UNIDAD

9 Aplicaciones de la derivada (II)

Si la luz recorre el camino para el que invierte el menor tiempo, ¿cuál será la trayectoria que seguirá si pasa del aire al agua? Este es un ejemplo de optimización de una función; en este caso del tiempo empleado por la luz en recorrer un espacio. Optimizar es averiguar el mayor o el menor valor de una función, esto es, sus extremos relativos, algo que ya sabemos de Primero y que repasamos en la Unidad anterior. Sin embargo, aquí hay que escribir la función que debemos optimizar, lo que pone a prueba nuestros conocimientos matemáticos, pero también nos permite referirnos a casos concretos que pueden aplicarse a la vida diaria.

• *Isaac Newton* (Wikipedia.org Dominio Público)

Por lo tanto, nuestras herramientas serán por un lado la derivada, ideada por Leibniz y Newton (1643 – 1727) en el siglo XVII, y por otro la construcción de la función que se ajuste al problema. Tenemos que ser capaces de transcribir al lenguaje algebraico las situaciones que aparezcan. Combinamos una aplicación de las matemáticas puramente *mecánica* (cálculo de los extremos relativos de una función usando las derivadas) con otra que nos exigirá recordar las fórmulas de longitudes, áreas, volúmenes y otras más para construir las funciones que hay que optimizar.

Si repasamos lo hecho hasta ahora con las funciones, vemos que podemos conocer prácticamente todo lo que interesa sobre ella. ¿Seremos capaces de representarla gráficamente? Juntando la información que se obtiene directamente de la función (dominio, simetrías, puntos de corte con los ejes, signo de la función, asíntotas), con la que procede de la derivada primera (monotonía, puntos críticos) y de la segunda (curvatura, puntos de inflexión) podemos esbozar una gráfica que nos permite, de un vistazo, conocer el comportamiento de la función.

Acaba la Unidad introduciendo sucintamente, y sólo para los más interesados, los polinomios de Taylor o desarrollo en serie de Taylor para una función. Dado que para su cálculo sólo necesitamos usar la derivación, se convierte en un buen ejercicio para calcular derivadas de órdenes superiores. También sirve como introducción para el alumnado que vaya a cursar un Análisis Matemático en un primer curso de Universidad.

Con el estudio de esta Unidad nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Optimizar funciones, hallando los valores que hacen que la función sea máxima o mínima.
2. Estudiar y representar gráficamente una función.

Aplicaciones de la derivada (II)

Optimización de funciones

Estudio y representación de funciones

Información obtenida de la función:

1. Dominio
2. Simetría
3. Puntos de corte con los ejes
4. Signo de la función
5. Asíntotas

Información obtenida de la derivada primera:

6. Monotonía (crecimiento y decrecimiento)
7. Puntos críticos (máximos y mínimos)

Información obtenida de la derivada segunda:

7. Puntos críticos (máximos y mínimos)
8. Curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión

PARA SABER MÁS...

Desarrollo en serie de Taylor
Aproximación de una función por un polinomio

ÍNDICE DE CONTENIDOS

UNIDAD 9

APLICACIONES DE LA DERIVADA (II)

1. Optimización de funciones

Optimizar una función consiste en buscar los valores de la variable para los que dicha función alcanza su mayor o menor valor. Esto ocurre habitualmente en sus extremos relativos; por lo tanto, los calcularemos como hacíamos en la Unidad anterior. ¿A qué viene entonces este apartado? Cuando hablamos de calcular los máximos y mínimos damos por hecho que nos dan la función que debemos optimizar, mientras que si decimos optimizar sobreentendemos que hemos de construir la función que se ha de optimizar, que es el paso realmente complicado y diferente.

El tipo de problemas al que se le puede aplicar la técnica de la **optimización de funciones** es extensísimo. Habitualmente tendremos que apoyarnos en conocimientos aritméticos, algebraicos o geométricos previos y en una lectura detallada, que nos permita averiguar cuál será y qué forma tendrá la función que hemos de optimizar. También son de gran ayuda las simetrías que aparezcan en el problema.

Pueden servir de guía las siguientes orientaciones:

I. se identifica la función que hay que optimizar;

II. se nombran sus variables;

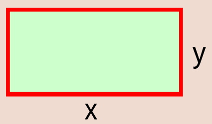
III. se escribe matemáticamente la función;

IV. se calculan sus extremos relativos.

Para no complicar los cálculos, si en la función se puede sacar factor común algún término constante y queda simplificada, lo haremos y usaremos esta simplificación.

Ejemplos

1. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima y 28 m de perímetro.



Solución:

Hacemos un gráfico donde escribimos las variables; la **función que tenemos que optimizar** es el área: $A(x,y) = x \cdot y$. Surge un contratiempo muy habitual: la función consta de dos variables. Como sólo sabemos manejar funciones de una variable, hay que encontrar una **relación entre las variables**, que permita despejar una en función de la otra. En este caso, dicha relación es el perímetro: $2x + 2y = 28 \Rightarrow x + y = 14$.

Despejamos y sustituimos en la función, que ya será de una variable. Después calculamos sus extremos relativos:

$$y = 14 - x \Rightarrow A(x) = x \cdot (14 - x) = 14x - x^2.$$

Antes de derivar observemos la función: es una función cuadrática (parábola) cuyo vértice es un máximo (el coeficiente de x^2 es negativo). La función está bien construida. Si intercambiamos x e y, ni la función ni la relación cambian. Hay una simetría que nos permite aventurar que el rectángulo de área máxima es un cuadrado. $A'(x) = 14 - 2x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow A''(x) = -2 \Rightarrow A''(7) = -2 < 0$ (máximo). El área es máxima para $x = y = 7$ cm. Por lo tanto, el rectángulo de área máxima y perímetro 28 cm es un cuadrado de lado 7 cm y área 49 cm^2.

Aparte de dar el valor de las variables que optimizan la función, conviene dar también el valor optimizado de dicha función, y una somera explicación del resultado obtenido.

2. Descomponer el número 81 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

Solución:

Llamamos x e y a los sumandos. Siguiendo los pasos del ejemplo 1 escribimos:

Función que se debe optimizar: $P(x,y) = x \cdot y^2$.

Relación entre las variables: $x + y = 81$.

Para no tener que desarrollar un binomio despejamos x: $x = 81 - y$. Se obtiene: $P(y) = 81y^2 - y^3 \Rightarrow P'(y) = 162y - 3y^2$, $162y - 3y^2 = 0$, $y(162 - 3y) = 0$, $y = 0$ (absurda) e $y = 54$; $P''(y) = 162 - 6y \Rightarrow P''(0) = 162 > 0$; (mínimo); $P''(54) = -162 < 0$(máximo). Cuando $y = 54$ y $x = 27$ (un sumando es igual a la mitad del que está elevado al cuadrado), el producto es máximo y vale $P_{máx} = 78732$.

Observa que manejamos la variable y igual que la x, porque ambas son ahora variables independientes, siendo las dependientes el producto y la suma. Aparece una solución absurda y descartable, ya que si un número valiese cero, el producto sería cero. Sin embargo, conviene reforzar nuestra opinión con el cálculo posterior, que debe corroborar nuestra afirmación, pues en caso contrario deberíamos pensar que nos hemos confundido. Si al repasar los cálculos no vemos ningún error, se concluye que el problema planteado no tiene solución, aunque éste no es el presente caso.

3. Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible.

¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero?

¿Qué superficie máxima interior tiene la portería?

Solución:

Se trata de construir tres lados de un rectángulo (el cuarto es el suelo) de modo que su superficie sea máxima. Llamando x a la base e y a la altura queda:

Función que se debe optimizar: $A(x,y) = x \cdot y$.

Relación entre las variables: $x + 2y = 10$.

Para evitar fracciones despejamos x: $x = 10 - 2y \Rightarrow A(y) = (10 - 2y) \cdot y = 10y - 2y^2$; $A'(y) = 10 - 4y \Rightarrow A'(y) = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow A''(y) = -4 \Rightarrow A''\left(\frac{5}{2}\right) = -4 < 0.$$

a) Máximo para $y = \frac{5}{2} = 2{,}5\,m;\ x = 5\,m;$ **b)** $A_{máx} = A\left(5, \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot 5 = \frac{25}{2} = 12{,}5\,m^2.$

4. La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

Solución:

Llamando a los números x, y, z, respectivamente, podemos escribir:

Función a optimizar: $P(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$.

Relaciones entre las variables: $\begin{cases} x+y+z=60 \\ x+2y+3z=120 \end{cases}$

Al tener 3 variables han de aparecer 2 relaciones para poder despejar dos de ellas en función de la tercera x. Planteamos y resolvemos el sistema siguiente:

$\left.\begin{array}{l} y+z=60-x \\ 2y+3z=120-x \end{array}\right\} \Rightarrow z=x;\ y=60-2x$. La función queda: $P(x)=60x^2-2x^3$; $P'(x)=120x-6x^2$,

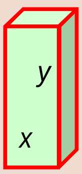
$P'(x)=0; 6x(20-x)=0 \Rightarrow x=0\ (absurda),\ x=20;\ P''(x)=120-12x \Rightarrow P''(0)=120>0$ (mínimo);

$P''(20)=-120<0$ (máximo).

5. Se desea construir cajas de embalaje en forma de prisma cuadrangular de modo que la suma de las tres dimensiones sea 72. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que la capacidad de las cajas sea máxima?

Solución:

Al ser un prisma cuadrangular (su base es un cuadrado), sólo hay 2 variables. Usando la fórmula del volumen de un prisma escribimos:



Función a optimizar: $V(x,y) = A_{base} \cdot h = x^2 y$.

Relaciones entre las variables: $2x + y = 72$.

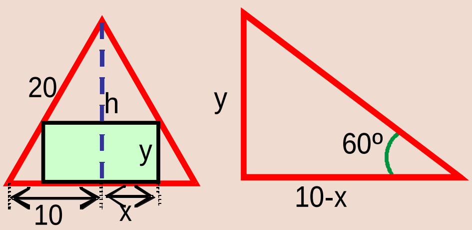
Despejamos y : $y = 72-2x \Rightarrow V(x) = 72x^2 - 2x^3$; $V'(x) = 144x - 6x^2$; $V'(x) = 0 \Rightarrow 6x(24-x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0\ (absurda),\ x = 24;\ V''(x) = 144 - 12x \Rightarrow V''(0) = 144 < 0\ (mínimo); V''(24) = -144\ (máximo)$.

La caja tiene capacidad máxima para $x = y = 24\ u$, valiendo $V_{máx} = V(24) = 13824\ u^3$.

Al no especificarse unidad de medida escribimos u como unidad de longitud y u^3 como la de volumen. Observa la regularidad: los rectángulos de área máxima son cuadrados y los prismas cuadrangulares de volumen máximo son hexaedros regulares (cubos).

6. Averigua las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo equilátero de 20 cm de lado.



Solución:

Llamamos $2x$ a la base del rectángulo para evitar fracciones; usamos el teorema de Pitágoras para averiguar el valor de la altura del triángulo: $h = \sqrt{400-100} = 10\sqrt{3}$ y el teorema de Tales o la definición de tangente para la relación.

Función a optimizar: $A(x,y) = 2xy$.

Relación entre las variables: $\dfrac{y}{10-x} = \dfrac{10\sqrt{3}}{10}$ ó $tg\ 60º = \dfrac{y}{10-x} \Rightarrow y = \sqrt{3}(10-x)$.

