin preocuparnos por el signo del resultado. En el siguiente apartado veremos cómo se calculan las áreas.

Hay dos formas de aplicar la Regla de Barrow si resolvemos la integral mediante el método de sustitución:

1. La usamos después de haber deshecho el cambio.
2. Cambiamos los límites de integración, escribiendo $z_1 = z(a)$, $z_2 = z(b)$, con lo que tendríamos que $\int_a^b f(x)dx = F(z_2) - F(z_1)$.

Ejemplos

21. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_{-3}^{1} \left(4x^2 - 5x + 1\right)dx = \left.\frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + x\right|_{-3}^{1} = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{123}{2}\right) = \frac{368}{6} = \frac{184}{3}$.

b) $\int_{-1}^{1} \left(6x^5 - 9x^2 + 2\right)dx = \left. x^6 - 3x^3 + 2x\right|_{-1}^{1} = 0 - 2 = -2$.

c) $\int_{1}^{e} \frac{3}{x}dx = \left.3\ln x\right|_1^e = 3\ln e - 3\ln 1 = 3 - 0 = 3$.

d) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \left.\frac{x}{2} + \frac{sen 2x}{4}\right|_0^{2\pi} = \pi$.

e) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left. arc\ senx\right|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$.

22. Halla la primitiva de $f(x)=\dfrac{6}{x+4}-6x$ que en $x=-3$ vale 7.

Solución:

Al conocer alguna condición que cumple la función, es posible calcular k:

$$\int\left(\frac{6}{x+4}-6x\right)dx=6\ln(x+4)-3x^2+k\Rightarrow F(-3)=6\ln 1-27+k=7\Rightarrow k=34.$$

La primitiva buscada es $F(x)=6\ln(x+4)-3x^2+34$.

23. Averigua la expresión de la velocidad y del espacio recorrido, en función del tiempo, por un móvil que se desplaza con aceleración constante a, si inicialmente lleva una velocidad v_0 y ha recorrido un espacio s_0.

Solución:

$$v'(t)=a\Rightarrow\int_0^t v'(x)dx=\int_0^t a dx\Rightarrow v(t)-v(0)=at\Rightarrow v(t)=v_0+at;\ s'(t)=v(t)\Rightarrow\int_0^t s'(x)dx=$$

$$=\int_0^t(v_0+ax)dx\Rightarrow\Rightarrow s(t)-s(0)=v_0t+\frac{1}{2}at^2\Rightarrow s(t)=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2.$$

24. Calcula: **a)** $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}6x\left(x^2-1\right)^4dx$; **b)** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{3senx}{1-\cos x}dx.$

Solución:

a) Vamos a hacerlo por los dos métodos que mencionamos:

i) $$\int 6x\left(x^2-1\right)^4dx=\left\{\begin{matrix}z=x^2-1\Rightarrow z'=2x\\ dx=\dfrac{dz}{2x}\end{matrix}\right\}=\int 6x\cdot z^4\cdot\frac{dz}{2x}=\frac{3z^5}{5}=\frac{3\left(x^2-1\right)^5}{5}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F\left(-\sqrt{2}\right)=\dfrac{3}{5}\\ F\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{96}{5}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}6x\left(x^2-1\right)^4dx=F\left(\sqrt{3}\right)-F\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{96}{5}-\frac{3}{5}=\frac{93}{5}.$$

ii) $$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}6x\left(x^2-1\right)^4dx=\left\{\begin{matrix}z=x^2-1\Rightarrow z'=2x\Rightarrow dx=\dfrac{dz}{2x}\\ z_1=z\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^2-1=1\\ z_2=z\left(\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-1=2\end{matrix}\right\}=\int_1^2 6x\cdot z^4\cdot\frac{dz}{2x}=\int_1^2 3z^4dz\Rightarrow F(z)=\frac{3z^5}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F(1)=\dfrac{3}{5}\\ F(2)=\dfrac{96}{5}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int_1^2 3z^4dz=F(2)-F(1)=\frac{93}{5}.$$

Fíjate en que si cambiamos los límites, lo escribimos en el cambio.

b) Ajustando constantes: $$(1-\cos x)'=senx\Rightarrow\int\frac{3senx}{1-\cos x dx}=3\ln(1-\cos x)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F(\pi)=3\ln 2\\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{3senx}{1-\cos x}dx=F(\pi)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\ln 2.$$

25. Calcula: **a)** $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx$; **b)** $\int_{-1}^{1}(x-3)e^{2x}dx$.

Solución :

a) $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx \Rightarrow \int \sqrt{x}\ln x dx \overset{por\ partes}{=} \frac{2}{9}\sqrt{x^3}\,(3\ln x-2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(e)=\frac{2}{9}\sqrt{e^3} \\ F(1)=-\frac{4}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^e \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{9}\left(\sqrt{e^3}+2\right)$.

b) $\int_{-1}^{1}(x-3)e^{2x}dx \Rightarrow \int (x-3)e^{2x}dx \overset{por\ partes}{=} \left(\frac{x}{2}-\frac{7}{4}\right)e^{2x} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(1)=-\frac{5}{4}e^2 \\ F(-1)=-\frac{9}{4}e^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}(x-3)e^{2x}dx = \frac{9e^{-2}-5e^2}{4}$.

26. Halla la función f definida para $R-\{0\}$ que verifica $f'(x)-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}=0$ y $f(-1)=0$.

