TEMA 8 – LIMITES

CÁLCULO DE LÍMITES

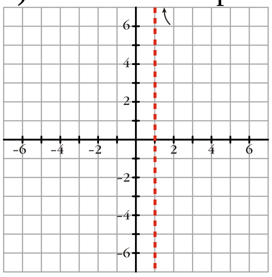
<u>EJERCICIO 1</u> : Da una definición para estas expresiones y represéntalas gráficamente:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x^2}{x^2-1} = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$ **c)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-2}{x^2+1} = 2$

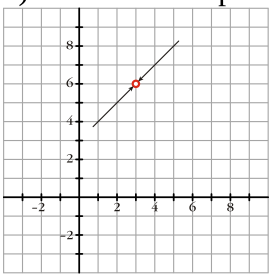
d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ **e)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2-1}{x^2+2x} = 5$

Solución:

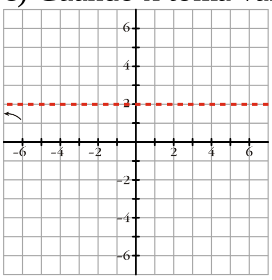
a) Cuando x se aproxima a "1", la función se hace muy grande



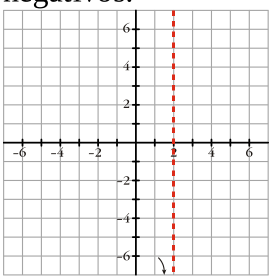
b) Cuando x se aproxima a "3", la función se aproxima a "6"



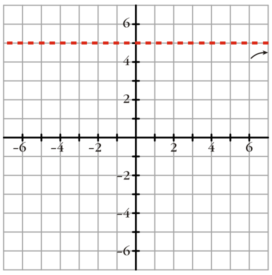
c) Cuando x toma valores muy grandes negativos la función se aproxima a 2.



d) Cuando x se aproxima a 2, con valores menores que 2, la función toma valores muy grandes negativos.



e) Cuando x toma valores muy grandes positivos, la función se aproxima a 5.



EJERCICIO 2 : Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - x^2 + 1\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{\log x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[3x^2 - \sqrt{x^9+1}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{\log x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2^x}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2^x - x^2\right)$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - \log x\right)$ j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3^x}{x^2+1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^x - x^2 + 1\right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 - 3x}{\log x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4 + 3x}{\log x^2} = +\infty$

Porque una potencia es un infinito de orden superior a un logaritmo.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[3x^2 - \sqrt{x^9+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-x^{\frac{9}{2}}\right] = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x+1} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{\log x} = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logartimos.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{2^{-x}} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2^x - x^2\right) = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - \log x\right) = +\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{-x}}{x^2+1} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

<u>EJERCICIO 3</u> : Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{5x^2-2x}-3x\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^6-2x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+1}}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right]$ **g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-1}-2x\right]$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$ **j)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}$

Solución:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{5x^2-2x}-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2-2x}-3x\right)\left(\sqrt{5x^2-2x}+3x\right)}{\sqrt{5x^2-2x}+3x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-2x-9x^2}{\sqrt{5x^2-2x}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2-2x}{\sqrt{5x^2-2x}+3x}=-\infty$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^6-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-1}{\sqrt{x^6+2x}}=0$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)(x^2+1)-x^3(x+2)}{(x+2)\ (x^2-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-1-x^4-2x^3}{x^3+x+2x^2+2}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3-1}{x^3+2x^2+x+2}=-2$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

f) $$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+3x}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-4x^2}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+3x}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=-\infty$$

g) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-1}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)\left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1-4x^2}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-1}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=-\infty$$

h) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{-2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}=0$$

i) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2(x^2+1)-x^3(x+1)}{(x+1)\ (x^2+1)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4+3x^2-x^4-x^3}{x^3+x+x^2+1}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-x^3+3x^2}{x^3+x^2+x+1}=+\infty$$

j) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

EJERCICIO 4 : Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{2x}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x-3}\right]$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{(2x+1)(x-1)^2}{(3x-2)(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{3x-2}}=\sqrt[3]{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{2x+4}-2)\,(\sqrt{2x+4}+2)\,(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)\,(\sqrt{x+1}+1)\,(\sqrt{2x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+4-4)\,(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1-1)\,(\sqrt{2x+4}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{2x+4}+2}=\dfrac{4}{4}=1$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)^2\,(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{-5}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{3x-2}{(x+1)(x-1)}=+\infty\Rightarrow$ No existe

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{2x}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x-3}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x-3)}==\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{-18}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)}=-\infty\Rightarrow$ No existe

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{9}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+5}{(x+1)(x-2)}=+\infty\Rightarrow$ No existe

EJERCICIO 5 : Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+4}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3x}{x-1}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x-2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+4}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+4}{x^2-x+6}-1\right)\cdot\frac{3x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+4-x^2+x-6}{x^2-x+6}\right)\cdot\frac{3x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(-x^2+3x-2)\,(3x)}{(x^2-x+6)\,(x-1)}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x(x-2)\,(x-1)}{(x^2-x+6)\,(x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3x(x-2)}{x^2-x+6}}=e^{\frac{3}{6}}=e^{\frac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x-2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4}-1\right)\cdot\frac{x}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-2-x^2+2x-4}{x^2-2x+4}\right)\cdot\frac{x}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(-x^2+5x-6)x}{(x^2-2x+4)\,(x-2)}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x(x-3)\,(x-2)}{(x^2-2x+4)\,(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x(x-3)}{(x^2-2x+4)}}=e^{\frac{2}{4}}=e^{\frac{1}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}-1\right)\cdot\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1-4x-4}{4x+4}\right)\cdot\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{4x+4}\cdot\frac{2x}{x-3}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)(2x)}{(4x+4)(x-3)}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+1)(2x)}{(4x+4)}} = e^{\frac{42}{16}} = e^{\frac{21}{8}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1}-1\right)\cdot\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-3x+1-5x-1}{5x+1}\right)\cdot\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-8x}{5x+1}\cdot\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x(x-8)}{x(5x+1)}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3(x-8)}{5x+1}} = e^{-24}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+1}-1\right)\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2x+3-x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}} = e^{\frac{-1}{2}}$

<u>EJERCICIO 6</u> : Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2-3x}{-2x+1}\right)^{\frac{-x}{2}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-3}$ **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$ **g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$ **j)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2-3x}{-2x+1}\right)^{\frac{-x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+3x}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x}{2x+5}-1\right)\cdot\left(2x^2-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x-2x-5}{2x+5}\right)\cdot\left(2x^2-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x^2+4}{2x+5}} = e^{-\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2}{4+5x}-1\right)\cdot\frac{2x}{3}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2-4-5x}{4+5x}\right)\cdot\frac{2x}{3}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-12x}{12+15x}} = e^{\frac{-12}{15}} = e^{\frac{-4}{5}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x-2}{-3x+5}\right)^{x^2-1} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^{-2x-3} = 2^{-\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{2+3x^2}-1\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2-3x^2}{2+3x^2}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-2}{4+6x^2}} = e^{0} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)\cdot 2x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\right)\cdot 2x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2-2}} = e^{0} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2-9x}\right)^{-x} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\infty} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{+\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x-1}{-3x+2}\right)^{x^2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{3+2x}-1\right)\cdot(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2-3-2x}{3+2x}\right)\cdot(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x-5}{3+2x}} = e^{\frac{-5}{2}}$