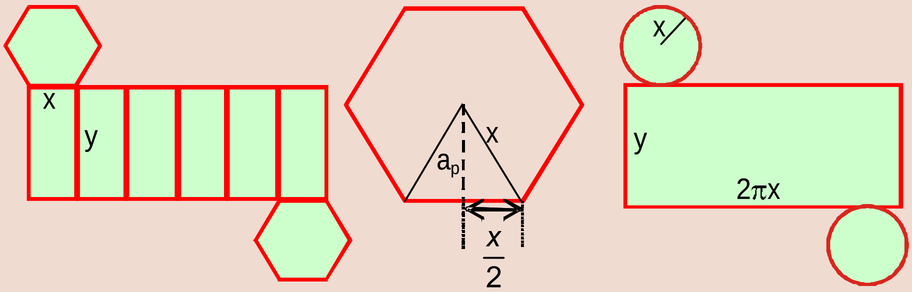
$A(x) = 2\sqrt{3}x(10-x) \Rightarrow f(x) = \dfrac{A(x)}{2\sqrt{3}} = 10x - x^2$; $f'(x) = 10 - 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5$;

$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(5) = -2 < 0$ (máximo). El área es máxima cuando la base del rectángulo mide $b = 2x = 10$ cm y su altura $y = 5\sqrt{3}$ cm, valiendo $A_{máx} = A(5) = 50\sqrt{3} \cong 86{,}6\ \text{cm}^2$.

Simplificamos la función para el cálculo, aunque el resultado de la optimización hay que hallarlo en la función sin simplificar.

7. Una empresa desea un recipiente para envasar un litro de un producto líquido. Quieren que sea o un prisma recto con base un hexágono regular o un cilindro. Averigua qué forma ha de tener la base para que el gasto de material sea mínimo.

Solución:



El gasto en material vendrá dado por la superficie de las figuras. Como tanto el prisma como el cilindro son cuerpos rectos, la superficie puede separarse en superficie lateral (que son rectángulos) y superficie de las bases (el hexágono regular o un círculo). El volumen del recipiente (1000 cm^3) proporciona la relación entre las variables.

Prisma hexagonal:

Función a optimizar: $S = S_{lateral} + S_{bases}$.

Relación entre las variables: $V = A_{base}\cdot h$.

Base hexagonal: $A_{hexágono} = \frac{P\cdot a_p}{2}$, siendo P el perímetro y a_p la apotema, que se obtiene usando el teorema de Pitágoras. Queda $A_h = \frac{6x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$.

Función a optimizar: $S(x,y) = 6xy + 2\cdot\frac{3\sqrt{3}x^2}{2} = 6xy + 3\sqrt{3}x^2$.

Relación entre las variables: $\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\cdot y = 1000 \Rightarrow y = \frac{2000}{3\sqrt{3}x^2}$.

$$S(x) = \frac{4000\sqrt{3}}{3x} + 3\sqrt{3}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{4000}{x} + 9x^2\right) \Rightarrow f(x) = \frac{S(x)}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{4000}{x} + 9x^2 \Rightarrow$$

$f'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 18x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{4000}{18}} = 10\sqrt[3]{\frac{2}{9}} \cong 6,057$ cm;

$f''(x) = \frac{8000}{x^3} + 18 \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{4000}{18}}\right) = 54 < 0$ (mínimo). Cuando $x_{min} = 10\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ cm e

$y = \frac{2000}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{4000^2}{18^2}}} \overset{racionalizando}{=} \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{4000}{18}} = \sqrt{3}x_{mín} \cong 10,491$ cm, se tiene el gasto mínimo que vale

$S_{min} = S(x_{min}, y_{min}) = 6x_{min}\cdot\sqrt{3}x_{mín} + 3\sqrt{3}x^2_{mín} = 9\sqrt{3}x^2_{min} \cong 571,911$ cm^2.

Cilindro :

Función a optimizar: $S(x,y)=2\pi xy+2\pi x^2$.

Relación entre las variables: $\pi x^2 y=1000 \Rightarrow y=\dfrac{1000}{\pi x^2}$.

$$S(x)=\frac{2000}{x}+2\pi x^2 \Rightarrow f(x)=\frac{S(x)}{2}=\frac{1000}{x}+\pi x^2 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1000}{x^2}+2\pi x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\cong 5{,}419 \text{ cm};$$

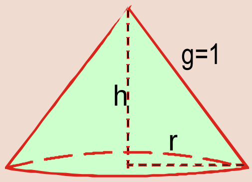
$$f''(x)=\frac{2000}{x^3}+2\pi \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)=6\pi<0 \Rightarrow \text{el gasto es mínimo para } x_{mín}=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ e } y_{mín}=\frac{1000}{\pi\sqrt[3]{\frac{500^2}{\pi^2}}} \overset{racionalizando}{=}$$

$$=2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}=2x_{mín}\cong 10{,}839 \text{ cm, valiendo } S_{mín}=S(x_{mín},y_{mín})=2\pi x_{mín}\cdot 2x_{mín}+2\pi x_{mín}^2=6\pi x_{mín}^2\cong 553{,}581 \text{ cm}^2.$$

Se gasta menos material usando un cilindro. Al aumentar el número de lados del polígono regular base del prisma, disminuye la superficie total. Si el número de lados es infinito, el polígono es un círculo (ver **Actividad 5**).

8. ¿Qué dimensiones tiene el cono de volumen máximo y generatriz 1m?

Solución:



Función a optimizar: $V(r,h)=\dfrac{1}{3}A_{base}\cdot h=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h.$

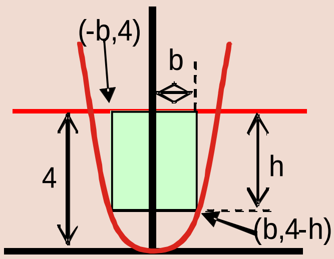
Relación entre las variables: $h^2+r^2=1,\ r^2=1-h^2 \quad V(h)=\dfrac{\pi}{3}(1-h^2)\cdot h \Rightarrow f(h)=\dfrac{V(h)}{\pi/3}=h-h^3 \Rightarrow$

$$f'(h)=1-3h^2 \Rightarrow f'(h)=0 \Rightarrow h=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f''(h)=-6h \Rightarrow f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-2\sqrt{3}<0 \Rightarrow \text{el volumen es}$$

máximo cuando $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m y $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ m, y el volumen máximo vale $V_{máx}=V\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}$ m^3.

9. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima cuyos vértices están sobre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=4$. Indica también las coordenadas de dichos vértices.

Solución:



Función a optimizar: $A=2bh$.

Relación entre las variables: $4-h=b^2$, pues es un punto de la parábola.

$h=4-b^2 \Rightarrow A(b)=8b-2b^3;\ A'(b)=8-6b^2 \Rightarrow A'(b)=0 \Rightarrow 8-6b^2=0$

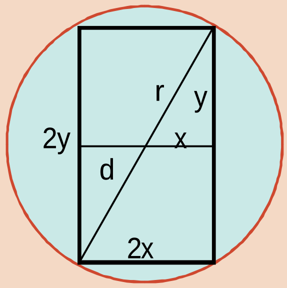
$\Rightarrow b=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\ A''\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-8\sqrt{3}<0 \Rightarrow$ El área es máxima para un

rectángulo de base $2b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ u, altura $h=\dfrac{8}{3}$ u, siendo $A_{máx}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$ u^2. Las coordenadas de los vértices del

rectángulo de área máxima son $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{4}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{4}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},4\right)$ y $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},4\right)$.

10. Demuestra que de todos los rectángulos de área fija *a*, el cuadrado es el que tiene el círculo circunscrito de área mínima.

Solución:



Función a optimizar: $A(x,y)=\pi\left(x^2+y^2\right)$.

Relación entre las variables: $4xy=a$.

$$y=\frac{a}{4x}\Rightarrow A(x)=\pi\left(x^2+\frac{a^2}{16x^2}\right)\Rightarrow A'(x)=\pi\left(2x-\frac{a^2}{8x^3}\right)\Rightarrow A'(x)=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow x^4=\dfrac{a^2}{16}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{a}}{2}$; $A''(x)=\pi\left(2+\dfrac{3a^2}{8x^4}\right)\Rightarrow A''\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)=\pi(2+6)=8\pi>0\Rightarrow$ el área es mínima cuando la base vale $2x=\sqrt{a}$ y la altura $2y=\dfrac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$. Se trata de un cuadrado.

Ciertas técnicas pueden servir de gran ayuda. En concreto, si la función es positiva y viene dada por una raíz cuadrada, podemos usar su cuadrado, evitando cálculos más complicados. Este resultado se puede enunciar del siguiente modo:

Si *f*, función continua, derivable al menos dos veces y positiva en x_0, tiene un extremo relativo en x_0, f^2 tiene el mismo extremo relativo en x_0.

Demostración: como *f* tiene un extremo relativo en x_0, $f'(x_0)=0$ y $\operatorname{sgn} f''(x_0)$ tendrá un valor determinado.

Hagamos $g(x)=\left[f(x)\right]^2$. Así, $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)\Rightarrow g'(x_0)=2f(x_0)\cdot f'(x_0)=0$, pues $f'(x_0)=0$, $g''(x)=$

$=2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f''(x)\Rightarrow g''(x_0)=2\left[f'(x_0)\right]^2+2f(x_0)\cdot f''(x_0)=2f(x_0)\cdot f''(x_0)\Rightarrow \operatorname{sgn} g''(x_0)=\operatorname{sgn} f''(x_0)$.

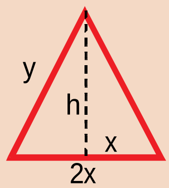
Este teorema lo usamos para hallar el extremo pero, lógicamente, el valor óptimo de la función lo calcularemos en la función de partida, no en su cuadrado.

Ejemplos

11. ¿Qué dimensiones tiene el triángulo isósceles de área máxima y perímetro 60 m?

Solución:

El área de un triángulo es $A_{tr}=\dfrac{b\cdot h}{2}$. Como hay que hallar la longitud de los lados, escribimos *b* y *h* en función de *x* e *y*. Para evitar fracciones $b=2x$ y obtenemos $h=\sqrt{y^2-x^2}$.



Función a optimizar: $A(x,y)=x\cdot\sqrt{y^2-x^2}$.

Relación entre las variables: $2x+2y=60\Rightarrow x+y=30\Rightarrow y=30-x$

$$A(x)=x\cdot\sqrt{(30-x)^2-x^2}=x\cdot\sqrt{900-60x}\Rightarrow\left[A(x)\right]^2=x^2(900-60x)=900x^2-60x^3.$$

Dividimos $\left[A(x)\right]^2$ por 60: $f(x)=\dfrac{\left[A(x)\right]^2}{60}=15x^2-x^3$; $f'(x)=30x-3x^2\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=0(\textit{absurda}), x=10$;

$f''(x)=30-6x\Rightarrow f''(0)=30>0$ (mínimo); $f''(10)=-30<0\Rightarrow$ El área del triángulo es máxima cuando $b=2x=y=20$ cm (aparte de isósceles es equilátero), valiendo $A_{máx}=A(10)=100\sqrt{3}\cong 173{,}205$ cm^2.

12. Encuentra las coordenadas de los puntos de la parábola $y = x^2$ que están a la mínima distancia del punto (0,5).

Solución :

La distancia entre dos puntos se calcula con $dist(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Función a optimizar: $dist(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-5)^2}$.