Solución :

Se calcula la primitiva y se sustituye la condición para averiguar el valor de k:

$$f'(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3} \Rightarrow f(x)=\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)dx=-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+k \Rightarrow f(-1)=3+1+k=0 \Rightarrow k=-4 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4.$$

27. Determina el valor del parámetro a de modo que $\int_0^a \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=\frac{1}{4}$.

Solución :

$$\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx \underset{ajuste\ de\ constantes}{\overset{sustitución}{=}} \frac{-1}{1+e^x} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(a)=\frac{-1}{1+e^a} \\ F(0)=-\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow F(a)-F(0)=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{e^a-1}{2\left(1+e^a\right)}=\frac{1}{4} \Rightarrow 2e^a-2=1+e^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^a=3 \Rightarrow a=\ln 3.$$

28. Calcula la derivada de la funciones: **a)** $\int_3^x \frac{e^{t-3}+2}{5}dt$; **b)** $\int_1^{x^2}\left(3-\sqrt{t}+2t\right)dt$.

Solución :

a) $\left(\int_3^x \frac{e^{t-3}+2}{5}dt\right)' = \left(F(x)-F(3)\right)' = F'(x)=f(x)=\frac{e^{x-3}+2}{5}$, pues $F(3)$ es constante.

b) $\left(\int_1^{x^2}\left(3-\sqrt{t}+2t\right)dt\right)' = \left(F\left(x^2\right)-F(1)\right)' = F'\left(x^2\right)\cdot 2x = 2xf(x) = 2x\left(3-\sqrt{x}+2x\right)$.

29. Calcula la derivada de la funciones **a)** $\int_{3x-5}^{e^x} \ln\left(\frac{t+5}{3}\right)dt$; **b)** $\int_{\cos^2 x}^{sen^2 x} arc\ sen\sqrt{u}du$.

Solución :

a) $\left(\int_{3x-5}^{e^x} \ln\left(\frac{t+5}{3}\right)dt\right)' = \left(F(e^x) - F(3x-5)\right)' = F'(e^x)\cdot e^x - F'(3x-5)\cdot 3 = e^x \cdot f(e^x) - 3\cdot f(3x-5) =$

$= e^x \cdot \ln\left(\frac{e^x+5}{3}\right) - 3\ln x.$

b) $\left(\int_{\cos^2 x}^{sen^2 x} arc\ sen\sqrt{u}du\right)' = \left(F(sen^2 x) - F(\cos^2 x)\right)' = \left[F'(sen^2 x) + F'(\cos^2 x)\right]\cdot 2senx\cos x =$

$= \left[f(sen^2 x) + f(\cos^2 x)\right]\cdot 2senx\cos x = \left[x + arcsen(\cos x)\right]\cdot sen2x.$

30. a) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo $F(x) = \int_0^x \left[f(t) + t^2 + t^3\right]dt.$

b) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución :

a) $F'(x) = \left(\int_0^x \left[f(t) + t^2 + t^3\right]dt\right)' = (G(x) - G(0))' = G'(x) = g(x) = f(x) + x^2 + x^3$. No se puede usar F en ambos miembros, por lo que llamamos G a la primitiva que usamos en la Regla de Barrow.

b) $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = F(1) = \int_0^1 \left[f(t) + t^2 + t^3\right]dt = \int_0^1 f(t)dt + \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12};\quad F'(1) = f(1) + 2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow r: y - \frac{19}{12} = 3(x-1) \Rightarrow r: y = 3x - \frac{17}{12}.$

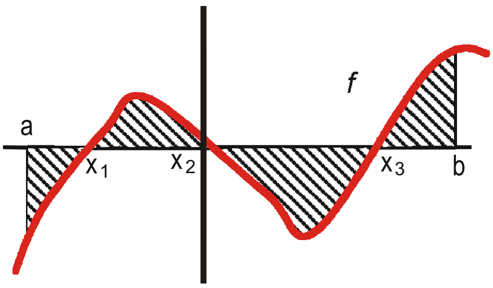
31. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utiliza la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Solución :

$$\int_0^1 f(x)dx = \left\{\begin{matrix} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix}\right\} = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 2xf'(x)dx = -\frac{1}{2}.$$

Observa que $xf(x)\Big|_0^1 = 1\cdot f(1) - 0\cdot f(0) = 0.$

3.3. Cálculo de áreas



Hemos visto que la integral definida da el valor del área encerrada por una función, el eje *OX* y las rectas $x = a$ y $x = b$, sólo si la función es positiva. ¿Será el área $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$? Recordando el ejemplo de $f(x) = x^3$, vemos que no resuelve el problema: sigue saliendo cero. Observa el gráfico; en él suponemos que x_1, x_2 y x_3 son los puntos de corte de la función con el eje *OX* que verifican $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ (puede haber más). Si calculamos $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ directamente, a las partes positivas (de x_1 a x_2 y de x_3 a *b*) le restamos las negativas (de *a* a x_1 y de x_2 a x_3), y no obtenemos el área buscada. Sin embargo, si sumamos el área de cada trozo calculada como $A_{trozo} = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right|$ o asignándole el signo correcto $A_{trozo} = -\int_a^{x_1} f(x)dx$, sí obtendremos el área total. Por lo tanto, para calcular el área seguiremos los siguientes pasos:

1. calculamos los puntos de corte con el eje *OX* : $f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0$;
2. troceamos el intervalo de integración, si dichos puntos de corte pertenecen al citado intervalo: $[a,b] \to [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup [x_2,x_3] \cup [x_3,b]$;
3. calculamos el área como $Área = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|$ ó como

$$Área = -\int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{b} f(x)dx.$$

Si usamos el valor absoluto sólo calculamos una primitiva, pues en todos los integrandos está la misma función, que evaluamos en diferentes puntos. Sólo hay que efectuar las operaciones con orden para simplificarnos el trabajo.