<u>EJERCICIO 7</u> : Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x+\operatorname{sen}x}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{4+3x}\right)^{x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{sen}x}{x^3+3x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^3+3x}}{\sqrt{x^2+2}}$ h) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-2\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}$

j) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x}+x\right]$ l) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4-4\cos x}{x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)$ n) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+3}{2x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ ñ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x\cos x+\operatorname{sen}x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-x^2-1}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x-1}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x+x} = \dfrac{-3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^3-5x^2+3x+9} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)^2\,(x+1)} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)} = \dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)} = -\infty;\quad \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{(x-3)\,(x+1)} = +\infty \Rightarrow$ Como son distintos $\Rightarrow$ No existe el límite

c) $\dfrac{0}{0}$ (Factorizar y simplificar (no podemos), aplicar equivalencias (no podemos porque no se pueden aplicar en sumas) Lo veremos en el tema 10 (Regla de L´Hôpital)

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\,(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\,(x+1)}{x-1} = \dfrac{2}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\,(x+1)}{x-1} = -\infty;\quad \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\,(x+1)}{x-1} = +\infty$ $\Rightarrow$ Como son distintos $\Rightarrow$ No existe el límite

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{4+3x}\right)^{x+1} = \left(1^{+\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{4+3x}-1\right)\cdot(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2-4-3x}{4+3x}\cdot(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x-6}{3x+4}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{sen}x}{x^3+3x^2} \underset{\text{Aplicando equivalencias}}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^3+3x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(x+3)} = \dfrac{1}{0+3} = \dfrac{1}{3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^3+3x}}{\sqrt{x^2+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[5]{-x^3-3x}}{\sqrt{x^2+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^{3/5}}{x} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{x+1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-(x+1)(x+2)}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-x^2-3x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{-x^2-2}{x^2-4} = \dfrac{-6}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{-x^2-2}{x^2-4} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{-x^2-2}{x^2-4} = -\infty$ $\Rightarrow$ No existe el límite

i) $\dfrac{0}{0}$ No podemos factorizar ni aplicar equivalencias.(Lo veremos en el tema 10)

j) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)\,(x+3)}{(x-2)\,(x+1)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{5}{3}$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+x}+x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-x}-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2-x}-.x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\sqrt{x^2-x}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{2x} = \dfrac{-1}{2}$

l) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{4-4\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{4(1-\cos x)}{x^2} \approx \lim\limits_{x\to0} \dfrac{4.\dfrac{x^2}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2}{x+1} - \dfrac{3x^3}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2(x-1)-3x^3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-3x^2-3x^3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^2}{x^2-1} = -3$

n) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x+3}{2x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(1^\infty\right) = e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x+3}{2x+2}-1\right)\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{x+3-2x-2}{2x+2}\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{-x+1}{(2x+2)(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{2x+2}} = e^{\frac{-1}{4}}$

ñ) $\dfrac{0}{0}$ (No podemos factorizar, ni aplicar equivalencias $\Rightarrow$ No veremos en el tema 10)

CONTINUIDAD

EJERCICIO 8 : Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}$, estudia su continuida d. Indica el tipo de discontinuidad que hay en los puntos en los que no es continua.

Solución: $f(x) = \dfrac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10} = \dfrac{(x+5)\left(3x^2+1\right)}{(x+5)(x-2)}$

- Dominio = **R** – {–5, 2}$\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en **R** – {–5, 2}.
- Veamos que tipo de discontinuidad que presenta en $x=-5$ y en $x=2$:

$\lim\limits_{x\to-5} f(x) = \lim\limits_{x\to-5} \dfrac{3x^2+1}{x-2} = \dfrac{76}{-7} = \dfrac{-76}{7} \Rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x=-5$.

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x^2+1}{x-2} = \dfrac{13}{(0)}$. Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

Discontinuidad de salto infinito en $x=2$.

EJERCICIO 9 : Estudia la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 4+\ln x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

Solución:

• Dominio = **R**

• Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

• En $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (3x^2+1) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 0$.

• En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x^2+1) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (4+\ln x) = 1 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 1$.

• Por tanto, $f(x)$ es continua en **R**.