Relación entre las variables: $y = x^2$.

$$dist(x) = \sqrt{x^2 + (x^2-5)^2} = \sqrt{x^4 - 9x^2 + 25} \Rightarrow f(x) = [dist(x)]^2 = x^4 - 9x^2 + 25 \Rightarrow$$

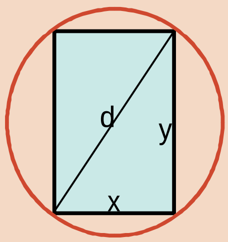
$$f'(x) = 4x^3 - 18x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 18 \Rightarrow$$

$\begin{cases} f''(0) = -18 < 0 (máximo) \\ f''\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = 36 > 0 (mínimo) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Los puntos de la parábola $y = x^2$ que están a la mínima distancia del punto (0,5) son $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{9}{2}\right), \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{9}{2}\right)$.

13. Demuestra que de todos los rectángulos inscritos en un círculo, el cuadrado es el de área máxima.

Solución :

Llamamos d al diámetro del círculo, x a la base e y a la altura del rectángulo. El diámetro del círculo es constante y los que variarán son x e y. Hay que demostrar que el área máxima se tiene cuando $x = y$.



Función a optimizar: $A(x,y) = xy$.

Relación entre las variables: $x^2 + y^2 = d^2$.

$$y^2 = d^2 - x^2 \Rightarrow f(x) = [A(x)]^2 = x^2(d^2 - x^2) = d^2x^2 - x^4;$$

$$f'(x) = 2d^2x - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x(d^2 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = 0\ (absurda), x = \frac{d}{\sqrt{2}};$$

$f''(x) = 2d^2 - 12x^2 \Rightarrow f''\left(\dfrac{d}{\sqrt{2}}\right) = -4d^2 < 0 \Rightarrow$ el área es máxima para el cuadrado que tiene $x = y = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

Hay que tener cuidado con este procedimiento, porque no se aplica cuando la función sea la suma de dos o más raíces cuadradas.

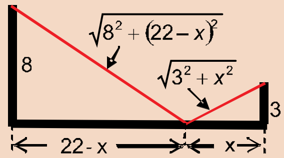
Para saber más...

Ejemplos

14. Se desea sujetar dos postes de alturas 8 y 3 m, separados entre sí 22 m, anclando al suelo un único cable de acero, de modo que el gasto en cable sea el mínimo.

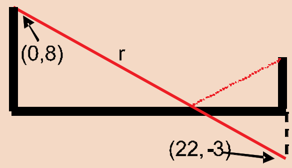
Solución:

La **función a optimizar** (la longitud del cable) es: $f(x)=\sqrt{8^2+(22-x)^2}+\sqrt{3^2+x^2}$



Aquí no sirve elevar al cuadrado, pues al desarrollar el binomio, el doble producto será otra raíz cuadrada. Hay que derivarlo tal y como está.

Puede adoptarse otra estrategia basada en la simetría: hacemos otro gráfico, en el que reflejamos el poste de 3 m, de modo que los extremos de ambos postes se unen mediante una recta, que es la distancia más corta entre dos puntos. El punto de corte de dicha recta con el eje *OX* nos dará la distancia a la que hay que anclar el cable al suelo. La recta que pasa por (0,8) y (22,–3) es:



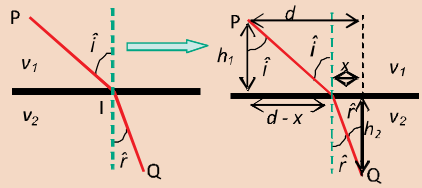
$r: y=-\frac{1}{2}x+8$; corta al eje OX en el punto $-\frac{1}{2}x+8=0\Rightarrow x=16$.

Por lo tanto, hay que clavar el cable en el suelo al 16 m del poste de 8 m y a 6 m del poste de 3 m.

15. Si la luz sigue el camino para el que el tiempo invertido en recorrerlo es mínimo, averigua qué relación habrá entre el ángulo de incidencia ($\hat{i}$) y el de refracción ($\hat{r}$), cuando la luz pasa de un medio en el que se mueve con velocidad v_1 a otro en el que su velocidad es v_2.

Solución:

Hacemos un gráfico y escribimos las variables. Suponemos que la luz sale de un punto *P*, del medio 1, incide en el punto *I* y llega al punto Q del medio 2. Al ser la velocidad constante $t=\frac{s}{v}$. El espacio recorrido en cada medio se calcula usando el teorema de Pitágoras. La función a optimizar es la suma de los tiempos invertidos en recorrer cada tramo.



Función a optimizar: $f(x)=t_1+t_2=\frac{\sqrt{h_1^2+(d-x)^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_2^2+x^2}}{v_2}$.

$$f'(x)=\frac{-2(d-x)}{2v_1\sqrt{h_1^2+(d-x)^2}}+\frac{2x}{2v_2\sqrt{h_2^2+x^2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{-(d-x)}{\sqrt{h_1^2+(d-x)^2}}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{x}{\sqrt{h_2^2+x^2}}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\frac{(d-x)}{v_1\sqrt{h_1^2+(d-x)^2}}=\frac{x}{v_2\sqrt{h_2^2+x^2}}\Rightarrow$$

usando a la definición de seno en un triángulo rectángulo, obtendríamos: $sen\,\hat{i}=\frac{d-x}{\sqrt{h_1^2+(d-x)^2}}$; $sen\,\hat{r}=\frac{x}{\sqrt{h_2^2+x^2}}$, lo que nos lleva a que

$\frac{sen\,\hat{i}}{v_1}=\frac{sen\,\hat{r}}{v_2}$. Calculemos con cuidado la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{\sqrt{h_1^2+(d-x)^2}+(d-x)\cdot\frac{-(d-x)}{\sqrt{h_1^2+(d-x)^2}}}{h_1^2+(d-x)^2}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{\sqrt{h_2^2+x^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{h_2^2+x^2}}}{h_2^2+x^2}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{h_1^2+(d-x)^2-(d-x)^2}{\left[h_1^2+(d-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{h_2^2+x^2-x^2}{\left[h_2^2+x^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{h_1^2}{\left[h_1^2+(d-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{h_2^2}{\left[h_2^2+x^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f''(x)>0$$

para todo valor de *x*; luego, la suma de tiempos es mínima cuando $\frac{sen\,\hat{i}}{v_1}=\frac{sen\,\hat{r}}{v_2}$.

En Óptica se usa el índice de refracción $n=\frac{c}{v}\Rightarrow v=\frac{c}{n}$ en lugar de la velocidad (c = velocidad de la luz en el aire, v = velocidad de la luz en el medio). En este caso la relación queda $n_1\cdot sen\,\hat{i}=n_2\cdot sen\,\hat{r}$.

Como los senos de los ángulos dependen de *x* y no se pueden considerar constantes, es preferible no usarlos al escribir la función, ya que puede llevarnos a error al derivar.

Este ejemplo intenta poner de relieve la suma importancia de la optimización en la Física. Mediante el cálculo variacional, que consiste en una generalización de la optimización, se interpretan las leyes físicas a partir de máximos o mínimos.

No estaría de más que el alumnado repasase sus conocimientos geométricos adquiridos en cursos anteriores, pues le serán de ayuda para la resolución de este tipo de problemas.

Actividades

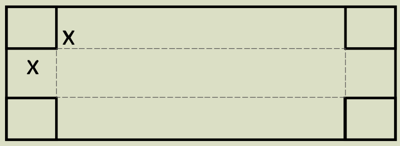
1. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pide:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$, para $a > 0$.

b) Halla los puntos de corte de dicha recta tangente con los dos ejes de coordenadas.

c) ¿Para qué valor de $a > 0$ es mínima la distancia entre los puntos hallados en **b)**?

2. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente la lámina se construye una caja (ver figura adjunta). Calcula x para que el volumen de dicha caja sea máximo.



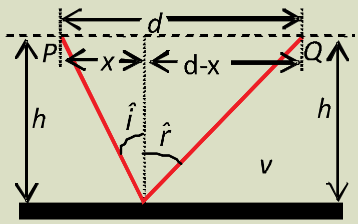
3. Los vértices de un rectángulo son $(0,0)$, $(x_0,0)$, (x_0,y_0) y $(0,y_0)$. Halla el rectángulo de área mínima de entre todos los que tienen las coordenadas del vértice (x_0,y_0) positivas y están sobre la curva $y = \frac{4}{x^2} + 1$.

4. Demuestra la ley de la reflexión $\hat{i} = \hat{r}$ mediante estos dos caminos:

a) el usado para demostrar la ley de la refracción;

b) la simetría de la situación.

Nota: ahora sólo hay un medio, por lo que los dos puntos estarán a la misma altura h.

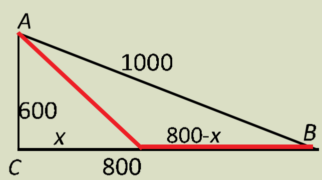


5. ¿Con cuál base se gasta menos material para la construcción de un recipiente con forma de prisma de volumen 1000 cm^3, cuando es un cuadrado o un octógono regular?

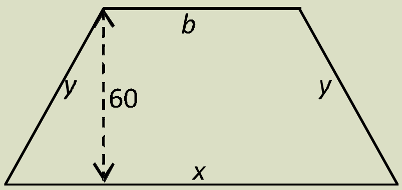
6. Determina las dimensiones de una lata de conservas que tenga forma de cilindro recto de área total 150 cm^2 y volumen máximo.

7. El número de unidades diarias que se pueden fabricar de un determinado producto es $100x\sqrt{y}$, siendo x el número de empleados e y el número de máquinas. Si se dispone de 81000 € para afrontar los gastos, y el coste por empleado es de 1800 € y por máquina es de 3000 €, averigua cuántos empleados se pueden contratar y cuántas máquinas se pueden comprar para que la producción sea máxima.

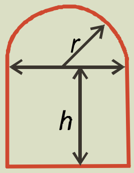
8. Hay que recorrer los 1000 km que separan A de B (ver gráfico). Si lo hacemos directamente, campo a través, nuestra velocidad máxima es de 50 km/h. También podemos dirigirnos por carretera a C, que dista 600 km de A y 800 km de B, y que está comunicada con ambas por carretera. Los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo. Determina la ruta que hace que el tiempo invertido sea mínima, si la velocidad máxima en la carretera es de 100 km/h.



9. Se desea cortar una encimera con forma de trapecio isósceles, de forma que tenga área máxima. La altura debe ser 60 cm y la longitud del perímetro menos la longitud de la base mayor 280 cm. Determina las longitudes de todos los lados del trapecio.



10. Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentra las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de 10 m



11. La temperatura T de una reacción química viene dada, en función del tiempo t (medido en horas) por la expresión $T(t) = 2t - t^2$, para $0 \le t \le 2$ horas. ¿Qué temperatura habrá a los 15 minutos? ¿En qué momento volverá a alcanzarse esta misma temperatura? Halla las temperaturas máxima y mínima y los momentos en los que se producen.

12. El consumo en combustible de un barco navegando a una velocidad de x nudos (millas/h) viene dado por $C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$ l/h. Calcula la velocidad más económica y el coste equivalente.

13. Un granjero dispone de 3 000 € para cercar una porción rectangular de terreno adyacente a un río, usando a éste como un lado del área cercada, es decir, construirá 3 cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 € por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los dos lados restantes es de 3 € por metro instalado. Calcula las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.