Ejemplos

32. Halla el área encerrada por la curva $y = x^2 + x - 6$, el eje OX y las rectas $x = -4$ y $x = 1$.

Solución :

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3, 2$; descomponemos el intervalo de integración $[-4,1]$ en tantos trozos como ceros +1 tenga la función en su interior: $[-4,1] \to [-4,-3] \cup [-3,1]$.

El área es: $Área = \left|\int_{-4}^{-3} \left(x^2 + x - 6\right)dx\right| + \left|\int_{-3}^{1} \left(x^2 + x - 6\right)dx\right| = |F(-3) - F(-4)| + |F(1) - F(-3)|$.

Hallamos la primitiva, la evaluamos y hacemos los cálculos:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(-4) = \frac{32}{3} \\ F(-3) = \frac{27}{2} \\ F(1) = -\frac{31}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \left|\frac{27}{2} - \frac{32}{3}\right| + \left|-\frac{31}{6} - \frac{27}{2}\right| = \frac{129}{6} u^2.$$

33. Halla el área encerrada por la función $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = -2$, $x = 2$.

Solución:

1º) $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$;

2º) $[-2,2] \to [-2,0] \cup [0,2]$;

3º) $A = \left|\int_{-2}^{0} x^3 dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x^3 dx\right| = |F(0) - F(-2)| + |F(2) - F(0)|$;

4º) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(-2) = 4 \\ F(0) = 0 \\ F(2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow A = |0-4| + |4-0| = 4 + 4 = 8\,u^2$.

34. Halla el área encerrada por $y = \dfrac{3}{x+7}$, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = -6$.

Solución:

1º) $f(x) \neq 0$ *pues* $3 \neq 0 \Rightarrow A = \left|\int_{-6}^{1} \dfrac{3}{x+7} dx\right|$;

2º) $F(x) = 3\ln(x+7) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(1) = 3\ln 8 \\ F(-6) = 3\ln 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = |F(1) - F(-6)| = 3\ln 8\,u^2$.

35. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y = -x^2 + 5x - 6$ y el eje de las x.

Solución:

Si no se dan los límites, éstos son los puntos de corte de la función con el eje OX.

1º) $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 3$;

2º) $A = \left|\int_{2}^{3} \left(-x^2 + 5x - 6\right) dx\right|$;

3º) $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} - 6x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(3) = -\dfrac{9}{2} \\ F(2) = -\dfrac{14}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow A = |F(3) - F(2)| = \left|-\dfrac{9}{2} + \dfrac{14}{3}\right| = \dfrac{1}{6}\,u^2$.

36. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la función $m(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$, siendo $m(t)$ la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?

Solución:

Para calcular la cantidad de material, debemos calcular el valor de m para todo valor de t entre 0 y 24 h, y después sumarlos. Como la suma de una gran cantidad de valores es una integral, tendremos:

$$C = \int_0^{24} m(t)dt = \int_0^{24} \left(0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1\right) dt \Rightarrow F(t) = \frac{0{,}01t^4}{4} - \frac{0{,}2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(24) = 219{,}84 \\ F(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = |F(24) - F(0)| = 219{,}84\ kg.$$

37. Halla el área limitada por la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, si\ x<-\frac{1}{2} \\ -x^2+3x, si\ -\frac{1}{2}\le x\le 3 \\ |x+3|, si\ x>3 \end{cases}$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=3$.

Solución :

Al ser una función definida a trozos, debemos integrar la función o funciones que estén en el intervalo de integración. En este caso, dicho intervalo es [0,3], con lo cual $f(x)=-x^2+3x$. Ahora seguimos el procedimiento habitual:

$$f(x)=0\Rightarrow -x^2+3x=0\Rightarrow x=0,3\Rightarrow A=\left|\int_0^3\left(-x^2+3x\right)dx\right|\Rightarrow F(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} F(3)=\frac{9}{2} \\ F(0)=0 \end{cases}\right\}\Rightarrow A=|F(3)-F(0)|=\frac{9}{2}u^2.$$

38. a) Para cada valor de $c>0$, calcula el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=cx^4+\frac{1}{c}x^2+1$, el eje OX y las rectas $x=0, x=1$.

b) Halla el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado **a)** es mínima.

