UNIDAD

1 Matrices

En cualquier actividad de la vida y en particular cuando se maneja información con datos numéricos conviene ser ordenados; las tablas de doble entrada nos proporcionan una forma de ordenar los datos numéricos como se indica en el ejemplo siguiente:

• ITE Banco de imágenes

Una pastelería elabora tartas de chocolate, C, y de fresa, F; las tartas se fabrican con pesos de cuarto kilo, medio kilo y un kilo. Las tartas de chocolate que se elaboran son: 30 unidades de cuarto kilo, 20 unidades de medio kilo y 10 unidades de un kilo. Las tartas de fresa que se elaboran son: 40 unidades de cuarto kilo, 35 unidades de medio kilo y 15 unidades de kilo. Estos datos resultan más claros en una tabla de doble entrada como la siguiente:

	¼ k	½ k	1 k
Chocolate	30	20	10
Fresa	40	35	15

Las disposiciones rectangulares de datos numéricos facilitan su lectura, interpretación y análisis y además dan pie al concepto matemático de matriz, cuya utilidad va mucho más allá de una mera disposición de números. El concepto de matriz tiene múltiples aplicaciones en matemáticas y fueron empleadas por primera vez por el matemático inglés Arthur Cayley (1821 – 1895).

En esta Unidad estudiaremos las matrices por sí mismas, es decir, los tipos de matrices, las propiedades y las operaciones con matrices. Particular importancia tiene el cálculo de la matriz inversa, que en esta Unidad se calcula por el método de Gauss. La matriz inversa se empleará en la resolución de ecuaciones matriciales, que son ecuaciones cuya incógnita no representa a un número sino a una matriz.

Al final de la Unidad se plantean algunos problemas seleccionados de actividades que se nos presentan en la vida cotidiana y para cuya solución las matrices son las herramientas adecuadas.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

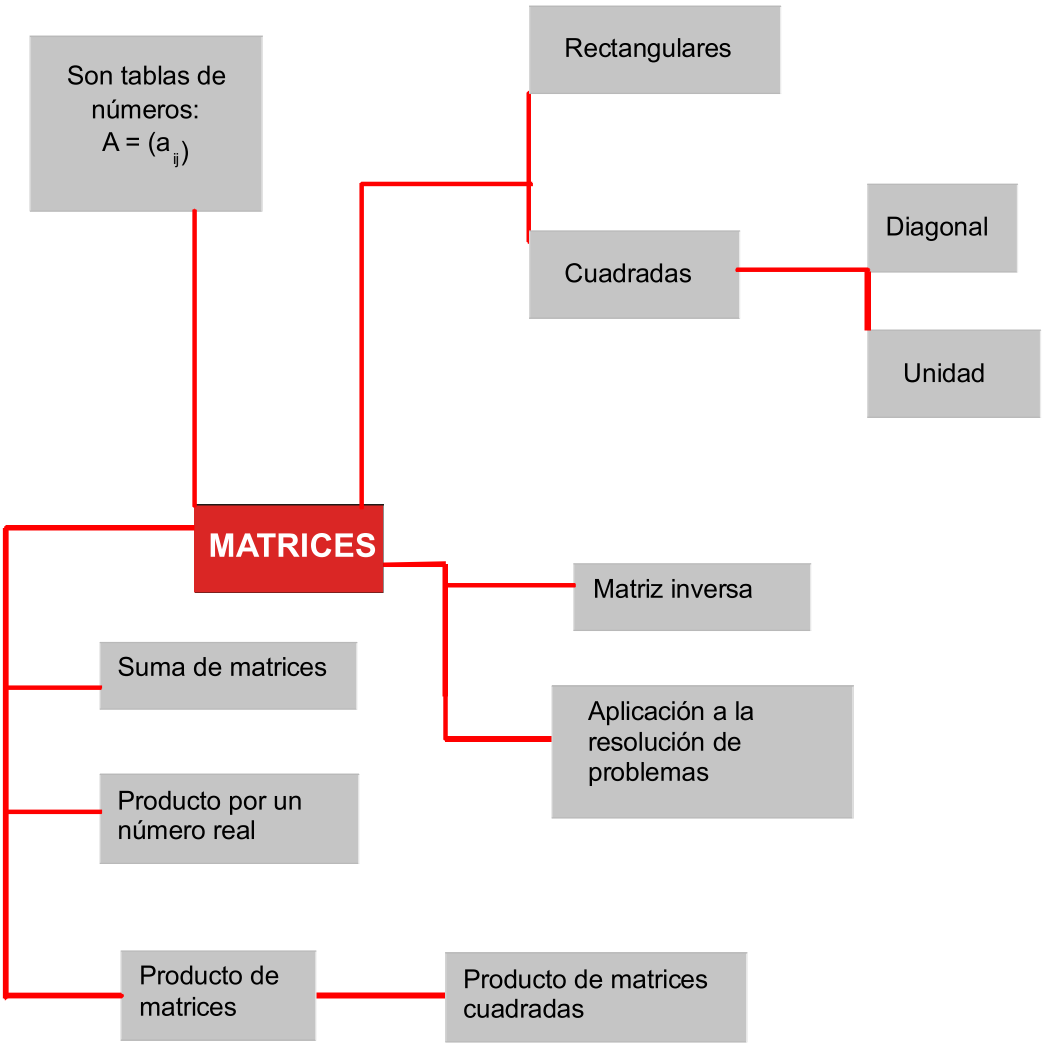
1. Reconocer matrices y en qué casos resulta operativo o imprescindible su utilización.

2. Conocer algunos tipos de matrices.

3. Dominar las operaciones con matrices, así como las propiedades correspondientes.

4. Calcular, si existe, la matriz inversa de una matriz cuadrada a partir de la definición o aplicando el método de Gauss.