14. La función del coste total de producción de x unidades de un determinado producto es $C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$. Define la función del coste medio por unidad con $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. ¿A qué nivel de producción será mínimo el coste medio por unidad?

15. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 m^2. El metro lineal de tramos horizontal cuesta 5 €, mientras que el metro lineal de tramos vertical cuesta 10 €. Determina:

a) las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuánto cuesta el marco?

2. Estudio y representación de funciones

Conforme avanzamos en su estudio, aparecen funciones cada vez más complejas, que requieren de métodos más sofisticados para su tratamiento. De poco o de nada sirven las tablas de valores; debemos desechar la pretensión de conocer exactamente lo que hace punto a punto.

Localmente tenemos que centrarnos en los puntos que realmente caracterizan a la función, como son los puntos críticos y los de inflexión. El estudio global debe comprender el estudio de las asíntotas, del signo de la función, etc. Nuestra pregunta será ahora qué es necesario estudiar de la función para conocerla con detalle. Después queda el proceso de ajustar convenientemente toda la información obtenida, de modo que no aparezcan resultados contradictorios.

Los **pasos** para efectuar el **estudio** y la **representación gráfica de una función** son los siguientes:

1. Cálculo del dominio de la función.
2. Estudio de la simetría y de la periodicidad.
3. Cálculo de los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.
4. Estudio del signo de la función.
5. Cálculo de las asíntotas y de la forma en la que la función se acerca a ella.
6. Estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento).
7. Cálculo de los puntos críticos (máximos y mínimos relativos).
8. Estudio de la curvatura (concavidad y convexidad) y cálculo de los puntos de inflexión.

Los 5 primeros pasos se efectúan directamente en la función; 6º y 7º de la derivada primera; 8º de la derivada segunda (también en el 7º podemos necesitar esta derivada). Terminamos con la representación gráfica de la función.

Lógicamente, las informaciones obtenidas en los distintos pasos deben ser coherentes unas con otras y no contradecirse. Si ocurre esto último, hay que pensar que nos hemos confundido en algún punto y repetiremos los cálculos hasta que desaparezcan las incongruencias. Recordemos cómo se calculan estos pasos.

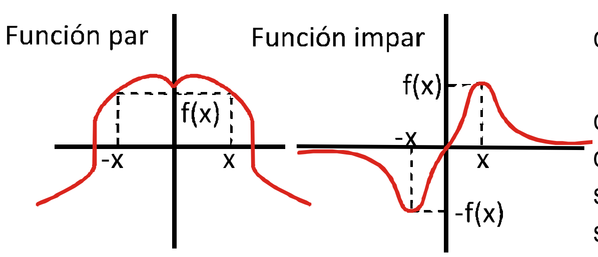
1. Dominio de la función.

Los casos en los que el dominio es distinto a $\mathbb{R}$ son los siguientes:

Función	Cálculo del dominio
$f(x)=\dfrac{NUM(x)}{DEN(x)}$	$DEN(X)=0 \Rightarrow Dom\ f = R-\{x\in R\ /\ DEN(x)=0\}.$
$f(x)=\sqrt{RADICANDO(x)}$	$RAD(x)\geq 0 \Rightarrow Dom\ f=\{x\in R\ /\ RAD(x)\geq 0\}.$
$f(x)=log\ ARGUMENTO(x)$	$ARG(X)>0 \Rightarrow Dom\ f=\{x\in R\ /\ ARG(x)>0\}.$

2. Simetría y periodicidad.

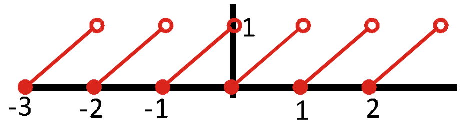
f es par si $f(-x)=f(x) \Rightarrow$ es simétrica respecto al eje OY.



f es impar si $f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ es simétrica respecto al origen de coordenadas.

La función par coincide al doblarla respecto al eje OY. La impar coincide si trazamos rectas que pasen por el origen de coordenadas, o bien, doblando primero por el eje OY y después por el OX. Si no se verifica ninguna de las igualdades anteriores, la función no es simétrica.

Una función es periódica cuando $f(x+T) = f(x)$, siendo T el período. Las funciones trigonométricas son las funciones periódicas más habituales, y serán aquellas para las que estudiaremos este punto. De Primero de Bachillerato conocemos sus propiedades, que usaremos cuando sea necesario. Se pueden construir otras funciones periódicas, como $Mantisa(x) = x - Ent(x)$ (gráfica de la izquierda), definida como, siendo *Ent(x)* la *parte entera* del número.



Si la función es periódica, sólo hay que estudiar su comportamiento en un período, pues luego no hay más que repetirla indefinidamente.

3. Puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.

Para averiguar las coordenadas de los puntos de corte de la función con el eje *OX* hay que igualar la función a cero. Escribimos abreviadamente: $f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0$. Tendremos tantos puntos de corte como soluciones tenga la ecuación $f(x) = 0$.

Para hallar el punto de corte de la función con el eje *OY* hay que sustituir en la función la *x* por 0 (cero). Escribimos abreviadamente $f \cap OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, f(0))$. Tendremos uno o ningún punto de corte, dependiendo de la existencia de $f(0)$. Si al resolver la ecuación $f(x) = 0$ apareciera la solución $x = 0$, el punto de corte con el eje *OY* es el origen de coordenadas (0,0).

4. Signo de la función.

Para estudiarlo hay que resolver la inecuación $f(x) \geq 0$. Para hacerlo usaremos distintas estrategias dependiendo del tipo de función, aunque las dos fundamentales son las siguientes:

I. Si la función es polinómica, se resuelve la ecuación $f(x) = 0$, descomponiéndose la recta real en intervalos dados por las soluciones de dicha ecuación.

II. Si la función es un cociente de polinomios, se igualan numerador y denominador a cero por separado $\begin{Bmatrix} NUM(X) = 0 \\ DEN(X) = 0 \end{Bmatrix}$ y se descompone la recta real en intervalos dados por las soluciones de ambas ecuaciones.

Los demás puntos (asíntotas, monotonía, puntos críticos, curvatura y puntos de inflexión) ya han sido tratados en la lección anterior y en la presente, por lo que no repetiremos lo ya dicho.

Para la representación se suele proceder de la forma siguiente:

1. Marcamos los puntos de corte y los críticos. En estos últimos hacemos un arco: $\cap$ para un máximo y $\cup$ para un mínimo.
2. Representamos las asíntotas y el comportamiento de la función en sus proximidades.
3. Unimos los puntos y las líneas ya representadas.

Habitualmente las representaciones no suelen hacerse estrictamente a escala, ya que lo que interesa es destacar las propiedades más relevantes de la función, que pueden ser desvirtuadas por dicha escala.

Ejemplo

16. Estudia y representa la función $y = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Solución:

1) Dominio: como es un polinomio, $Dom\ y = \Re$.

2) Simetría: $y(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 4(-x) = -x^3 - 4x^2 - 4x \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ No es simétrica.

3) Puntos de corte con los ejes:

$f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2(doble) \Rightarrow (0,\ 0); (2,\ 0) \to f \cap OY \Rightarrow (0,$

4) Signo: $y = x(x-2)^2$. Como $x = 2$ es solución doble, no influye en el signo, puesto que el factor está elevado al cuadrado, siendo siempre positivo (salvo en $x = 2$ que sería cero). Hay que descomponer la recta real en dos trozos.

	$(-\infty, 0)$	$(0,\infty)-\{2\}$
sgn y	–	+

5) Asíntotas. AV: no tiene asíntotas verticales por ser una función polinómica.

$$\text{AH}: \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^3 - 4x^2 + 4x\right) \approx \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \begin{cases} -\infty, \text{ cuando } x \to -\infty \\ \infty, \text{ cuando } x \to \infty \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal.}$$

$$\text{A Ob}: m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x} \approx \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = \infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

Al ser una función polinómica de grado superior al primero, no tiene asíntotas de ningún tipo. Los límites en el infinito permiten averiguar hacia dónde va la función.

6) Monotonía: $y' = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3},\ x = 2.$

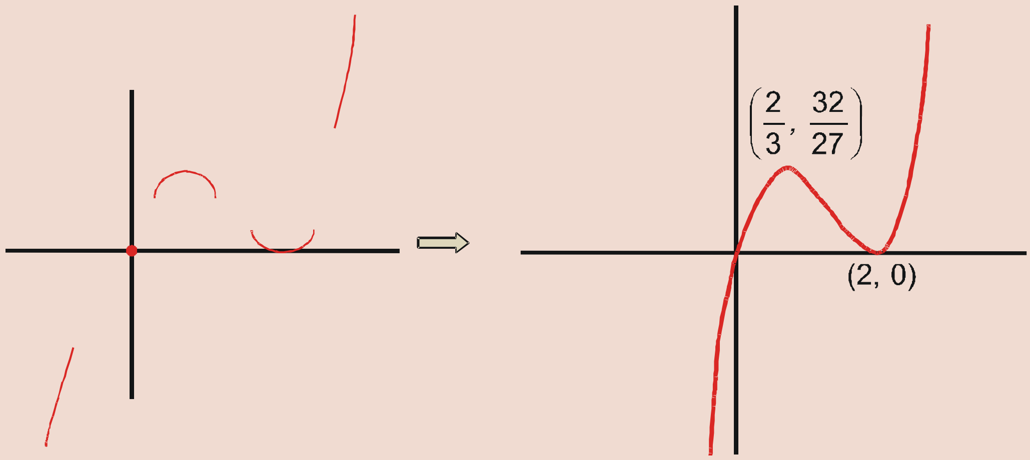
7) Puntos Críticos: máximo en el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo en (2,0).

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2,\infty)$
sgn y'	+	–	+
y	$C\uparrow$	$D\downarrow$	$C\uparrow$

8) Curvatura: $y'' = 6x - 8 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$. Punto de inflexión $\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$.

Te recordamos que todas las ordenadas de los puntos se calculan en la función, no en sus derivadas.

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
sgn y''	–	+
y	$\cap$	$\cup$



17. Estudia y representa la función $y=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x^2+5.$

Solución:

1) Dominio: como es un polinomio, *Dom y* = $\Re$.

2) Simetría: $y(-x)=\frac{(-x)^4}{12}-\frac{(-x)^3}{6}-(-x)^2+5=\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2+5\begin{cases}\neq y(x)\\ \neq -y(x)\end{cases}\Rightarrow$ No es simétrica.

3) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} f\cap OX \Rightarrow y=0\Rightarrow \textit{No se pueden hallar}\\ f\cap OY\Rightarrow y(0)=5\Rightarrow (0,\ 5)\end{cases}$.

Aunque usemos la Regla de Ruffini para resolver la ecuación *y* = *0*, no obtenemos los puntos de corte. Sólo puede hacerse con métodos numéricos superiores al nivel de este curso. Debemos esperar y esbozar la gráfica de la función con el resto de los datos.

4) Signo: no puede estudiarse.