Solución :

a) como $c>0, f(x)>0\Rightarrow$ Área $=\int_0^1\left(cx^4+\frac{1}{c}x^2+1\right)dx=\left.\frac{cx^5}{5}+\frac{x^3}{3c}+x\right|_0^1=\frac{c}{5}+\frac{1}{3c}+1$ u^2.

b) $A'(c)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3c^2}\Rightarrow A'(c)=0\Rightarrow c=\sqrt{\frac{5}{3}}, A''(c)=\frac{2}{3c^3}\Rightarrow A''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)>0\Rightarrow$ el área es mínima para $c=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

39. Halla el área del recinto acotado por la gráfica de la función $f(x)=2x|4-x|$, las rectas $x=0, x=5$ y el eje OX.

Solución :

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-8x, si\ x>4 \\ 8x-2x^2, si\ x\le 4 \end{cases}; f\cap OX\Rightarrow x=0,4\Rightarrow Área=\left|\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx\right|+\left|\int_4^5\left(2x^2-8x\right)dx\right|.$$

$$F_1(x)=4x^2-\frac{2x^3}{3}\Rightarrow\left.\begin{cases} F_1(4)=\frac{64}{3} \\ F_1(0)=0 \end{cases}\right\}; F_2(x)=\frac{2x^3}{3}-4x^2\Rightarrow\left.\begin{cases} F_2(5)=\frac{-50}{3} \\ F_2(4)=\frac{-64}{3} \end{cases}\right\}\Rightarrow Área=\frac{64}{3}+\frac{14}{3}=26\text{ u}^2.$$

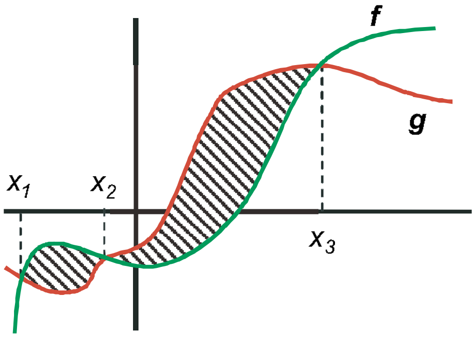
40. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$, siendo $g(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+e^t}$.

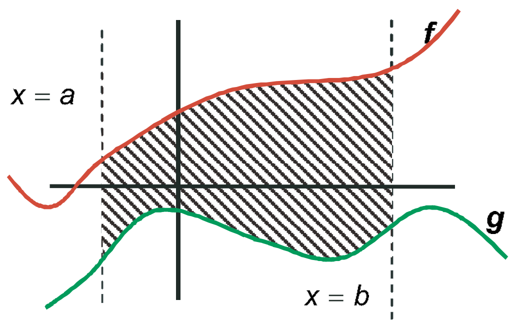
Solución :

$g(0)=\int_0^0\frac{dt}{1+e^t}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\frac{g(0)}{0}=\frac{0}{0}(ind)\overset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}g'(x)$. Usando el teorema fundamental del cálculo:

$$g'(x)=\frac{1}{1+e^x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}.$$

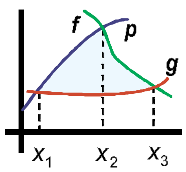
¿Cómo podemos calcular el área encerrada por dos funciones? Si las dos funciones se cortan en más de un punto, determinan una o varias regiones que tienen un área, sin necesidad de rectas verticales que la delimiten. Si no se cortan, necesitaremos de rectas verticales para poder averiguar el área encerrada por las dos funciones.





Lógicamente, el área encerrada por f y g se calcula averiguando primero la de f y después restándole la de g. Aplicando las propiedades de linealidad, podemos calcular la integral de la diferencia de f y g, pues dará el mismo resultado. Por ello, se usa una función auxiliar definida como $h(x) = f(x)-g(x)$ o $h(x) = g(x)-f(x)$, con lo que pasamos a calcular el área encerrada por una función $h(x)$ y el eje OX, ya que en los puntos en los que $f(x)=g(x)$ tenemos que $h(x)=0$, que son los puntos de corte de h con el eje OX. Así, al usar h, no hay más que seguir los pasos ya vistos. Es conveniente hacer un gráfico de la situación.

Para saber más...



¿Cómo se puede calcular el área encerrada por tres funciones? Aquí sí hay que representar las funciones para poder averiguar los extremos de integración y la función que hay que integrar en cada trozo. Observa el gráfico adjunto: hay que integrar $p(x)-g(x)$ desde el punto $x_1 = p(x)\cap g(x)$ hasta el punto $x_2 = p(x)\cap f(x)$; después se integra $f(x)-g(x)$ desde x_2 hasta $x_3 = f(x)\cap g(x)$. Ahora hay dos primitivas y dos intervalos de integración distintos.

Ejemplos

41. Halla el área encerrada por las funciones $y = x^3-4x^2+4x$ e $y=-3x^2+6x$.

Solución:

Al usar el valor absoluto, es indiferente a cuál llamemos f y a cuál g. Si $f(x)=x^3-4x^2+4x$ y $g(x)=-3x^2+6x$, entonces $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-x^2-2x$. Por lo tanto: $h(x)=0\Rightarrow x\left(x^2-x-2\right)=0\Rightarrow x=-1,0,2$.

$$\Rightarrow A=\left|\int_{-1}^{0} h(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{2} h(x)dx\right|;\ H(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}H(-1)=-\dfrac{5}{12}\\ H(0)=0\\ H(2)=-\dfrac{8}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow A=\left|H(0)-H(-1)\right|+\left|H(2)-H(0)\right|=\frac{37}{12}u^2.$$

42. Halla el área encerrada por las funciones $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$.

Solución:

$f(x)=x^2,\ g(x)=-x^2+4x\Rightarrow h(x)=f(x)-g(x)=2x^2-4x;\ h(x)=0\Rightarrow x=0,2\Rightarrow$

$$\Rightarrow A=\left|\int_{0}^{2}\left(2x^2-4x\right)dx\right|;H(x)=\frac{2x^3}{3}-2x^2\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}H(2)=-\dfrac{8}{3}\\ H(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow A=\left|H(2)-H(0)\right|=\frac{8}{3}u^2.$$