5. Resolver problemas utilizando matrices.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Matrices: definición

Se llama **matriz** de orden $m \times n$ a una disposición en tabla rectangular de $m \times n$ números reales dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

A los números reales $\boldsymbol{a_{ij}}$ se les llama **elementos de la matriz**. El primer subíndice i indica la fila y el segundo j la columna en la que se encuentra el elemento a_{ij}.

Por ejemplo, el elemento $a_{32,}$ se encuentra en la tercera fila y segunda columna.

El número de filas y de columnas es la **dimensión de la matriz** y se designa así: $m \times n$; si $\boldsymbol{m = n}$, filas igual a columnas, se trata de una **matriz cuadrada** de orden n.

Las matrices se representan así: $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ etc.

Por ejemplo, la matriz $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & 5 & 0 \\ 1 & -3 & \sqrt{2} & 6 \\ -4 & 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 3×4 (tres filas y cuatro columnas), en la matriz anterior $a_{13} = 5$; $a_{23} = \sqrt{2}$; etc.

Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son iguales si tienen la misma dimensión (o el mismo orden, si son cuadradas) y además son iguales todos los elementos que ocupan el mismo lugar.

Por ejemplo, las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{9} & -5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \frac{6}{3} & 3 & c \\ 2 & d & 6 \end{pmatrix}$ serán iguales si $a = 2$; $b = 6$; $c = -5$ y $d = 0$.

Actividades

1. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{5} & \sqrt{3} \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ **a)** ¿Cuál es su dimensión? **b)** Indica el valor de a_{12}, a_{21} y a_{23}.

2. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$, indica los valores de x, y, z en la matriz B para que sea igual a A.

2. Tipos de matrices

En este apartado describiremos algunos de los tipos de matrices más usuales.

Matriz rectangular es aquella matriz en la que el número de filas es distinto al de columnas $m \neq n$.

Ejemplo de matriz rectangular: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

Matriz cuadrada es aquella en la que el número de filas es igual al de columnas $m = n$.

Ejemplo de matriz cuadrada: $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$

En una matriz cuadrada se llama **diagonal principal** al conjunto de los elementos de la forma a_{ii}; en la matriz B, la diagonal principal la forman los elementos $-2, 3, -8$.

En una matriz cuadrada se llama **diagonal secundaria** al conjunto de los elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$; en la matriz B, la diagonal secundaria la forman los elementos 7, 3, 0; sus subíndices suman 4.

Matriz fila es una matriz que tiene una fila; por tanto, de dimensión $1 \times n$.

Ejemplo: $A = (-1 \quad 4 \quad 5 \quad 0)$ es una matriz fila de dimensión 1×4.

Matriz columna es una matriz que tiene una columna; por tanto, de dimensión $m \times 1$.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ es una matriz columna de dimensión 3×1.

Matriz opuesta de una matriz A es aquella que tiene por elementos los opuestos de A; se representa por $-A$.

Ejemplo: la opuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ es la matriz $-A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

Matriz simétrica es una matriz cuadrada que tiene los elementos simétricos a la diagonal principal iguales; esto es, $a_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ son matrices simétricas.

Matriz antisimétrica es una matriz cuadrada que tiene opuestos los elementos simétricos a la diagonal principal; esto es, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -4 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices antisimétricas.

Los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica cumplen $a_{ii} = -a_{ii}$ es decir, son números que coinciden con sus opuestos, por tanto nulos.

Matriz nula es la que tiene todos sus elementos nulos. La denotaremos por $O = (0)$.

Por ejemplo, las siguientes matrices son nulas: $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $O_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz diagonal es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal.

Por ejemplo, las siguientes matrices son diagonales: $A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Matriz escalar es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal son iguales.

Por ejemplo, las siguientes matrices son escalares: $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Matriz unidad o identidad es una matriz escalar en la que los elementos de la diagonal principal son unos; también se llama matriz identidad.

Por ejemplo, las matrices $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices identidad de orden dos y tres respectivamente.

Matriz triangular es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo (o por encima) de la diagonal principal son cero.

Ejemplo:

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ son matrices triangulares.

Actividades

3. Escribe las siguientes matrices:

a) la matriz unidad de orden cuatro;

b) la matriz nula de dimensión 3 × 2;

c) una matriz triangular de orden dos;

d) una matriz diagonal de orden dos.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula su opuesta.

3. Operaciones con matrices

3.1. Suma de matrices

Al conjunto de todas la matrices de dimensión m x n se le designa por $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$. En las matrices de este conjunto definimos las operaciones de sumar y restar.

Dadas dos matrices de $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$ $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, llamamos suma de ambas a la matriz $C = (c_{ij})$ de la misma dimensión cuyo término genérico es $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

La suma de matrices se designa $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Ejemplo

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ de orden 2 x 3, calcular $A + B$.

Solución:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 1+0 & 2+1 \\ 5+3 & -4+5 & 7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

La **suma de matrices** $(a_{ij} + b_{ij})$ se obtiene al sumar los elementos que ocupan el mismo lugar en una y otra matriz.

Propiedades de la suma:

- **Asociativa.** Cualesquiera que sean las matrices A, B y C de $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$ se cumple la igualdad $(A+B)+C = A+(B+C)$
- **Existencia de la matriz nula en $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$.** La matriz $O = (0)$ es tal que: $A + O = A$.
- **Existencia de la matriz opuesta**. Dada la matriz A de $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$ existe la matriz opuesta $-A$ del mismo orden, de modo que $A+(-A) = O$.
- **Conmutativa**. Para todo par de matrices A y B de $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$ se cumple la igualdad, $A + B = B + A$.

3.2. Diferencia de matrices

La diferencia de matrices A y B del conjunto $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$ se representa por $A - B$ y se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo; es decir: $A - B = A + (-B)$.

Ejemplo

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ de orden 2 x 3, calcular $A-B$.