5) Asíntotas: No tiene asíntotas de ningún tipo por ser un polinomio y la función se aproxima a ∞ cuando *x* tiende a $\pm\infty$, pues $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x^2+5\right)\approx\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{12}=\infty.$

6) Monotonía: $y'=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\Rightarrow y'=0\Rightarrow x\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-2\right)=0\Rightarrow$

$$x=0;\ x_1=\frac{3-\sqrt{105}}{4}\cong -1{,}81;\ x_2=\frac{3+\sqrt{105}}{4}\cong 3{,}31.$$

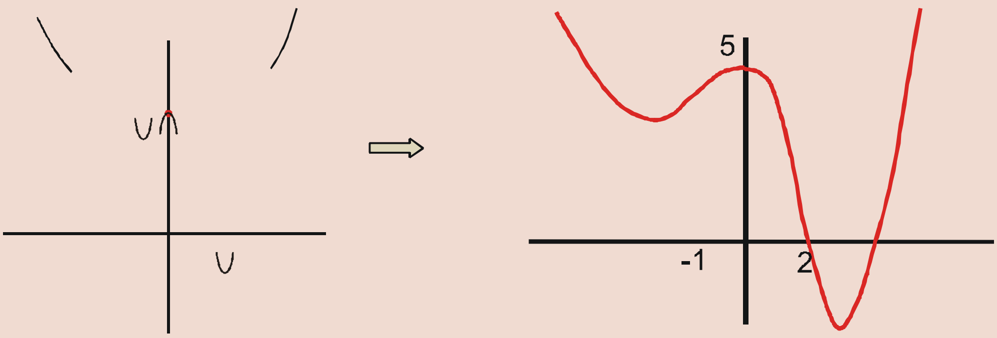
	$(-\infty,\ x_1)$	$(x_1,\ 0)$	$(0,\ x_2)$	(x_2,∞)
sgn y'	–	+	–	+
y	D↓	C↑	D↓	C↑

7) Puntos críticos: mínimos en $(x_1,\ y(x_1))$ y $(x_2,\ y(x_2))$ y máximo en $(0,\ 5)$, con $y(x_1)\cong 3{,}61;\ y(x_2)\cong -1{,}997.$

8) Curvatura: $y''=x^2-x-2\Rightarrow y''=0\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=-1,\ x=2.$

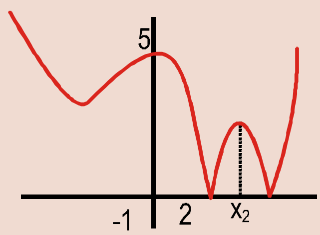
Puntos de inflexión: $\left(-1,\ \frac{17}{4}\right);\left(2,\ \frac{5}{3}\right).$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\ 2)$	$(2,\infty)$
sgn y''	+	–	+
y	∪	∩	∪



A la vista de la gráfica, observamos que la función corta al eje *OX*, en un punto del intervalo $(2, x_2)$. Como $f(4)=-\frac{1}{3}<0$ y $f(5)=\frac{45}{4}>0$, sabemos, por el teorema de Bolzano, que el otro punto de corte está en el intervalo (4,5).

El valor absoluto puede producir modificaciones insospechadas en las funciones. Si queremos representar $y=\left|\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}-x^2+5\right|$, bastará con reflejar la parte negativa y hacerla positiva. Esto es así porque tomamos el valor absoluto al valor de la función, como un todo. Sin embargo, la cosa cambia si sólo tomamos el valor absoluto de una parte de la función.



18. Estudia y representa la función $y=\dfrac{|x|-7}{|x|+2}$.

Solución :

Hay que descomponer la función para estudiarla mejor: $y=\begin{cases}\dfrac{-x-7}{-x+2}, \text{ si } x<0\\ \dfrac{x-7}{x+2}, \text{ si } x\geq 0\end{cases}$.

1) Dominio : $DEN \neq 0 \Rightarrow Dom\ y=\mathbb{R}$.

2) Simetría : $y(-x)=\dfrac{|-x|-7}{|-x|+2}=\dfrac{|x|-7}{|x|+2}=y(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto al eje OY.

3) Puntos de corte con los ejes : $\begin{cases} f\cap OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow NUM=0 \Rightarrow x=\pm 7 \Rightarrow (7,0),(-7,0)\\ f\cap OY \Rightarrow y(0)=\dfrac{-7}{2} \Rightarrow \left(0,-\dfrac{7}{2}\right)\end{cases}$.

4) Signo : $\begin{cases} NUM=0 \Rightarrow x=\pm 7\\ DEN>0\end{cases} \Rightarrow$

	$(-\infty,-7)$	$(-7,7)$	$(7,\infty)$
sgn y	+	–	+

5) Asíntotas :

AV : No tiene; AH : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x|-7}{|x|+2}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x|}{|x|}=1 \Rightarrow y_H=1$. No tiene AOb por tener horizontal.

$sgn(y-y_H)=sgn\left(\dfrac{|x|-7}{|x|+2}-1\right)=sgn\left(\dfrac{-9}{|x|+2}\right)<0$, cuando $x\to\pm\infty \Rightarrow y<y_H$.

6) Monotonía : Es continua en $\mathbb{R}$, pues $\lim\limits_{x\to 0^-} y=\lim\limits_{x\to 0^+} y=y(0)=-\dfrac{7}{2}$, pero derivable en $\mathbb{R}$ - {0} :

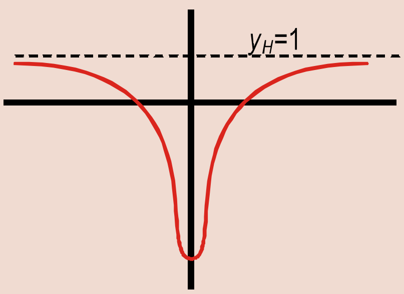
$$y'(0^-)=\left.\frac{-9}{(-x+2)^2}\right|_{x=0}=\frac{-9}{4};\ y'(0^+)=\left.\frac{9}{(x+2)^2}\right|_{x=0}=\frac{9}{4} \Rightarrow \nexists y'(0). \text{ Tenemos : } y'=\begin{cases}\dfrac{-9}{(-x+2)^2}, \text{ si } x<0 \Rightarrow y'<0\\ \dfrac{9}{(x+2)^2}, \text{ si } x>0 \Rightarrow y'>0\end{cases}$$

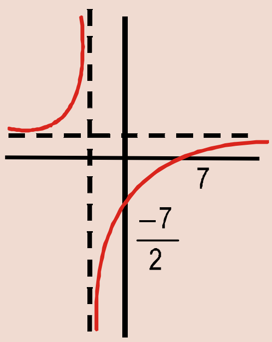
$\Rightarrow$ y es decreciente de $(-\infty,0)$ y creciente de $(0,\infty)$.

7) No tiene puntos críticos, porque $y'\neq 0$.

8) Curvatura : $y''=\begin{cases}\dfrac{-18}{(-x+2)^3}, \text{ si } x<0\\ \dfrac{-18}{(x+2)^3}, \text{ si } x>0\end{cases} \Rightarrow y''<0$ en todo $\mathbb{R}$. No tiene puntos de inflexión, pues $y''\neq 0$.

Observa la gran diferencia con la función $y=\dfrac{x-7}{x+2}$, representada a la derecha.





19. Estudia y representa la función $y = \dfrac{x^2 - 5|x| + 4}{|x| - 5}$.

Solución :

Separamos la función $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{-x - 5}, \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ para estudiarla mejor.

1) Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow Dom\ y = \mathbb{R} - \{\pm 5\}$.

2) Simetría: $y(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 5|-x| + 4}{|-x| - 5} = \dfrac{x^2 - 5|x| + 4}{|x| - 5} \Rightarrow$ par, simétrica respecto a OY.

3) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4, x = -1 \Rightarrow (-4,0), (-1,0) \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4 \Rightarrow (1,0), (4,0) \end{cases} \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow \left(0, -\dfrac{4}{5}\right) \end{cases}$

4) Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = -4, -1, 1, 4 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 5 \end{cases}$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,1)$	$(1,4)$	$(4,5)$	$(5,\infty)$
sgn y	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$

5) Asíntotas: AV: $x = -5 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -5^-} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{-x - 5} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{-x - 5} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \end{cases}$; $x = 5 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} == \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$

AH: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 5|x| + 4}{|x| - 5} \approx \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{|x|} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} |x| = \infty \Rightarrow$ no tiene AH.

AOb: Hay que separar los límites en $-\infty$ y en ∞.

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{-x^2 - 5x} \approx \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^2} = -1$; $n = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + 5x + 4}{-x - 5} + x \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{-x - 5} = 0$. Así $y_{Ob} = -x$ cuando $x \to -\infty$.

Se acerca del modo siguiente: $sgn(y - y_{Ob}) = sgn\left(\dfrac{4}{-x - 5} \right) > 0 \Rightarrow y > y_{Ob}$ cuando $x \to -\infty$.

$m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x} \approx \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$; $n = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} - x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x - 5} = 0 \Rightarrow y_{Ob} = x$ cuando $x \to \infty$. Se acerca del modo siguiente: $sgn(y - y_{Ob}) = sgn\left(\dfrac{4}{x - 5} \right) > 0 \Rightarrow y > y_{Ob}$ cuando $x \to \infty$.

6) Monotonía: la función es continua en $x = 0$, pero no es derivable.

$y'(0^-) = -\dfrac{x^2 + 10x + 21}{(-x - 5)^2}\Bigg|_{x=0} = -\dfrac{21}{25}$; $y'(0^-) = \dfrac{x^2 - 10x + 21}{(x - 5)^2}\Bigg|_{x=0} = \dfrac{21}{25} \Rightarrow \nexists y'(0)$.

$y' = \begin{cases} -\dfrac{x^2 + 10x + 21}{(-x - 5)^2}, \text{ si } x < 0 \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = -7, -3 \\ DEN > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-5\} \end{cases} \\ \dfrac{x^2 - 10x + 21}{(x - 5)^2}, \text{ si } x < 0 \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 3, 7 \\ DEN > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{5\} \end{cases} \end{cases}$.

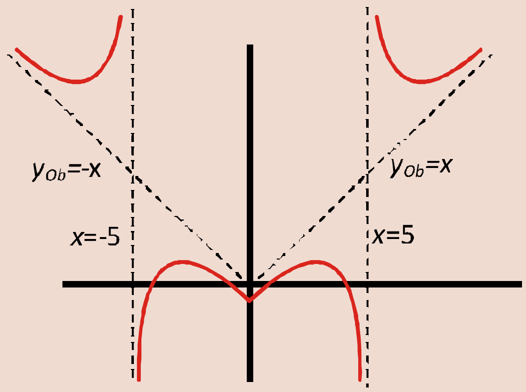
	$(-\infty,-7)$	$(-7,-3)-\{5\}$	$(-7,3)-\{0\}$	$(3,7)-\{5\}$	$(7,\infty)$
sgn y'	–	+	+	–	+
y	*D*↓	*C*↑	*C*↑	*D*↓	*C*↑

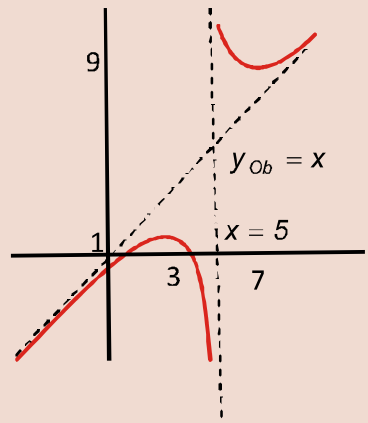
7) Puntos críticos: máximos en $(-3,1)$ y $(3,1)$; mínimos en $(-7,9)$ y $(7,9)$.