Ejemplo

43. Calcula el área determinada por la curva $y=4x^3$ y la recta $y=x$.

Solución:

$$h(x)=4x^3-x;\ h(x)=0\Rightarrow x=0,\pm\frac{1}{2}\Rightarrow A=\left|\int_{-1/2}^{0}h(x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1/2}h(x)\,dx\right|;H(x)=x^4-\frac{x^2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16},H(0)=0,H\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}\Rightarrow A=\left|H(0)-H\left(-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|H\left(\frac{1}{2}\right)-H(0)\right|=\frac{1}{8}u^2.$$

44. Determina el área encerrada por las tres rectas $y=8$, $x=0$, $x=2$ y la gráfica de $f(x)=\begin{cases}(2-x)^2, si\ x\le 1\\ x^2, si\ x>1\end{cases}$.

Solución:

$$h(x)=f(x)-y=\begin{cases}(2-x)^2-8, si\ x\le 1\\ x^2-8, si\ x>1\end{cases}=\begin{cases}x^2-4x-4, si\ x\le 1\\ x^2-8, si\ x>1\end{cases}\Rightarrow h\cap OX\Rightarrow h(x)=0\Rightarrow$$

$x^2-4x-4=0\Rightarrow x=2\pm 2\sqrt{2};\ x^2-8=0\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$. Como ninguno de los puntos está en el intervalo

$[0,2]$ y $\lim\limits_{x\to 1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)=h(1)=-7$, h es continua en $x=1$, el área es: $A=\left|\int_0^1\left(x^2-4x-4\right)dx\right|+\left|\int_1^2\left(x^2-8\right)dx\right|$;

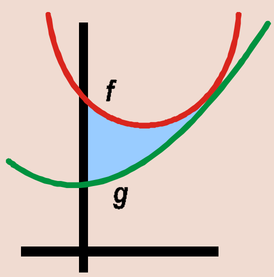
$$\left\{\begin{array}{l}H_1(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2-4x\\ H_2(x)=\dfrac{x^3}{3}-8x\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}H_1(1)=-\dfrac{17}{3}\\ H_1(0)=0\end{array}\right\};\left\{\begin{array}{l}H_2(2)=\dfrac{-40}{3}\\ H_2(1)=\dfrac{-23}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow A=\left|H_1(1)-H_1(0)\right|+\left|H_2(2)-H_2(1)\right|=$$

$$=\frac{17}{3}+\frac{17}{3}=\frac{34}{3}u^2.$$

45. Calcula a y b para que las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=ax^2+b$ sean tangentes en el punto de abscisa $x=2$. Para esos valores, dibuja las gráficas de ambas y calcula el área limitada por dichas gráficas y el eje vertical.

Solución:

Que sean tangentes significa que se cortan y que sus derivadas en el punto coinciden (pendientes de la recta tangente), luego $f(2)=g(2)\Rightarrow 4a+b=3; f'(2)=2=g'(2)=4a$. Se obtiene $a=\frac{1}{2}, b=1\Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}+1$. Para representarlas, al ser parábolas, calculamos sus vértices y las coordenadas de otros dos puntos: $f\rightarrow V(1,2),(0,3),(2,3);\quad g\rightarrow V(0,1),(-2,3),(2,3)$.



A la vista del gráfico, $A=\int_0^2\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}-2x+2\right)dx=$

$$=\left.\frac{x^3}{6}-x^2+2x\right|_0^2=\frac{4}{3}\text{ u}^2.$$

46. Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+1}{x}, si\ x\geq -1\\[2mm] \dfrac{2x}{x-1}, si\ x<-1\end{cases}$ y las rectas $y=0, x=1, x=2.$

Solución:

No hay dos funciones, pues la recta $y=0$ es el eje OX. Además, f es continua en $[1,2]$ (no está el 0 en dicho intervalo).

El área es $A=\left|\int_1^2\left(x+3+\dfrac{1}{x}\right)dx\right| \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2}{2}+3x+\ln|x|; F(2)=8+\ln 2, F(1)=\dfrac{7}{2}\Rightarrow A=|F(2)-F(1)|=\dfrac{9}{2}+\ln 2\ u^2.$

47. Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-9$, $g(x)=x^2-x-6$ y las rectas $x=-2,\ x=6.$

Solución:

$h(x)=f(x)-g(x)=x-3\Rightarrow h(x)=0\Rightarrow x=3\Rightarrow$ Hay que dividir el intervalo $[-2,6]$ en 2 trozos $[-2,3]\cup[3,6]$,

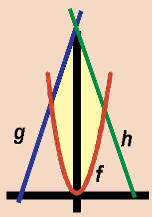
con lo que el área queda: $A=\left|\int_{-2}^{3}(x-3)\,dx\right|+\left|\int_{3}^{6}[x-3]\,dx\right|\Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2}{2}-3x\Rightarrow\begin{Bmatrix}F(-2)=8\\ F(3)=-\dfrac{9}{2}\\ F(6)=0\end{Bmatrix}\Rightarrow$

$A=|F(3)-F(-2)|+|F(6)-F(3)|=\left|-\dfrac{9}{2}-8\right|+\left|0-\left(-\dfrac{9}{2}\right)\right|=\dfrac{25}{2}+\dfrac{9}{2}=17\,u^2.$

Para saber más...