Solución:

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-2 & 1-0 & 2-1 \\ 5-3 & -4-5 & 7-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

La **diferencia de matrices** $(a_{ij})-(b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij})$ se obtiene al restar elementos que ocupan el mismo lugar en una y otra matriz.

3.3. Producto de un número por una matriz

Cualesquiera que sean el número real k y la matriz $A=(a_{ij})$ del conjunto $\boldsymbol{M}_{m\times n}$, se llama producto de k por A, a la matriz $B=(b_{ij})$ de la misma dimensión que A y cuyo término genérico es $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$.

El **producto de un número por una matriz** $k(a_{ij})$ se obtiene al multiplicar por k cada elemento de $A=(a_{ij})$

Ejemplo

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ de orden 2 x 3 y $k=5$, calcular $k\cdot A$

Solución:

$$k\cdot A=5\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5(-2) & 5\cdot 0 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot 4 & 5(-3) & 5\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 20 & -15 & 25 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de un número por una matriz

Cualesquiera que sean las matrices A y B del conjunto $\boldsymbol{M}_{m\times n}$ y los números reales λ y μ; se verifica:

- Distributiva respecto de la suma de matrices:
$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$
- Distributiva respecto de la suma de escalares:
$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$
- Asociativa respecto de los escalares:
$$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$$
- Elemento unidad:
$$1\cdot A=A$$

3.4. Producto de matrices

Para multiplicar matrices, las matrices factores deben reunir algunos requisitos que describiremos en este apartado.

a) Producto de una matriz fila por una matriz columna

Sean *A* una matriz con una fila y *n* columnas y *B* una matriz con *n* filas y una columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

El producto de la matriz fila *A* con *n* columnas por la matriz columna *B* con *n* filas es la matriz $C = A \cdot B$ con una fila y una columna; es decir, un número, $c = a_1 . b_1 + a_2 . b_2 + \dots + a_n . b_n$; por tanto,

$$A \cdot B = C = (c) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i .$$

Hay que hacer notar que, para poder multiplicar *A* y *B*, el número de columnas del primer factor *A* debe ser igual al número de filas del segundo factor *B*.

Ejemplo

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ una matriz con una fila y 3 columnas y $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ una matriz con 3 filas y una columna. Hallar la matriz producto.

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$$

El resultado es una matriz de orden 1x1; por tanto, un número.

Regla: Observa que para realizar el producto se deja caer la matriz fila *A* en la matriz columna *B*; multiplicar los elementos enfrentados y sumar los resultados.

b) Producto de dos matrices cualesquiera

Sean *A* una matriz del conjunto $\boldsymbol{M}_{m \times n}$, y *B* una matriz del conjunto $\boldsymbol{M}_{n \times p}$; las columnas de A coinciden con las filas de *B* (en este caso *n*)

El **producto de matrices** A del conjunto $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$ y B del conjunto $\boldsymbol{M}_{n\,x\,p}$ es otra matriz C del conjunto $\boldsymbol{M}_{m\,x\,p}$ con m filas (las del primer factor A) y p columnas (las del segundo factor B), cuyos elementos se calculan así:

El elemento c_{ij} de la matriz producto C es el resultado de multiplicar la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B consideradas ambas como matrices fila y columna respectivamente.

La expresión del elemento c_{ij} de la matriz producto C será:

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \dots\\ b_{nj}\end{pmatrix}=\left(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}\right)=\sum_{k=1}^{k=n}a_{ik}b_{kj}$$

Ejemplo

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 4 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$:

a) indicar la dimensión de la matriz producto;
b) calcular $A{\cdot}B$.

Solución:

a) La dimensión de A es 2 x 3. La dimensión de B es 3 x 2. Como el número de columnas de A, tres, coincide con el de filas de B, las matrices se pueden multiplicar y además la dimensión de la matriz producto es 2 x 2 esto es, número de filas del primer factor y número de columnas del segundo factor.

b) Las notaciones que se han empleado en el desarrollo del producto de matrices se pueden simplificar, mediante la siguiente regla.

Regla: Los elementos de la matriz producto se obtienen al dejar caer los elementos **de las filas de la matriz primer factor sobre las columnas de la matriz segundo factor;** multiplicar los elementos que han quedado enfrentados y finalmente sumarlos.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 4 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot2+1\cdot4+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot(-2)+0\cdot5\\ 4\cdot2+1\cdot4+3\cdot1 & 4\cdot3+1\cdot(-2)+3\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4\\ 15 & 25\end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

El producto de matrices tiene las propiedades siguientes:

- **Propiedad asociativa.** Cualquiera que sean las matrices A, B, C en los casos que se puedan multiplicar las tres matrices. Es decir, si A es del conjunto $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$, o de dimensión m x n, B es del conjunto $\boldsymbol{M}_{n\,x\,p}$, o de dimensión n x p y C es del conjunto $\boldsymbol{M}_{p\,x\,q}$, o de dimensión p x q, entonces:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

- **Propiedad distributiva.** Dadas las matrices A del conjunto $\boldsymbol{M}_{m\,x\,n}$, o de dimensión m x n; B y C son del conjunto $\boldsymbol{M}_{n\,x\,p}$, o de dimensión n x p se cumple:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

El producto de matrices no es en general conmutativo, es decir,

$$A\cdot B\neq B\cdot A$$

a) Hay casos en los cuales es posible efectuar $A\cdot B$, y no $B\cdot A$.

Por ejemplo, si $A_{2x3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&1\end{pmatrix}$ y $B_{3x1}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, entonces tenemos:

$$A_{2x3}\cdot B_{3x1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot(-1)+3\cdot0\\0\cdot2+3\cdot(-1)+1\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$$

No es posible efectuar $B_{3x1}\cdot A_{2x3}$; B tiene una columna y A tiene dos filas; ambos números no coinciden.

b) En los casos en que es posible efectuar $A\cdot B$ y $B\cdot A$, no siempre dan el mismo resultado. A veces ni siquiera son de la misma dimensión.