8) Curvatura: $y''=\begin{cases}\dfrac{8}{(-x-5)^3}, \text{ si } x>0 \Rightarrow \begin{cases} NUM>0 \\ DEN=0 \Rightarrow x=-5(\text{raíz triple})\end{cases} \\ \dfrac{8}{(x-5)^3}, \text{ si } x<0 \Rightarrow \begin{cases} NUM>0 \\ DEN=0 \Rightarrow x=5(\text{raíz triple})\end{cases}\end{cases}$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,5)-\{5\}$	$(5,\infty)$
sgn y''	+	–	+
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

No tiene puntos de inflexión. Su representación está abajo. A su lado, y para que sirva de comparación está representada $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$.





20. Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}$.

Solución:

1) Dominio : $DEN=0 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow Dom\, f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

2) Simetría : $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+9}{(-x)^2-9}=\dfrac{x^2+9}{x^2-9}=f(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto al eje OY.

3) Puntos de corte con los ejes : $\begin{cases} f\cap OX \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^2+9\neq 0 \Rightarrow \text{No corta al eje } OX \\ f\cap OY \Rightarrow f(0)=-1 \Rightarrow (0,-1)\end{cases}$

4) Signo : $\begin{cases} NUM>0 \\ DEN=0 \Rightarrow x=\pm 3\end{cases}$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
sgn f	+	–	+

5) Asíntotas: AA VV: $x=-3 \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\dfrac{18}{0^+}=\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\dfrac{18}{0^-}=-\infty\end{cases}$; $x=3 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\dfrac{9}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+9}{x^2-9}=\dfrac{9}{0^+}=\infty\end{cases}$

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+9}{x^2-9}\approx \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1 \Rightarrow y_H=1$; $f-y_H=\dfrac{18}{x^2-9}>0$ cuando $x\to\pm\infty$. No tiene AOb por tener AH.

6) Monotonía: $f'(x)=\dfrac{-36x}{(x^2-9)^2}\begin{cases} NUM=0 \Rightarrow x=0 \\ DEN>0 \text{ en } \mathbb{R}-\{\pm 3\}\end{cases}$

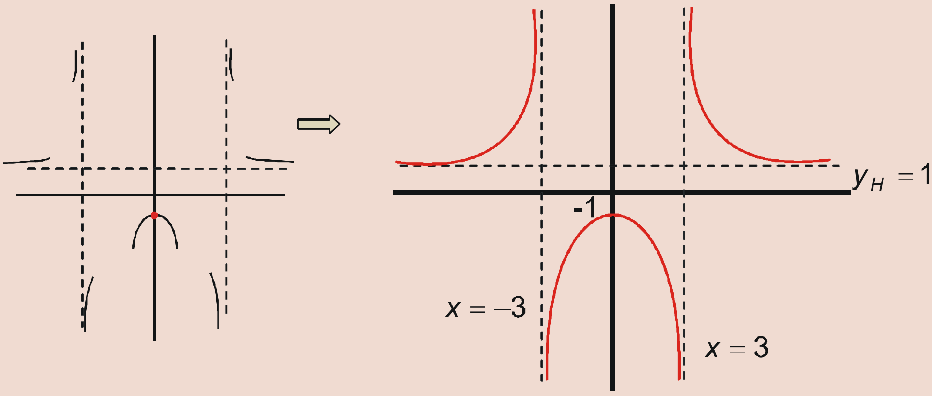
	$(-\infty,0)$-{-3}	$(0,\infty)$-{3}
sgn f'	+	–
f	C↑	D↓

7) Puntos críticos: máximo en $(0,-1)$.

8) Curvatura: $f''(x)=\dfrac{108x^2+324}{\left(x^2-9\right)^3}\begin{cases}NUM>0\\ DEN=0\Rightarrow x=\pm3(\text{triple})\end{cases}$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
sgn f''	+	–	+
f	∪	∩	∪

No tiene puntos de inflexión.



21. Estudia y representa la función $y=\dfrac{x}{x^2+9}$.

Solución:

1) Dominio : $DEN>0\Rightarrow Dom\ y=\mathbb{R}$.

2) Simetría : $y(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+9}=-\dfrac{x}{x^2+9}=-y(x)\Rightarrow$ impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

3) Puntos de corte con los ejes : $f\cap OX\Rightarrow y=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$.

4) Signo : $\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=0\\ DEN>0\end{cases}$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
sgn y	–	+

5) Asíntotas : No tiene AV; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2+9}\approx\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\leftarrow\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow y_H=0;$

$y-y_H=\dfrac{x}{x^2+9}\begin{cases}<0,\text{ cuando } x\longrightarrow-\infty\Rightarrow y<y_H\\ >0,\text{ cuando } x\longrightarrow\infty\Rightarrow y>y_H\end{cases}$. No tiene AOb por tener AH.

6) Monotonía: $y'=\dfrac{9-x^2}{\left(x^2+9\right)^2}\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=\pm3\\ DEN>0\end{cases}$

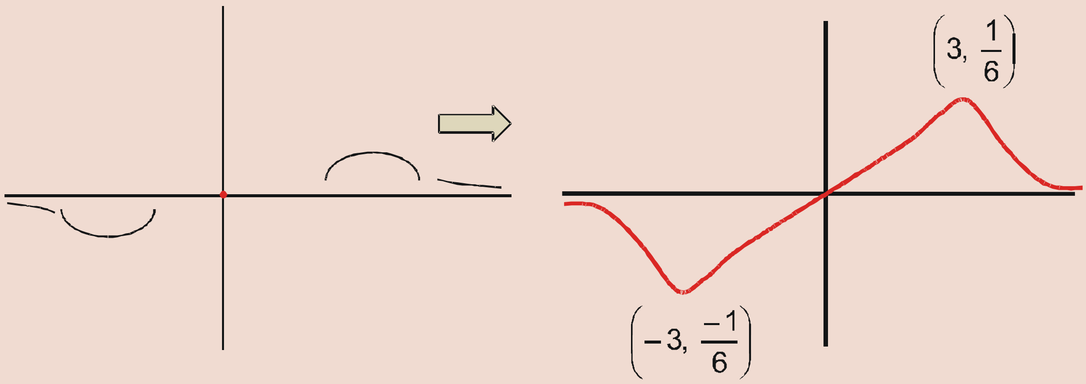
	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
sgn y'	–	+	–
y	D↓	C↑	D↓

7) Puntos críticos: mínimo en $\left(-3,\ -\dfrac{1}{6}\right)$ y máximo en $\left(3,\ \dfrac{1}{6}\right)$.

8) Curvatura: $y''=\dfrac{2x\left(x^2-27\right)}{\left(x^2+9\right)^3}\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=-\sqrt{27},0,\sqrt{27}\\ DEN>0\end{cases}$

	$(-\infty,-\sqrt{27})$	$(-\sqrt{27},0)$	$(0,\sqrt{27})$	$(\sqrt{27},\infty)$
sgn y''	–	+	–	+
y	∩	∪	∩	∪

Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{27},\ \dfrac{-\sqrt{3}}{12}\right)$; $(0,\ 0)$; $\left(\sqrt{27},\ \dfrac{\sqrt{3}}{12}\right)$.



22. Estudia y representa la función $y = e^{-x^2}$.

Solución:

1) Dominio: *Dom y* = $\mathbb{R}$.

2) Simetría: $y(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = y(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto del eje *OY*.

3) Puntos de corte: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow e^{-x^2} > 0 \Rightarrow \textit{No corta al eje OX} \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = e^0 = 1 \Rightarrow (0,\ 1) \end{cases}$

4) Signo: la función es siempre positiva.

5) Asíntotas: no tiene AV; AH: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow y_H = 0$ e $y > y_H$ pues $y > 0$ en toda la recta real.

No tiene A Ob por tener horizontal.

6) Monotonía: $y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
sgn y'	+	–
y	C↑	D↓

7) Puntos críticos: máximo en $(0,1)$.

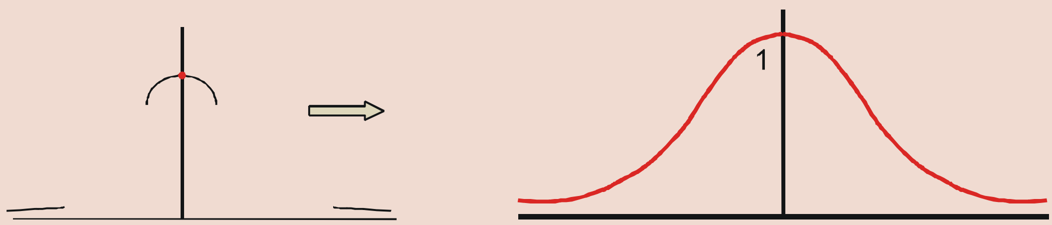
8) Curvatura:

$$y'' = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Puntos de inflexión:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-1/2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

	$\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \infty\right)$
sgn y''	+	–	+
y	∪	∩	∪



23. Estudia y representa la función $y = ln\frac{x^2}{x^2+1}$.

Solución :

1) Dominio: $ARGUMENTO > 0 \Rightarrow Dom\ y = \mathbb{R} - \{0\}$.

2) Simetría: $y(-x) = ln\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = ln\frac{x_2}{x^2+1} = y(x) \Rightarrow$ par, simétrica respecto de OY.

3) Puntos de corte con los ejes:

$f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow$ la función no corta a OX, y como no existe $y(0)$, tampoco corta a OY.

4) Signo: la función es siempre negativa, pues al ser $x^2 < x^2+1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} < 1$ con lo que $ln\frac{x^2}{x^2+1} < 0$.

5) Asíntotas:

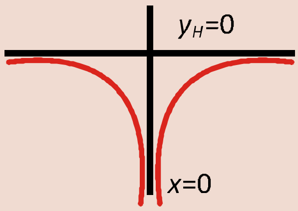
AV: $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+1} = -\infty$; AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ln\frac{x^2}{x^2+1} \approx \lim\limits_{x\to\pm\infty} ln\frac{x^2}{x^2} = ln1 = 0 \Rightarrow y_H = 0$. La función se acerca a la asíntota por debajo, pues $ln\frac{x^2}{x^2+1} < 0$. No tiene AOb.

6) Monotonía: $y' = \frac{2}{x\left(x^2+1\right)} \begin{cases} NUM > 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y'	–	+
y	*D*↓	*C*↑

7) No tiene puntos críticos, pues $y' \neq 0$.

8) Curvatura: $y'' = \frac{-2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^3+x\right)^2} < 0 \Rightarrow y$ es $\cap$ y no tiene puntos de inflexión.



24. Estudia y representa la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

Solución :

1) Dominio: $\begin{cases} RAD \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ DEN = O \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow Dom\ f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

2) Simetría: $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{-x} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -f(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto al origen de coordenadas.

3) Puntos de corte: $f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (-1, 0), (1, 0)$; no corta a OY.

4) Signo: $\begin{cases} NUM > 0\ en\ (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ DEN = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$.

	$(-\infty, -1)$	$(1, \infty)$
sgn f	–	+

5) Asíntotas: no tiene AV$\left(0 \notin Dom\ f\right)$; AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \approx \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} = -1 \Rightarrow y_H = -1 \text{ cuando } x \to -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x|}{x} = 1 \Rightarrow y_H = 1 \text{ cuando } x \to \infty \end{cases}$.