48. Representa gráficamente la región acotada limitada por la gráfica de las funciones $f(x)=\dfrac{5}{4}x^2, g(x)=\dfrac{1}{2}(5x+20), h(x)=\dfrac{1}{2}(-5x+20)$ y obtén su área.

Solución:



Se trata de una parábola $(f\rightarrow V(0,0),(-2,5),(2,5))$ y de dos rectas $(g\rightarrow(0,10),(-4,0))$, $(h\rightarrow(0,10),(4,0))$.

Los puntos de corte de las tres funciones entre sí son: $f\cap g\Rightarrow\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{5}{2}x-10=0\Rightarrow x=-2,4;$

$f\cap h\Rightarrow\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{5}{2}x-10=0\Rightarrow x=2,-4.$ Sólo valen -2 y 2. Del gráfico:

$A=\int_{-2}^{0}(g(x)-f(x))dx+\int_{0}^{2}(h(x)-f(x))dx=\int_{-2}^{0}\left(\dfrac{5x}{2}+10-\dfrac{5x^2}{4}\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-\dfrac{5x}{2}+10-\dfrac{5x^2}{4}\right)dx;\quad H_1(x)=\dfrac{5x^2}{2}+10x-\dfrac{5x^3}{12}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{Bmatrix}H_1(0)=0\\ H_1(-2)=\dfrac{-20}{3}\end{Bmatrix}; H_2(x)=-\dfrac{5x^2}{2}+10x-\dfrac{5x^3}{12}\Rightarrow\begin{Bmatrix}H_2(2)=\dfrac{20}{3}\\ H_2(0)=0\end{Bmatrix}\Rightarrow A=H_1(0)-H_1(-2)+H_2(2)-H_2(0)=\dfrac{40}{3}u^2.$

Actividades

19. Calcula $\int_{-1}^{1}\left(|x|+x+1\right)dx$, donde $|x|$ indica el valor absoluto de x.

20. Halla el área de la región acotada por la gráfica de $g(x)=x^3-4x$ y el eje OX.

21. Calcula: **a)** $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{3x^3}{x^2-4}dx$; **b)** $\int_{1}^{2}\frac{x^2+1}{x\left(x+1\right)}dx$.

22. Calcula: **a)** $\int_{-2}^{2}\frac{\left(2x-1\right)^2}{4x^2+1}dx$; **b)** $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

23. Halla el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases}-2x,\ si\ x\le 0\\ x-1,\ si\ 0<x\le 2\\ 3x-5,\ si\ x>2\end{cases}$, el eje de abscisas y las rectas x = 1, x = 3.

24. Calcula el valor de a > 0 en los siguientes casos:

a) $\int_{0}^{3}\frac{1}{x+1}dx=a$; **b)** $\int_{0}^{a}\frac{1}{x+1}dx=3$; **c)** $\int_{0}^{3}\frac{1}{x+a}dx=5$.

25. Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)=xe^{x^2}$ para $x\ge 0$, el eje OX y la recta $x=2$.

26. Se considera la función real de variable real definida por $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+3}$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

b) Representa gráficamente y calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x=0$.

27. Representa gráficamente y halla el área acotada por la gráfica de $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-1\right)^2,\ si\ x\le 1\\ \ln x,\ si\ x>1\end{cases}$ y la recta $y=1$.

28. Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y=\sqrt{2x}$ e $y=\frac{x^2}{2}$.

29. Determina el valor de $a>0$ para que el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las curvas $y=x^3$ e $y=ax$ sea igual a 4 u^2.

30. Averigua el área encerrada por la gráfica de $f(x)=x^3+5x^2+2x-8$ y el eje OX.

31. Halla una primitiva de la función $f(x)=27-x^3+3e^{2x-1}$ tal que $F\left(1\right)=26{,}75$.

32. Calcula el valor de $I=\int_{0}^{2}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ aplicando el cambio de variable $t=1+x^2$.

33. Halla el área de la región limitad por las gráficas $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=x^2+x$.

34. Calcula: $\int_{0}^{1}\left(3x^2+1\right)e^{-x}dx$.

35. Halla el área del recinto plano delimitado por $y=x^2+1$, $y=3$.

36. Calcula las siguientes integrales: **a)** $\int_0^1 e^{-2x}\left(1-x^2\right)dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx$.

37. Determina el valor de a para que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ sea 36 u^2.

38. Calcula el área encerrada por la función $f\left(x\right) = \frac{x^2}{x^2+4x+3}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$.

39. a) Halla los extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 9x$.

b) Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = -3$, $x = 3$.

40. Sean las funciones $y = x^3 - 4x^2 + 4x$, $y = -3x^2 + 6x$. Represéntalas y determina el área encerrada por ambas.

41. a) Calcula las coordenadas de los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$.

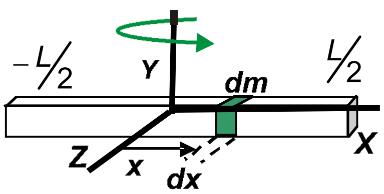
b) Halla el área de la región limitada por la gráfica de f y el semieje positivo OX.

42. a) Determina a, b y c sabiendo que las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + c$ se cortan en los puntos $(-2,-3)$ **y** $(1,0)$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto $(-2,-3)$.

c) Calcula el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

3.4. Aplicaciones de la integral en la Física



El uso de la integral en la Física es muy habitual. Aparece al intentar calcular el campo magnético creado por un hilo conductor, el campo gravitatorio creado por una barra o cuando se calcula un momento de inercia, que se define como $I = \int r^2 dm$.