Por ejemplo, si $A_{2x3}=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}$ y $B_{3x2}=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\\-1&5\end{pmatrix}$, entonces tenemos:

$$A_{2x3}\cdot B_{3x2}=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\\-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot2+2\cdot(-1)&1\cdot0+3\cdot4+2\cdot5\\0\cdot1+2\cdot2+4\cdot(-1)&0\cdot0+2\cdot4+4\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&22\\0&28\end{pmatrix}$$

$$B_{3x2}\cdot A_{2x3}=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\\-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0&1\cdot3+0\cdot2&1\cdot2+0\cdot4\\2\cdot1+4\cdot0&2\cdot3+4\cdot2&2\cdot2+4\cdot4\\-1\cdot1+5\cdot0&-1\cdot3+5\cdot2&-1\cdot2+5\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&14&20\\-1&7&18\end{pmatrix}$$

Ejemplos

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\\1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$ comprueba la igualdad $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

Solución:

Primer miembro:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&12\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-12\\7&6\end{pmatrix}$$

Segundo miembro:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, comprueba la igualdad:

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C.$

Solución:

Primer miembro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$$

Segundo miembro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$$

El resultado es el mismo.

Actividades

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A+B$; **b)** $A-B$; **c)** $2A-3B+4C$; **d)** $A\cdot B$; **e)** $B\cdot A$; **f)** $A(B+C)$

6. Calcula los productos $A\cdot B$ y $B\cdot A$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

7. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A+2B$; **b)** $3A-B$; **c)** $(A+B)C$; **d)** $A\cdot C$; **e)** $B\cdot C$; **f)** $A\cdot C+B\cdot C$.

8. Comprobar la igualdad $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$. Donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

4. Producto de matrices cuadradas

El **producto de matrices cuadradas** merece atención especial puesto que las matrices cuadradas del conjunto $\boldsymbol{M}_{n \times n}$, o de orden *n,* se multiplican entre sí y el resultado es una matriz del conjunto $\boldsymbol{M}_{n \times n}$, o de orden *n*.

Por ejemplo, el producto de dos matrices de orden dos es otra matriz de orden dos, como se indica a continuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

En cuanto a la propiedades es evidente que siguen conservando las propiedades asociativa del producto y distributiva del producto respecto de la suma, pero se deben destacar otras propiedades.

En cuanto a la propiedad **conmutativa** siempre es posible el doble producto $A \cdot B$ y $B \cdot A$, pero en general el resultado será diferente, como se indica en el ejemplo siguiente.

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; se observa que $A \cdot B \neq B \cdot A$

El producto de matrices cuadradas posee **elemento unidad** y es la matriz identidad I_n; si A es una matriz cuadrada de orden n, se tiene:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

La **matriz** unidad de orden dos será: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Potencias de matrices cuadradas

Como hemos visto, el producto de dos matrices cuadradas es otra del mismo orden; esto hace que una matriz se pueda repetir como factor cuantas veces se precise, dando lugar a las **potencias de matrices**, así:

$$A \cdot A = A^2;\ A \cdot A \cdot A = A^3;\ \ldots;\ A \cdot A \cdot \ldots^{n \text{ veces}} \ldots \cdot A = A^n$$

La expresión de la potencia n-sima de una matriz se debe justificar para lo que se aplica el llamado **principio de inducción**.

Este método se emplea para probar que una proposición $P(n)$ es cierta para todos los números naturales. Se procede en dos etapas:

1) Se verifica que la proposición que se quiere probar es cierta para el primer número natural.

2) (Fase de inducción). Suponiendo que la proposición $P(n)$ es cierta para un número natural cualquiera, demostraremos que también lo es para el siguiente.

En el ejemplo siguiente veremos como se trabaja con el principio de inducción.

Ejemplos

8. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, determina y justifica la expresión de A^n. A partir de la potencia n-sima calcula A^{100}.

Solución:

Comenzamos por calcular las primeras potencias de la matriz *A*.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$$

En estas potencias los elementos a_{21} y a_{31} coinciden con el valor del exponente de la potencia respectiva, por lo que enunciamos la siguiente regla que da forma a las potencias de este ejemplo:

"Los valores de los elementos a_{21} y a_{31} de las potencias de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ coinciden con el valor del exponente de la potencia"

Regla que se formula $A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}$

Demostración de la regla.

La regla se cumple para n = 1, $A^1=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

Supongamos que se cumple para n = p, $A^p=\begin{pmatrix}1&0&0\\p&1&0\\p&0&1\end{pmatrix}$.

Veamos que se cumple para el siguiente a p que es p + 1,

$$A^{p+1}=A^p\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\p&1&0\\p&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\p+1&1&0\\p+1&0&1\end{pmatrix}$$

La regla se cumple, luego su formulación ha sido correcta.

Aplicación: Para n = 100, $A^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\100&1&0\\100&0&1\end{pmatrix}$.

9. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, A^4 y A^{50}.

Solución:

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^4 = A^3\cdot A = A$, cada A^3 se repite el proceso, al dividir 50 entre tres se obtiene 16 de cociente y 2 de resto.

$$A^{50} = A^{16\cdot 3+2} = (A^3)^{16}\cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Actividades

9. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcula: **a)** $A\cdot B$; **b)** $B\cdot A$; **c)** $A^2 + B^2$.

10. Calcula A^{20} y A^{30}, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Sea $A=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2. **b)** Calcula todos los valores de x e y para los que se verifica que $A^2=\begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

12. Hallar todas las matrices $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, con a, b, c, $\not\in$ R que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$.

13. Encontrar números a y b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = 2A$. Para estos valores de a y b y tomando $B = \frac{1}{2} A$, calcular B^{50} y A^{50}.

14. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcular las matices A^2, A^3, A^4, A^5 y obtener razonadamente la matriz A^n para $n > 5$.

15. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{120}.

16. Dada la matriz $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula P^n, para n número natural.

17. Desarrolla las siguientes expresiones matriciales: **a)** $(A + B)^2$; **b)** $(A - B)^2$; **c)** $(A + B)(A - B)$; **d)** $(A - B)(A + B)$.

5. Matriz traspuesta

Dada una matriz A del conjunto $\boldsymbol{M}_{mxn}$, se llama **matriz traspuesta** de A, y se representa A^t, a la matriz que resulta de cambiar las filas por las columnas en la matriz A.

De la definición se deduce que si A pertenece al conjunto $\boldsymbol{M}_{mxn}$, su traspuesta A^t pertenece al conjunto $\boldsymbol{M}_{nxm}$.

Ejemplo, la matriz traspuesta de:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ es } A^t=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo, la dimensión de A es 2×3 y la dimensión de A^t es 3×2.

Propiedades de la trasposición:

a) La traspuesta de la traspuesta es la matriz inicial.

$$(A^t)^t = A$$

b) La matriz traspuesta de una suma es igual a la suma de las traspuestas de los sumandos.

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

c) Si λ es un número real, entonces $(\lambda\cdot A)^t = \lambda\cdot A^t$.

d) La traspuesta del producto es igual a la traspuesta del segundo factor por la traspuesta del primer factor.

$$(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$$

e) Si $A = (a_{ij})$ es una matriz simétrica $A^t = A$.

En efecto, si A es simétrica, se cumple $a_{ij} = a_{ji}$, por tanto, se cambia de notación y resulta $A^t = A$.

Ejemplos

10. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Comprueba: **a)** $(A^t)^t = A$; **b)** $(A + B)^t = A^t + B^t$; **c)** $(2\cdot A)^t = 2\cdot(A)^t$.

Solución:

a) $$(A^t)^t=\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^t\right)^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=A.$$

b) Primer miembro: $(A+B)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Segundo miembro: $A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Los dos miembros son iguales.

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Solución:

Primer miembro: $(A \cdot B)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Segundo miembro: $B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Los dos miembros son iguales.

Actividades

18. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcula: **a)** A^t; **b)** B^t; **c)** $(A + B)^t$; **d)** $(A + B + C)^t$.

19. Si A y B son dos matrices cuadradas demostrar que:

a) $A + A^t$ es simétrica.

b) $A - A^t$ es antisimétrica.

c) $A \cdot A^t$ es simétrica.

d) Si A es simétrica, $B \cdot A \cdot B^t$ es simétrica.

6. Matriz inversa

Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B llamada **matriz inversa** de A, tal que $A·B = B·A = I_n$.

Cuando existe la matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa así: A^{-1}; es decir,

$$A·A^{-1} = A^{-1}·A = I_n$$

Las matrices cuadradas que tienen inversa se las llama **matrices regulares**.

Las matrices cuadradas que no tienen inversa se llaman **matrices singulares**.

6.1. Cálculo de la matriz inversa a partir de la definición

Dada la matriz cuadrada de orden dos $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, vamos a calcular su inversa.

Se trata de calcular una matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ que cumpla: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Efectuamos el producto: $\begin{pmatrix} 4x+7z & 4y+7u \\ x+2z & y+2u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La igualdad de los dos términos da lugar a los sistemas:

$$\begin{cases} 4x+7z=1 \\ x+2z=0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 4y+7u=0 \\ y+2u=1 \end{cases}$$

Las soluciones de los sistemas son: $x=2,\ z=-1,\ y=-7,\ u=4$.

La matriz inversa será: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

6.2. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss

En el **método de Gauss** para el cálculo de la matriz inversa de A, cuando exista, se parte de la matriz $(A \mid I_n)$; y mediante las trasformaciones que se indican a continuación llegamos a la matriz $(I_n \mid B)$; entonces la matriz $B = A^{-1}$ es la inversa de A.

Las transformaciones que se pueden aplicar son las siguientes:

- Cambiar las filas de lugar.
- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Sumar a una fila otra multiplicada por un número.

Ejemplos

12. Hallar la inversa de la matriz $M=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$ y comprobar el resultado.

Solución :

Añadimos a la matriz M la matriz unidad, así:

$$(M|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&5&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}1^a F\leftrightarrow 2^a F\\ \\ \end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&0&1\\3&5&1&0\end{array}\right)\begin{matrix}\\ 2^a F-3x1^a F\end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&0&1\\0&-1&1&-3\end{array}\right)\begin{matrix}\\ -2^a F\end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&0&1\\0&1&-1&3\end{array}\right)\begin{matrix}1^a F-2x2^a F\\ \\ \end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-5\\0&1&-1&3\end{array}\right)$$

La matriz inversa es $M^{-1}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}$.

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

13. Hallar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}2&-4\\3&-1\end{pmatrix}$.

Solución :

Añadimos a la matriz A la matriz unidad I, así:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&-4&1&0\\3&-1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ 2x2^a F\end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2&-4&1&0\\6&-2&0&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ 2^a F-3x1^a F\end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2&-4&1&0\\0&10&-3&2\end{array}\right)\begin{matrix}5x1^a F\\ \\ \end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}10&-20&5&0\\0&10&-3&2\end{array}\right)\begin{matrix}1^a F+2x2^a F\\ \\ \end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}10&0&-1&4\\0&10&-3&2\end{array}\right)\begin{matrix}1^a F\div 10\\ 2^a F\div 10\end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\0&1&-\frac{3}{10}&\frac{1}{5}\end{array}\right)$$

La matriz inversa es, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\-\frac{3}{10}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

Como se puede comprobar:

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\-\frac{3}{10}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-4\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\-\frac{3}{10}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

14. Calcula, aplicando el método de Gauss, la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

Solución :

Añadimos a la matriz A la matriz unidad I_3, así:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\2^aF-1^aF\\\\\end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}1^aF-3^aF\\\\\\\end{matrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\\\2^aF+3^aF\end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&-1&1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\-2^aF+3^aF\\\\\end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)$$

La inversa de A es: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Como se puede comprobar:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

6.3. Aplicaciones de la matriz inversa

Las operaciones con matrices y en particular el cálculo de la matriz inversa estudiadas en esta Unidad, permiten resolver situaciones problemáticas en las que aparecen matrices.