EJERCICIO 10 : Estudia la continuidad de la siguiente función. En los puntos en los que no sea continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta: $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$

Solución: $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}=\dfrac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)}$

• Dominio = **R** − {−5, 2}$\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en **R** − {−5, 2}.

• Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en $x = -5$ y en $x = 2$:

$\lim\limits_{x\to -5} f(x) = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{3x+4}{x+5} = \dfrac{-11}{(0)}$. Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = -\infty$

Discontinuidad de salto infinito en $x = -5$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+4}{x+5} = \dfrac{10}{7}$ $\Rightarrow$ Discontinuidad evitable en $x = 2$.

EJERCICIO 11 : Estudia la continuidad de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x} & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -1\le x<2 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

Solución:

• Dominio = **R**

• Si $x \neq -1$ y $x \neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones que son continuas en los intervalos correspondientes.

• En $x=-1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x+3}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(x^2-2\right) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x=-1$.

• En $x=2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(x^2-2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x+1) = 7 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es discontinua en $x=2$. Hay una discontinuidad de salto finito.

<u>EJERCICIO 12</u> : Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad que hay: $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-1}$

Solución:

• Dominio = **R** − {−1, 1}.⇒ $f(x)$ es continua en **R** − {−1, 1}.

• Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en $x=-1$ y en $x=1$:

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^2(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \dfrac{0}{-2} = 0$ ⇒Discontinuidad evitable en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \dfrac{-4}{(0)}$. Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

Discontinuidad de salto infinito en $x=1$.

<u>EJERCICIO 13</u> : Calcula los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ x^2 + bx + 1 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ ax & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

- Si $x \neq 1$ y $x \neq 1$ → $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

- En $x=-1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(2x^3-x^2+a\right) = a-3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(x^2+bx+1\right) = 2-b \quad \Rightarrow \\ f(-1) = 2-b \end{array}\right.$

Para que sea continua en $x=1$, ha de ser $a-3=2-b$.

- En $x=1$: $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2+bx+1\right) = b+2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (ax) = a \\ f(1) = a \end{array}\right.$

Para que sea continua en $x=1$, ha de ser $a=b+2$.

• Uniendo las dos condiciones anteriores, $f(x)$ será continua si: $\begin{cases} a-3=2-b \\ a=b+2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

<u>EJERCICIO 14</u> : Estudia la continuidad de la función: $\mathbf{f(x)=\begin{cases} 3x^2-2^x & si \quad x<0 \\ x^2-x-1 & si \quad 0\le x<1 \\ 1+\ln x & si \quad x\ge 1 \end{cases}}$

Solución:

- Si $x\neq 0$ y $x\neq 1$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3x^2-2^x\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-x-1\right)=1 \\ f(0)=-1 \end{array}\right\}$ f(x) es continua en $x=0$

- En $x=1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-x-1\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\ln x\right)=1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hay una discontinuidad de salto finito en $x=1$.

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+bx-1 & si \quad x<1 \\ 3x-a & si \quad 1\le x<2 \\ 2^x+\log_2 x & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Solución:

- Si $x\neq 1$ y $x\neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^2+bx-1\right)=b-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x-a\right)=3-a \\ f(1)=3-a \end{cases}$ Para que sea continua en $x=1$, ha de ser $b-2=3-a$.

- En $x=2$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x-a\right)=6-a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2^x+\log_2 x\right)=5 \\ f(2)=5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Para que sea continua en $x=2$, ha de ser $6-a=5$, es decir $a=1$.

• Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que, para que $f(x)$ sea continua, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} b-2=3-a \\ a=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1 \\ b=4 \end{array}$$

EJERCICIO 16 : Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta: $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}}$

Solución:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}=\frac{x\ (x-3)\ (x+1)}{(x-3)\ (x+2)}$$

• Dominio = **R** − {−2, 3}

$f(x)$ es continua en **R** − {−2, 3}. Veamos el tipo de discontinuidad que hay en $x=-2$ y en $x=3$:

- En $x=-2$: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty \Rightarrow$Hay una discontinuidad infinita en $x=-2$.