Como ejemplo, vamos a calcular el momento de inercia de una barra plana uniforme de masa M y longitud L (densidad lineal constante $\rho = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx}$), que gira respecto de un eje perpendicular que pasa por el centro de dicha barra. Para el planteamiento, y al haber sólo una dimensión, pues la barra es plana, se descompone en trozos de longitud dx y de masa dm, relacionadas a través de la densidad.

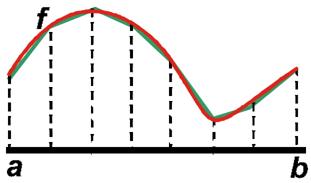
Se tiene:

$$r = x, dm = \rho\cdot dx \Rightarrow I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \rho\cdot dx = \rho \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-L/2}^{L/2} = \rho\frac{L^3}{12} \overset{\rho=\frac{M}{L}}{=} \frac{1}{12}ML^2$$

Para saber más...

Aplicaciones al cálculo de longitudes de arco de curvas, áreas y volúmenes de cuerpos de revolución.

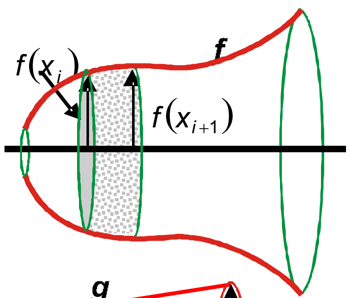
La longitud que recorre una función desde un punto ($a,f(a)$) a otro ($b,f(b)$) se llama *longitud de arco*. Para su cálculo, podemos hacer una partición en n trozos y aproximar la curva mediante una línea poligonal. Por convención, $x_0 = a$, $x_n = b$. Cada uno de los segmentos de la línea tiene una longitud (teorema de Pitágoras):



$l_i = \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2} = \sqrt{1+\left(\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right)^2}\,(x_{i+1}-x_i)$. Por el teorema del valor medio,

$\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f'(c_{i+1}) \Rightarrow l_i = \sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\,(x_{i+1}-x_i)$. La longitud de arco es la suma de todas estas longitudes:

$L_{arco} = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\cdot\Delta x_i$. Cuando $n \to \infty$, $\sum \to \int$, $\Delta x_i \to dx$ y , se obtiene que: $\boxed{L_{arco} = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$.

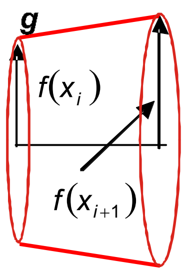


Un cuerpo de revolución es aquel que se obtiene al girar una curva respecto de un eje. El eje que usaremos será el eje OX, pues las fórmulas quedan más directas. Después mostraremos cómo queda si se usa el eje OY.

Para calcular el volumen podemos hacer rodajas el sólido. Cada rodaja es un tronco de cono, cuyo volumen está comprendido entre los volúmenes de dos cilindros de igual altura x_{i+1} y x_i radios $f(x_i), f(x_{i+1})$, luego $\pi[f(x_i)]^2(x_{i+1}-x_i) \le$

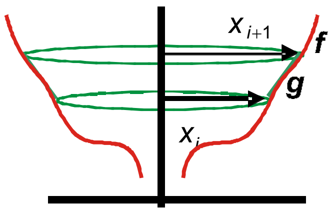
$\le V_{TC} \le \pi[f(x_{i+1})]^2(x_{i+1}-x_i)$. Cuando $x_{i+1}-x_i \to 0$, $V_{TC} \to$

$\to V_{Cilindro} = \pi[f(x_i)]^2(x_{i+1}-x_i)$.



Sumamos todos los troncos de cono, mejoramos la aproximación y obtenemos que:

$\boxed{V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$.



El área lateral del tronco de cono es $2\pi rg = 2\pi f(x_i)\cdot\sqrt{1+[f'(c)]^2}\,(x_{i+1}-x_i)$,

pues g es la longitud de la línea poligonal que usamos para la longitud de arco.

Siguiendo el mismo proceso, se obtiene: $\boxed{S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$.

Si usamos como eje de giro el eje OY, x e y cambian sus papeles. Para ello, $x = g(y)$ (usando la inversa f^{-1}) y se integra en y, no en x.

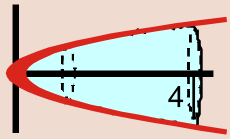
Como se ve en las fórmulas, lo más sencillo de calcular es el volumen, convirtiéndose en ardua tarea el cálculo de la longitud y de la superficie.

Ejemplos

49. Halla la longitud de arco de la parábola de ecuación $y = 3\sqrt{x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 4$. Averigua también el volumen del paraboloide de revolución que se obtiene al girar ese trozo de parábola respecto al eje OX.