A continuación desarrollamos algunas situaciones para cuya resolución se precisa realizar operaciones (calcular la matriz inversa, multiplicar…) de las estudiadas en esta Unidad. Estas situaciones se llaman ecuaciones matriciales; se resuelven con los mismos principios que las ecuaciones con coeficientes y variables de números reales, teniendo en cuenta algunas de las siguientes consideraciones:

- Algunas matrices no tienen inversa.
- El producto de matrices no es conmutativo; por lo que a la hora de multiplicar los dos miembros de una igualdad se debe tener en cuenta que la multiplicación se hace bien por la izquierda o bien por la derecha en ambos miembros de la igualdad.

En el caso de ecuaciones matriciales que se reducen a la forma $A\cdot X = B$ o $X\cdot A = B$ y A tiene inversa; la incógnita X se calcula respectivamente multiplicando por la izquierda o por la derecha por A^{-1} los dos miembros de la igualdad.

En la ecuación $A\cdot X = B$; se multiplican por la izquierda los dos miembros por A^{-1}.

$$A^{-1}(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B; \quad (A^{-1}\cdot A)X = A^{-1}\cdot B; \quad I\cdot X = A^{-1}\cdot B; \quad X = A^{-1}\cdot B$$

En la ecuación $X\cdot A = B$, se multiplican por la derecha los dos miembros por A^{-1}

$$(X\cdot A)\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1}; \quad X\cdot(A\cdot A^{-1}) = B\cdot A^{-1}; \quad X\cdot I = B\cdot A^{-1}; \quad X = B\cdot A^{-1}$$

Ejemplo

15. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A\cdot X + B = C$;

b) $X\cdot A - 2B = C$.

Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Solución :

a) $A\cdot X + B = C;\ A\cdot X = C - B;\ A^{-1}(A\cdot X) = A^{-1}(C-B);\ X = A^{-1}(C-B)$

Se calcula la inversa de A por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) 2^a F - 2x1^a F \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) 2^a F \div (-2) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) 1^a F - 4x2^a F \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ó $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Se sustituyen las variables por sus valores y se opera:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -22 & -20 \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

b) $X\cdot A - 2B = C;\ X\cdot A = C + 2B;\ (X\cdot A)A^{-1} = (C+2B)A^{-1};\ X = (C+2B)A^{-1}$.

Se sustituyen las variables por sus valores y se opera:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right]\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 38 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -19 & \frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

A veces el problema consiste en determinar algunos elementos de una o varias matrices que figuran en una ecuación matricial, como en el ejemplo siguiente:

Ejemplo

16. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix}$, determinar los valores de $x,\ y,\ z$ para que se verifique la igualdad:

$$A^t\cdot A=\begin{pmatrix}1 & y\\ x & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}$$

Solución :

Se multiplican las matrices y se igualan las matrices de los dos miembros:

$$\begin{pmatrix}1 & y\\ x & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+y^2 & x+yz\\ x+yz & x^2+z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}1+y^2=10\\ x+yz=0\\ x+yz=0\\ x^2+z^2=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2=9\\ x+yz=0\\ x^2+z^2=10\end{cases}$$; de la primera ecuación $y=\pm 3$

Si $y=3$ el sistema $\begin{cases}x+3z=0\\ x^2+z^2=10\end{cases}$ tiene como soluciones: $z=1,\ x=-3$ y $z=-1,\ x=3$.

Si $y=-3$ el sistema $\begin{cases}x-3z=0\\ x^2+z^2=10\end{cases}$ tiene como soluciones: $z=1,\ x=3$ y $z=-1,\ x=-3$.

Las ternas $(x,\ y,\ z)$ que verifican la ecuación matricial son: $(-3,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 3,\ -1)$, $(3,\ -3,\ 1)$ y $(-3,\ -3,\ -1)$

Actividades

20. Calcular las matrices inversas de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$;

b) $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$;

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

21. Hallar la inversa de la matriz $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

22. Calcular la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y comprobar el resultado.

23. Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y comprobar el resultado.

24. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hallar X tal que $A \cdot X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

25. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz de la forma $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ que verifique que $A \cdot X = X \cdot B$.

26. Halla la matriz X que satisface la ecuación $A \cdot X = B \cdot$ A, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

27. Encontrar todas las matrices X tales que $A \cdot X = X \cdot A$, siendo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

28. Resolver la ecuación en X, $AX + 3B + 2C = D$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Las matrices en la resolución de problemas

Las matrices aparecen con frecuencia en las ciencias que trabajan con datos ordenados, como es el caso de las Ciencias Físicas, Económicas y Sociales. A continuación se presentan algunas situaciones en las que las matrices son de utilidad.

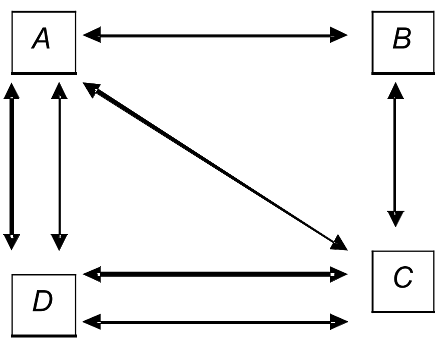
7.1. Organización matricial de la información

Las **matrices de información** conforme venimos diciendo permiten resumir informaciones diversas; entre otras pueden estar ligadas a gráficos como en el siguiente ejemplo.