No tiene AOb. Hay que separar en $-\infty$ y en ∞ para ver cómo se acerca a la asíntota horizontal:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|}{x} = -1 \Rightarrow y_H = -1 \, cuando \; x \to -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x|}{x} = 1 \Rightarrow y_H = 1 \, cuando \; x \to \infty \end{cases}$$

luego $f > y_H$ cuando $x \to -\infty$ e $f < y_H$ cuando $x \to \infty$.

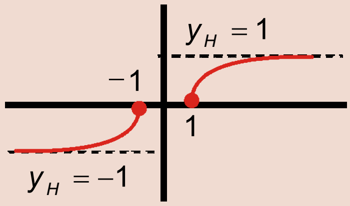
6) Monotonía: $f'(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f' > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

7) No tiene puntos críticos.

8) Curvatura: $f''(x) = \dfrac{3x^2-2}{x^3\left(x^2-1\right)^{3/2}} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}} \notin (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ DEN = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1 \end{cases}$.

	$(-\infty, -1)$	$(1, \infty)$
sgn f''	–	+
f	∩	∪

No tiene puntos de inflexión.



25. Estudia y representa la función $f(x) = \dfrac{senx}{2-\cos x}$.

Solución :

1) *Dom* $f = \mathbb{R}$, pues $2-\cos x > 0$ para todo valor de x.

2) Simetría: $f(x) = \dfrac{sen(-x)}{2-\cos(-x)} = \dfrac{senx}{2-\cos x} = f(x) \Rightarrow$ par, simétrica respecto de OY.

Periodicidad: $f(x+2\pi) = \dfrac{sen(x+2\pi)}{2-\cos(x+2\pi)} = \dfrac{senx}{2-\cos x} = f(x) \Rightarrow$ periódica, de período $T = 2\pi$.

Estudiamos la periodicidad por ser una función trigonométrica. El período, si hay varias funciones trigonométricas involucradas y la función total es periódica, coincidirá con el mayor de los períodos de las funciones que aparecen. Como su período es 2π , reduciremos el estudio al intervalo $[0,2\pi]$.

3) Puntos de corte con los ejes:

$f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow senx = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow (0,0), (\pi,0), (2\pi,0) \Rightarrow f \cap Oy \Rightarrow (0,0)$

4) Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi. \\ DEN > 0 \end{cases}$.

	$(0, \pi)$	$(0, 2\pi)$
sgn f (x)	+	–

5) No tiene asíntotas de ningún tipo, pues ni su denominador se anula, ni se pueden calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

6) Monotonía: $f'(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2} = \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = arc\cos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}. \\ DEN > 0 \end{cases}$

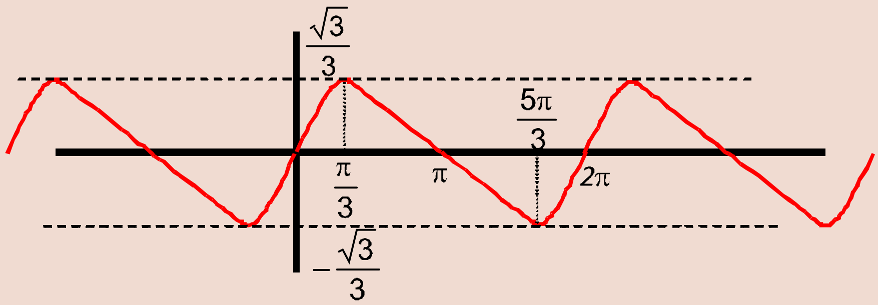
	$(0, \pi/3)$	$(\pi/3, 5\pi/3)$	$(\pi, 2\pi)$
sgn f'(x)	+	–	+
f	C↑	D↓	C↑

7) Puntos críticos: máximo en $\left(\dfrac{\pi}{3}, f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{3}, f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.

8) Curvatura y puntos de inflexión: $f''(x) = \dfrac{-2senx(\cos x + 1)}{(2-\cos x)^3} = \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
sgn f'' (x)	–	+
f	∩	∪

Puntos de inflexión $(0,0), (\pi,0), (2\pi,0)$.



26. Estudia y representa $f\left(x\right)=\dfrac{1+tgx}{\cos x}$.

Solución :

1) Dominio: escribiendo tgx en función del $senx$ y $\cos x$ tenemos: $f\left(x\right)=\dfrac{senx+\cos x}{\cos^2 x}$.

$DEN=0 \Rightarrow \cos^2 x=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{(2n+1)\pi}{2},\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ Dom $f=\mathbb{R}-\left\{\pm\dfrac{2n+1}{2}\pi\right\}$.

2) Simetría: $f\left(-x\right)=\dfrac{sen\left(-x\right)+\cos\left(-x\right)}{\cos^2\left(-x\right)}=\dfrac{-senx+\cos x}{\cos^2 x}\begin{cases}\neq f\left(x\right)\\ \neq -f\left(x\right)\end{cases}\Rightarrow$ no es simétrica.

Periodicidad: $f\left(x+2\pi\right)=\dfrac{sen\left(x+2\pi\right)+\cos\left(x+2\pi\right)}{\cos^2\left(x+2\pi\right)}=\dfrac{senx+\cos x}{\cos^2 x}=f\left(x\right)\Rightarrow$ es periódica de período $T=2\pi$.

Si hubiéramos dejado la tangente, de período π, hubiera dado igual, porque el período del coseno es mayor que π; por lo que 2π es el período común. Por esta razón restringiremos el estudio a un período y no a toda la recta real.

Como las asíntotas verticales son múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$, tomaremos el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)$, de anchura 2π, y que nos permitirá tener entero el patrón a repetir, ya que en el intervalo $\left[0,2\pi\right]$ sólo entran dos asíntotas verticales.

3) Puntos de corte con los ejes: $f\cap OX \Rightarrow f\left(x\right)=0 \Rightarrow \cos x=-senx \Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\Rightarrow\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right),\left(\dfrac{5\pi}{4},0\right)$.

$f\cap OY \Rightarrow f\left(0\right)=1 \Rightarrow \left(0,1\right)$. Como $0\notin\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)$ y $T=2\pi$, usamos el punto $\left(2\pi,0\right)$.

4) Signo: $\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\\ DEN>0\end{cases}$

	$(\pi/2, 3\pi/4)$	$(3\pi/4, 5\pi/4)$	$(5\pi/4, 5\pi/2)$
sgn f	+	–	+

5) Asíntotas:

AV: $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f\left(x\right)=\dfrac{1}{0^+}=\infty;\ x=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty;\ x=\dfrac{5\pi}{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{5\pi}{2}\right)^-} f\left(x\right)=\dfrac{1}{0^+}=\infty.$

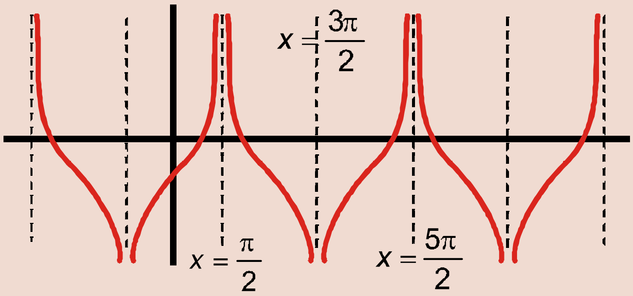
Al no poderse calcular los límites en $\pm\infty$ no tiene ni asíntotas horizontales ni oblicuas.

6) Monotonía: $f'\left(x\right)=\dfrac{1+sen^2x+senx\cos x}{\cos^3 x}\Rightarrow\begin{cases}NUM>0,\ pues\ -1\le senx\cos x\\ DEN=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$.

	$(\pi/2, 3\pi/2)$	$(3\pi/2, 5\pi/2)$
sgn f'(x)	–	+
f	D↓	C↑

7) No tiene puntos críticos.

8) $f''\left(x\right)$ es impracticable. Por lo tanto, usaremos los datos conocidos para esbozar la función.



A veces no se puede seguir estrictamente el proceso y hay que echar mano de nuestros conocimientos.

27. Aunque somos conscientes de su dificultad, para profundizar en tus conocimientos te proponemos estudiar y representar $f(x) = \begin{cases} \frac{senx}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 1, \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

Solución :

1) Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow x = 0$, pero $f(0) = \frac{0}{0}(ind) \overset{L`Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \Rightarrow Dom\, f = \mathbb{R}$.

2) Simetría: $f(-x) = \frac{sen(-x)}{-x} = \frac{senx}{x} = f(x) \Rightarrow$ par, simétrica respecto de OY.

No es periódica: $f(x+2\pi) = \frac{sen(x+2\pi)}{x+2\pi} = \frac{senx}{x+2\pi} \neq f(x)$.

3) Puntos de corte con los ejes:

$f \cap OX \Rightarrow senx = 0 \Rightarrow x = \pm k\pi,\ k \in N \ \Rightarrow (\pm k\pi, 0)$.

$f \cap OY \Rightarrow (0, f(0)) = (0,1)$

4) Signo: sólo consideramos la semirrecta $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, ya que es par.

$\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in N \\ DEN > 0 \end{cases}$. Vemos que el signo va alternándose: en $(0,\pi)$ es positiva, negativa en $(\pi, 2\pi)$, otra vez positiva en $(2\pi, 3\pi)$ y así sucesivamente.

5) No tiene AV, pero sí AH:

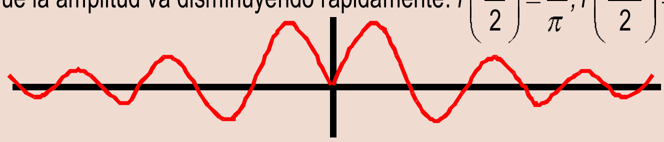
$-\frac{1}{x} \leq \frac{senx}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty}\left(\frac{senx}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{senx}{x}\right) = 0 \Rightarrow y_H = 0$. No sabemos cómo se acerca a ella porque va alternando su signo.

6) Monotonía: $f'(x) = \frac{x\cos x - senx}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = tgx \\ DEN > 0 \text{ en } R - \{0\} \end{cases}$. La ecuación $x = tgx$ sólo se puede resolver numéricamente.

Una solución es $x = 0$; aquí no sirve pues $f'(0) = \frac{0}{0}(ind) \overset{L´Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-senx}{x^3} = \frac{0}{0}(ind) \overset{L´Hôpital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{3x^2} = -\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$.

De acuerdo con el teorema de Rolle, como $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = \ldots = 0$, hay n-1 puntos c_i dentro de los intervalos $(0,\pi), (\pi, 2\pi), \ldots$ en los cuales $f'(c_i) = 0$. Debido a la alternancia del signo, los máximos aparecen cuando f es positiva y los mínimos cuando f es negativa. $f''(x)$ proporciona otra ecuación trascendente que no podemos resolver. Sin embargo, gracias a la anterior discusión con el teorema de Rolle, conocemos la forma de la función. Otro dato importante es darse cuenta de que la amplitud va disminuyendo rápidamente: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}, f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{2}{5\pi}, f\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \frac{2}{9\pi} \ldots$

La representación es:



Actividades

16. Estudia y representa las funciones: **a)** $y = x^3 - 3x$; **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

17. Estudia y representa las funciones: **a)** $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; **b)** $y = \dfrac{8(x-1)^2}{x^3}$.