Solución :

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} \Rightarrow L_{arco} = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4x}}\,dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{4x+9}{4x}}\,dx = 3\int_0^4 \sqrt{\frac{4x/9+1}{4x}}\,dx.$$



Se hace el cambio: $\displaystyle\int \sqrt{\frac{4x/9+1}{4x}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} 4x/9 = sh^2t \Rightarrow sht = \frac{2\sqrt{x}}{3} \\ dx = \frac{9}{2}sht\cdot cht\cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \sqrt{\frac{sh^2t+1}{9sh^2t}}\,\frac{9}{2}\,sht\cdot chtdt = \frac{3}{2}\int \frac{cht}{sht}\cdot sht\cdot cht\cdot dt =$

$$= \frac{3}{2}\int ch^2t\cdot dt = = \frac{3}{2}\int (ch2t+1)\,dt == \frac{3sh2t}{8} + \frac{3t}{4} = \frac{3}{4}(sht\cdot cht + t) = \frac{\sqrt{x}\sqrt{9+4x}}{6} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{9+4x}}{3}\right| = F(x).$$

Luego $L_{arco} = 3\big(F(4)-F(0)\big) = 5 + \frac{9}{4}\ln 3 \cong 7,472$ u, pues $F(0) = 0$. $V = \pi\displaystyle\int_0^4 9x\,dx = \left.\frac{9\pi x^2}{2}\right|_0^4 = 72\pi \cong 226,195$ u^3.

En la evaluación de estas expresiones es de gran ayuda la calculadora científica, más si es del tipo *S-VPAM*, pues, usando las memorias, permite escribir la expresión en la calculadora casi como en el papel. Por ejemplo, si introducimos un número en la memoria A, con la secuencia $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\text{RCL}}$ (tecla $\boxed{\text{STO}}$) $\boxed{\text{A}}$, el cálculo de $F(A)$ sería:

$\boxed{\sqrt{}}\,A\boxed{X}\boxed{\sqrt{}}\boxed{(}9\boxed{+}4\boxed{X}A\boxed{)}\boxed{/}6\boxed{+}3\boxed{/}4\boxed{X}\boxed{ln}\boxed{(}\boxed{(}2\boxed{X}\boxed{\sqrt{}}\,A\boxed{+}\boxed{\sqrt{}}\boxed{(}9\boxed{+}4\boxed{X}A\boxed{)}\boxed{)}\boxed{/}3\boxed{)}$

50. Halla la longitud de arco de la curva $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (llamada catenaria), entre $x = 0$ y $X = !$. Averigua también la superficie y el volumen del sólido engendrado al girar el trozo de curva alrededor del eje OX.

Solución :

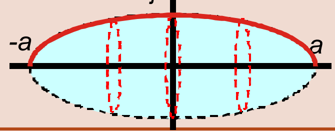
$$(chx)' = shx \Rightarrow L_{arco} = \int_0^1 \sqrt{1+sh^2x}\,dx = \int_0^1 chxdx = shx\big|_0^1 = sh1 = \frac{e-e^{-1}}{2} \cong 1,175 \text{ u.}$$

$$S = 2\pi\int_0^1 chx\sqrt{1+sh^2x}\,dx = 2\pi\int_0^1 ch^2xdx = \pi\int_0^1 (ch2x+1)\,dx = \pi\left.\left(\frac{sh2x}{2}+x\right)\right|_0^1 \Rightarrow S = \pi\left(\frac{sh2}{2}+1\right) \cong 8,839 \text{ u}^2;$$

$$V = \pi\int_0^1 ch^2xdx = \frac{\pi}{2}\left.\left(\frac{sh2x}{2}+x\right)\right|_0^1 = 4,419 \text{ u}^3.$$

51. Dada la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, halla el volumen engendrado al girar la semielipse positiva alrededor del eje OX.

Solución : $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow V = \dfrac{\pi b}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right) = \dfrac{\pi b}{a}\left.\left(a^2x - \dfrac{x^3}{3}\right)\right|_{-a}^{a}$; $V = \dfrac{4\pi}{3}a^2b$ u^3.



Actividades

43. Halla la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, así como la superficie y el volumen de la esfera engendrada **al** girar la semicircunferencia positiva alrededor del eje OX.

44. Representa gráficamente y halla la longitud de arco de la curva $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 1$. Averigua también la superficie y el volumen del sólido engendrado al girar dicho trozo de curva alrededor del eje OX.

45. Halla el volumen del hiperboloide de revolución que se obtiene al hacer girar el trozo de la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$ comprendido entre $x = 1$ y $x = 5$.

Recuerda

- F es una **función primitiva o primitiva** de f si $F'(x)=f(x)$.
- **Integral indefinida**: $\int f = F + k$ ó $\int f(x)dx = F(x)+k$.

Integrales inmediatas

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+k,\ n\in R-\{-1\}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int senx\cdot dx = -\cos x + k$
$\int (1+tg^2 x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + k$	$\int \cos x\cdot dx = senx + k$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sen\ x + k = -arc\ \cos\ x + k$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x + k$

- **Integración por partes**: $\int udv = u\cdot v - \int v\cdot du$.
- **Propiedades de linealidad :**
  - $\int (f+g) = \int f + \int g \equiv$ La integral de una suma es igual a la suma de las integrales.
  - $\int (\lambda f) = \lambda \int f \equiv$ La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de a función.
- Las dos propiedades anteriores pueden resumirse como: $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$.
- **Teorema fundamental del cálculo :** $\int_a^x f(t)dt = F(x)+k$.
- **Regla de Barrow :** $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$.
- **Área encerrada por una función y la parte positiva del eje OX :** $Área = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|$.
- **Área encerrada por dos funciones *f* y *g* :** se define la función $h(x)=f(x)-g(x)$ y se calcula el área encerrada por h y la parte positiva del eje OX.
- **Longitud de arco :** $\boxed{L_{arco} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}$.
- **Volumen de un sólido de revolución :** $\boxed{V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx}$.
- **Superficie de un sólido de revolución :** $\boxed{S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}$.