Las ciudades *A*, *B*, *C* y *D* se comunican mediante líneas de autobuses de ida y vuelta como se indica en el gráfico.

Expresar este grafico en forma de matriz.

Solución:



A cada línea del gráfico se le asigna el valor uno y cero a la falta de comunicación entre ciudades;

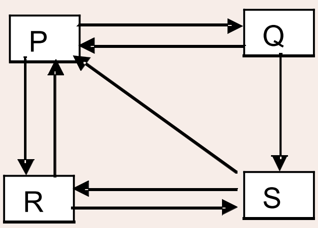
con estos criterios resulta la matriz de información:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo

17. En una reunión de cuatro compañeros *P, Q, R* y *S* existen relaciones de simpatía e indiferencia, se tienen simpatía *P*, a *Q* y a *R*; *Q*, a *P* y a *S*; *R*, a *P* y a *S*; y *S*, a *P* y a *R*. Expresa la información anterior mediante un gráfico y mediante una matriz.

Solución:
La simpatía entre compañeros se indica mediante una flecha que va del compañero que siente simpatía hacia el compañero por el que aprecia; la falta de flecha indica indiferencia.



A cada flecha del gráfico (simpatía) le asignamos un 1 y cero a la indiferencia entre compañeros; con estos valores resulta la matriz de información:

$$\begin{array}{c} \\ P \\ Q \\ R \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

7.2. Operaciones con matrices. Aplicaciones

Cuando la información se encuentra dispuesta en forma matricial, los resultados de **operar con matrices** pueden dar lugar a nuevas informaciones.

Ejemplo

18. Un constructor opera en tres ciudades Madrid, Sevilla y Valencia y edifica pisos de dos tipos, *A* y *B*. El número de pisos construidos de cada tipo y ciudad en los años 2007 y 2008 vienen expresados por las matrices siguientes:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{r} Madrid \\ Sevilla \\ Valencia \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{r} Madrid \\ Sevilla \\ Valencia \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se pide:

a) Calcula los pisos construidos durante los dos años de cada tipo y en cada ciudad.

b) Calcular los pisos que debe construir en 2009, para reducir la producción de los construidos en 2008 a la mitad.

c) Cada piso del tipo *A* lleva 5 puertas y 9 ventanas; los del tipo *B* tienen 3 puertas y 7 ventanas. ¿Cuántas ventanas y puertas se utilizaron en cada ciudad para cubrir las necesidades de las construcciones del año 2008?

Solución.

Sean *P* y *Q* las matrices asociadas a las construcciones de los años 2007 y 2008 respectivamente.

a) La matriz *P* + *Q* informa de los pisos construidos entre los dos años.

$$P+Q=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 9 \\ 8 & 11 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

b) La matriz informa de los pisos a construir durante el año 2009.

$$\frac{1}{2}\cdot Q=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Dispongamos en forma matricial los números de puertas *P* y de ventanas *V*, que precisan los dos modelos de pisos:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} P & V \end{array} \\ \begin{array}{r} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para ver las puertas y ventanas que se precisan en las construcciones de realizadas en Madrid durante el año 2008, en necesario realizar las operaciones siguientes.

$6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = 42$ Puertas.
$6 \cdot 9 + 4 \cdot 7 = 82$ Ventanas.

Estos cálculos se pueden realizar para las dos ciudades restantes pero quedan resumidos mediante el producto de matrices,

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 5+4\cdot 3 & 6\cdot 9+4\cdot 7 \\ 4\cdot 5+4\cdot 3 & 4\cdot 9+4\cdot 7 \\ 2\cdot 5+2\cdot 3 & 2\cdot 9+2\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 82 \\ 32 & 74 \\ 16 & 32 \end{pmatrix}$$

7.3. Operaciones con matrices asociadas a un gráfico

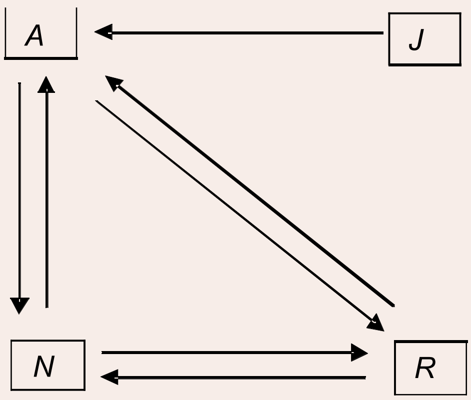
Los resultados de algunas operaciones entre matrices asociadas a gráficos trasmiten nuevas informaciones, sobre las situaciones que el gráfico describe.

Ejemplo

19. Arabel, Julio, Nereida y Raúl se comunican a través de Internet como se indica en el siguiente gráfico:

Traducir la información del gráfico en una matriz de información G, calcular G^2, G^3 y $G + G^2$; en cada cálculo interpretar los resultados.

Solución:



En el gráfico *A* representa Arabel, *J* Julio, *N* Nereida y *R* Raúl.

La matriz asociada al gráfico al asignar el número 1, a la flecha del que parte al que llega será la siguiente:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A & J & N & R \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ J \\ N \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se designa por G la matriz del gráfico.

Calculamos $G^2 = G \cdot G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El elemento $a_{11} = 2$ de la matriz G^2 indica que se comunica con A de dos formas diferentes a través de otro; estas son $A - N - A$ y $A - R - A$.

El elemento $a_{32} = 0$ significa que N no puede comunicarse con J a través de otro.

El elemento $a_{23} = 1$ significa que J se puede comunicar con N a través de otro: $J - A - N$.

La matriz G^3 indica las formas de comunicarse cada persona con otra a través de otras dos.

$$G^3 = G \cdot G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo el elemento $a_{13} = 3$ informa que Arabel y Nereida se pueden comunicar de tres formas a través de otros dos internautas: $A - R - A - N$, $A - N - R - N$ y $A - N - A - N$.