18. Estudia y representa las funciones: **a)** $y = 2x|x - 4|$; **b)** $y = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

19. Representa las funciones: **a)** $y = \left|\dfrac{x^3}{1 - x^2}\right|$; **b)** $y = \dfrac{|x^3|}{1 - x^2}$.

20. Estudia y representa las funciones: **a)** $y = |x^4 - x^2|$; **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-2)(x-3)}}{x^2}$.

21. Estudia y representa las funciones: **a)** $y = \dfrac{1}{1 + e^x}$; **b)** $f(x) = e^x - x$.

22. Estudia y representa las funciones: **a)** $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$; **b)** $y = senx + \cos x$.

23. Para profundizar en tus conocimientos estudia y representa las funciones: **a)** $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$; **b)** $g(x) = \ln|x^2 - 1|$.

Para saber más...

Desarrollo en serie de Taylor

Puede que alguna vez te hayas preguntado cómo podemos calcular $e^{2,5}$, $sen\,22º$ o $\sqrt{7}$. Parece que todo consiste en apretar teclas en la calculadora. ¿Cómo lo hace la calculadora? Halla sumas con sus circuitos integrados. Vamos a desentrañar alguna de estas sumas.

El **desarrollo en serie de Taylor** consiste en un polinomio tal que el valor de la función y del polinomio en el punto en el que desarrollamos coinciden; también la derivada primera de la función y la del polinomio; las derivadas segundas de ambos, las terceras y así sucesivamente:

$$p(a)=f(a);\ p'(a)=f'(a);\ p''(a)=f''(a);\ p'''(a)=f'''(a)\ldots p^{(n}(a)=f^{(n}(a).$$

Por supuesto, *f* ha de ser continua y derivable tantas veces como sea necesario.

Como $p(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+a_n(x-a)^n$ es la expresión general de un polinomio de grado *n* en un punto *x* = *a*, tendremos que:

$$p(a)=a_0=f(a);\ p'(a)=a_1+2a_2(x-a)+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}\Rightarrow p'(a)=a_1\Rightarrow a_1=f'(a);$$

$$p''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+\ldots+n\cdot(n-1)a_n(x-a)^{n-2}\Rightarrow p''(a)=2a_2\Rightarrow a_2=\frac{f''(a)}{2};$$

$$p'''(x)=3!\cdot a_3+\ldots+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)a_n(x-a)^{n-3}\Rightarrow p'''(a)=3!\cdot a_3\Rightarrow a_3=\frac{f'''(a)}{3!}$$

$$\ldots p^{(n}(x)=n!\cdot a_n\Rightarrow p^{(n}(a)=n!\cdot a_n\Rightarrow a_n=\frac{f^{(n}(a)}{n!}.$$

Podremos escribir entonces que:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i}(a)}{i!}\cdot(x-a)^i.$$

El símbolo Σ (*sumatorio*)es el característico de las series, que no son más que sumas de sucesiones.

Ésta es la expresión para un polinomio de grado *n*, pero se generaliza sin problemas para los polinomios infinitos. Cuando *a* = 0 la fórmula se simplifica y queda:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\ldots+\frac{f^{(n}(0)}{n!}\cdot x^n=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i}(0)}{i!}\cdot x^i.$$

Por lo tanto, hallar el polinomio de Taylor consiste en calcular las derivadas de la función y evaluarlas.

Ejemplos

28. Calcula el polinomio de Taylor de grado cuatro en $x = 0$ para las funciones:

a) $f(x) = e^x$; **b)** $g(x) = ln(1+x)$; **c)** $y = cos\, x$.

Solución :

a) Como al derivar e^x siempre se obtiene e^x, $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = e^0 = 1$ por lo que

$$a_0 = a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{2};\ a_3 = \frac{1}{3!};\ a_4 = \frac{1}{4!} \Rightarrow e^x \cong 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x}{4!}\ .$$

b) $a_0 = g(0) = ln1 = 0;\ a_1 = f'(0) = \left.\dfrac{1}{1+x}\right|_{x=0} = 1;\ f''(0) = \left.\dfrac{-1}{(1+x)^2}\right|_{x=0} = -1 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{1}{2};$

$$f'''(0) = \left.\frac{2}{(1+x)^3}\right|_{x=0} = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3};\ f^{IV}(0) = \left.\frac{-3!}{(1+x)^4}\right|_{x=0} = -3! \Rightarrow a_4 = \frac{-3!}{4!} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

c) $a_0 = y(0) = cos\,0 = 1; a_1 = f'(0) = -senx|_{x=0} = 0;\ f''(0) = -cos\,x|_{x=0} = -1 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{1}{2};$

$$f'''(0) = senx|_{x=0} = 0 \Rightarrow a_3 = 0;\ f^{IV}(0) = cos\,x|_{x=0} = 1 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4!} \Rightarrow cos\,x \cong 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

29. Calcula el polinomio de Taylor de grado cuatro en $x = 0$ para las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{1+x}$; **b)** $g(x) = senx$; **c)** $y = \sqrt[3]{1+x}$.

Solución :

a) $a_0 = f(0) = \sqrt{1} = 1;\ a_1 = f'(0) = \left.\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\right|_{x=0} = \dfrac{1}{2};\ f''(0) = -\left.\dfrac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}\right|_{x=0} = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow a_2 = -\dfrac{1}{8}$

$$f'''(0) = \left.\frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}\right|_{x=0} = \frac{3}{8} \Rightarrow a_3 = \frac{3/8}{3!} = \frac{1}{16};\ f^{IV}(0) = -\left.\frac{15}{16\sqrt{(1+x)^7}}\right|_{x=0} = -\frac{15}{16} \Rightarrow a_4 = \frac{-15/16}{4!} = -\frac{5}{28}.$$

Por lo tanto, $\sqrt{1+x} \cong 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4$.

b) $a_0 = f(0) = 0;\ a_1 = f'(0) = cos\,x|_{x=0} = 1;\ f''(0) = -senx|_{x=0} = 0 \Rightarrow a_2 = 0;$

$$f'''(0) = -cos\,x|_{x=0} = -1 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3!};\ f^{IV}(0) = senx|_{x=0} = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \Rightarrow senx \cong x - \frac{x^3}{3!}.$$

c) $a_0 = y(0) = 1;\ a_1 = f'(0) = \left.\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}\right|_{x=0} = \dfrac{1}{3};\ f''(0) = -\left.\dfrac{2}{9(1+x)^{5/3}}\right|_{x=0} = -\dfrac{2}{9} \Rightarrow a_2 = -\dfrac{1}{9};$

$$f'''(0) = \left.\frac{10}{27(1+x)^{8/3}}\right|_{x=0} = \frac{10}{27} \Rightarrow a_3 = \frac{5}{81};\ f^{IV}(0) = -\left.\frac{80}{81(1+x)^{11/3}}\right|_{x=0} = -\frac{80}{81} \Rightarrow a_0 = y(0) = 1;\ a_1 = f'(0) =$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{3};\ f''(0)=-\frac{2}{9(1+x)^{5/3}}\Bigg|_{x=0}=-\frac{2}{9}\Rightarrow a_4=-\frac{10}{243}\Rightarrow \sqrt[3]{1+x}\cong 1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{9}+\frac{10x^3}{27}-\frac{10x^4}{243}.$$

30. Usando los desarrollos obtenidos en los ejemplos anteriores, calcula el valor que se obtiene para e, $ln2$, $\sqrt{2}$.

Solución :

$$e=e^1\cong 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{65}{24}=2,7083;\quad ln2=ln(1+1)\cong 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=0,5833;$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{1+1}\cong 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}=\frac{179}{128}=1,3984.$$

El último ejemplo parece desconcertante: los valores no se parecen todo lo que esperamos a lo obtenido con la calculadora. ¿Por qué? El desarrollo consta de infinitos términos; al tomar sólo 5 despreciamos términos cuya suma puede ser importante. Este problema es el de *convergencia de la serie*, esto es, cuantos términos hay que sumar para que el resto (suma de todos los que despreciamos) sea realmente despreciable frente a los que consideramos.

Otro problema es el del *radio de convergencia*, pues no todos los valores de *x* pueden usarse en el desarrollo. Estos dos problemas superan el nivel de este libro.

Actividades

24. Halla, en $x = 0$, el polinomio de Taylor de grado tres de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt[4]{1+x}$; **b)** $g(x)=Shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; **c)** $h(x)=Chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Nota: Shx y Chx son el seno y el coseno hiperbólico.

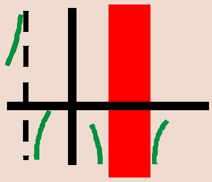
Recuerda

✓ **Optimización de funciones**

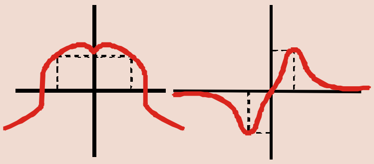
- Optimizar una función consiste en buscar sus extremos relativos.
- El problema habitual es construir la función a optimizar, para lo que no hay regla fija. Conviene efectuar una lectura detallada del problema. Si es de índole geométrica, no viene mal hacer un esbozo gráfico, para identificar las variables.

  Pueden servir de guía las siguientes orientaciones:
  i. se identifica la función que hay que optimizar;
  ii. se nombran sus variables;
  iii. se escribe matemáticamente la función;
  iv. se calculan sus extremos relativos.
- Si la función es positiva y consiste en una raíz cuadrada, podemos usar para los cálculos el cuadrado de la función.
- Conviene usar las simetrías que aparezcan en el problema.

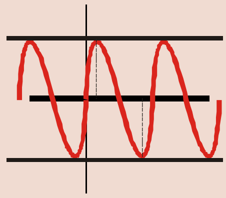
✓ Estudio y representación de funciones



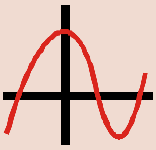
Dom f



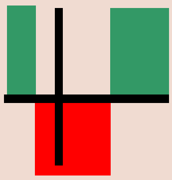
Simetría $\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$



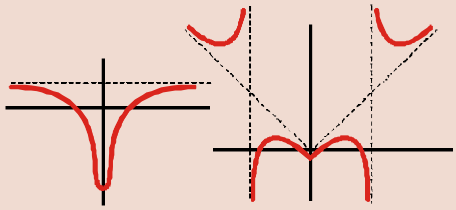
Periodicidad
$f(x+T) = f(x)$



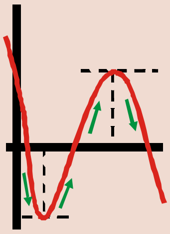
$f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0$
$f \cap OY \Rightarrow x = 0$



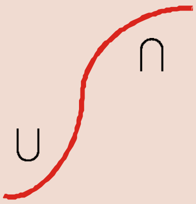
***f* < 0**
***f* > 0**



1. Asíntotas horizontales
2. Asíntotas verticales
3. As íntotas o blicuas



Monotonía
Mínimo relativo $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$
Máximo relativo $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$



Curvatura
f es $\cup$ donde $f''(x) > 0$
f es $\cap$ donde $f''(x) < 0$
Punto de inflexión $f''(x_0) = 0$

- Las funciones que tienen asíntotas están muy determinadas por éstas, por lo que casi pueden representarse con los 5 primeros puntos. Los otros 3 restantes sirven para verificar nuestras suposiciones. Por supuesto, la información obtenida en uno de los pasos anteriores no puede estar en contradicción con otra procedente de otro paso distinto.

✓ Desarrollo en serie de Taylor

Se trata de buscar el polinomio que mejor se aproxima a una función *f*. Su expresión es:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n.$$