La matriz $G + G^2$ nos informa del número de formas que pueden comunicarse cada internauta con el resto directamente o a través de otro.

$$G + G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividades

29. Un importador de CD los importa de dos calidades, normales (*N*) y extra (*E*). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que vende a los siguientes precios en euros.

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Normal *N*	0,4	0,8	1,2
Extra *E*	0,3	0,5	0,8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes,

	Normales *N*	Extras *E*
De 2 unidades	70000	5000
De 5 unidades	60000	4000
De 10 unidades	50000	50000

se pide:

a) Resumir la información anterior en dos matrices *A* y *B*: *A* será una matriz 2x3 que recoja las ventas en un año y B una matriz 3x2 que recoja los precios.

b) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz *A* por *B* y dar su significado.

c) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz *B* por *A* y dar su significado.

d) Comparar la suma de los elementos de las dos diagonales.

30. En una acería se fabrican tres tipos de productos: acero en láminas, en rollos o aceros especiales. Estos productos requieren chatarra, carbón y aleaciones en las cantidades que se indican en la tabla siguiente, por cada unidad de producto fabricado:

	Acero en láminas	Acero en rollos	Aceros especiales
Chatarra	8	6	6
Carbón	5	6	4
Aleaciones	2	1	3

a) Si durante el próximo mes se desean fabricar 6 unidades de acero en láminas, 4 unidades de acero en rollos y 3 unidades de aceros especiales, obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones que serán necesarias.

b) Si se dispone de 40 unidades de chatarra, 28 de carbón y 14 de aleaciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de acero se podrán fabricar con estos materiales?

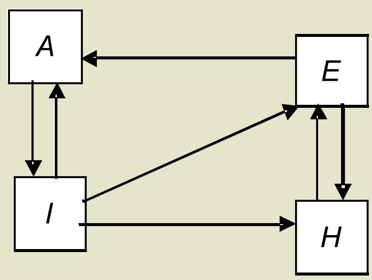
31. Carmen trabaja como telefonista en una empresa de lunes a viernes entre las nueve de la mañana y las dos de la tarde. Además, cuida de un bebé de cuatro a siete de la tarde los lunes, miércoles y viernes y es mecanógrafa en un bufete de abogados los martes y jueves de cinco a nueve.

a) Escribir la matriz que expresa el número de horas que dedica a cada actividad a lo largo de los días de la semana.

b) Si le pagan 9 euros por hora como telefonista, 7 euros por cada hora que cuida al bebé y 12 euros por hora por su trabajo como mecanógrafa, expresar matricialmente los ingresos diarios de Carmen.

c) Si dejara de ir los lunes a cuidar al bebé y los jueves al bufete y le aumentaran su sueldo como telefonista un 5%, ¿como serán en este caso las dos matrices anteriores?

32. En el gráfico siguiente aparecen indicadas las comunicaciones de cuatros puntos importantes de una localidad; Ayuntamiento = *A*, Estación de tren = *E*, Instituto de Secundaría *I* y Hospital = *H*. Se pide:



a) Forma la matriz de información del gráfico.

b) Calcula el cuadrado de la matriz anterior y explica su significado.

Recuerda

✓ **Definición de matriz**

Una matriz de orden m x n es una disposición en tabla rectangular de m x n números reales dispuestos en m filas y n columnas.

✓ **Igualdad de matrices.**

Dos matrices A y B son iguales si tienen la misma dimensión (o el mismo orden, si son cuadradas) y además son iguales todos los elementos que ocupan el mismo lugar.

✓ **Operaciones con matrices.**

- **Suma**. Dadas dos matrices A y B de dimensión $m \times n$, la matriz suma (diferencia) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ se obtiene al sumar (restar) los elementos que ocupan el mismo lugar en una y otra matriz.
- **Producto de un número por una matriz.** El producto de un número por una matriz se obtiene al multiplicar por k cada elemento de $A = (a_{ij})$; es decir $kA = (ka_{ij})$
- **Producto de matrices**. Sean A una matriz de orden $m \times n$, y B una matriz de orden $n \times p$; las columnas de A coinciden con las filas de B, el producto de matrices A y B es otra matriz C de orden $m \times p$ con m filas (las del primar factor A) y p columnas (las del segundo factor B). El elemento c_{ij} de la matriz producto C es el resultado de multiplicar la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B consideradas ambas como matrices fila y columna respectivamente.

✓ **Matriz inversa.**

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama matriz inversa si existe, otra matriz B, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Cuando existe la matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa así: A^{-1}; es decir, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

- Las matrices cuadradas que tienen inversa se las llama matrices regulares.
- Las matrices cuadradas que no tienen inversa se llaman matrices singulares.
- Para calcular la matriz inversa mediante la definición se consideran los elementos de la matriz inversa como incógnitas.
- Por el método de Gauss se parte de la matriz $(A \mid I_n)$; y mediante las trasformaciones se llega a la matriz $(I_n \mid B)$; entonces la matriz $B = A^{-1}$ es la inversa de A.

✓ **Aplicaciones de la matriz inversa.**

Las operaciones con matrices y en particular el cálculo de la matriz inversa estudiadas en esta Unidad, permiten resolver situaciones problemáticas en las que aparecen matrices. En el caso de ecuaciones matriciales que se reducen a la forma $A \cdot X = B$; o $X \cdot A = B$ y A tiene inversa; la incógnita X se calcula respectivamente multiplicando a la izquierda o derecha por A^{-1} los dos miembros de la igualdad.

✓ **Las matrices en la resolución de problemas.**

Las matrices aparecen con frecuencia en las ciencias que trabajan con datos ordenados, caso de las Ciencias Físicas, Económicas y Sociales, como has podido comprobar en el desarrollo de la Unidad.