- En $x=3$: $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x\ (x+1)}{x+2}=\dfrac{12}{5}\Rightarrow$Hay una discontinuidad evitable en $x=3$.

EJERCICIO 17 : Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{3} & \text{si} \quad x<-1 \\ e^{x^2-1} & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}}$$

Solución:

- Si $x\neq-1$ y $x\neq1$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- En $x=-1$: $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x^2-1}{3}=\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} e^{x^2-1}=1 \\ f(-1)=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Hay una discontinuidad} \\ \text{de salto finito en } x=-1.\end{array}$$

- En $x=1$: $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} e^{x^2-1}=1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x)\text{ es continua} \\ \text{en } x=1.\end{array}$$

EJERCICIO 18 : Halla los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-a & \text{si} \quad x<1 \\ 2x^2+bx+a & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Solución:

• Dominio = **R**

- Si $x \neq 1$ y $x \neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3x - a) = 3 - a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(2x^2 + bx + a\right) = 2 + b + a \\ f(1) = 2 + b + a \end{array}\right\}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $3 - a = 2 + b + a \rightarrow 2a + b = 1$

- En $x = 2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(2x^2 + bx + a\right) = 8 + 2b + a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x + 1) = 7 \\ f(2) = 7 \end{array}\right\}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de ser: $8 + 2b + a = 7 \rightarrow a + 2b = -1$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 1 - 2a \\ a + 2(1 - 2a) = -1 \rightarrow a + 2 - 4a = -1 \rightarrow -3a = -3 \rightarrow a = 1; \quad b = -1 \end{array}$$

<u>EJERCICIO 19</u> : Calcula el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3a + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

- Dominio = **R**
- Si $x \neq 1$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(ax^2 - 2x + 1\right) = a - 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3a + \ln x) = 3a \\ f(1) = a - 1 \end{array}\right\}$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $a - 1 = 3a \rightarrow 2a = -1 \rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

<u>EJERCICIO 20</u> : Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Solución:

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de tenerse que: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)^2 (3x + 1)}{(x - 2)^2 (4x + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x + 1}{4x + 2} = \frac{7}{10}$$

$f(2) = k$

- Por tanto, ha de ser: $k = \dfrac{7}{10}$

<u>EJERCICIO 21</u> : Calcula los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si} \quad x\le 1 \\ 4x^2+ax+b & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 3x+b & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Solución:

• Si $x \neq 1$ y $x \neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

• En $x = 1$:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax^2-2x\right) = a-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(4x^2+ax+b\right) = 4+a+b \\ f(1) = 4+a+b \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua $x = 1$, ha de ser: $a - 2 = 4 + a + b \rightarrow b = -6$

• En $x = 2$:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(4x^2+ax-6\right) = 10+2a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x-6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de ser: $10 + 2a = 0 \rightarrow 2a = -10 \rightarrow a = -5$

• Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = -5$ y $b = -6$.

<u>EJERCICIO 22</u> : Halla el valor de *a* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-3a+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Solución:

• Si $x \neq 1$ $\rightarrow$ la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

• En $x = 1$:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(2^x+a\right) = 2+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(x^2-3a+5\right) = 6-3a \\ f(1) = 2+a \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser: $2 + a = 6 - 3a \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1$

TEOREMAS

<u>EJERCICIO 23</u> : Dada la función $f(x) = x^3 + 2x + 1$, encuentra un intervalo de amplitud menor que 2 en el que $f(x)$ corta al eje *OX*.

Solución:

• $f(x)$ es continua en **R**, pues es una función polinómica.

• Tanteando, encontramos que $f(-1) = -2$, $f(0) = 1$.

• Es decir: $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [-1, 0] \\ \text{signo de } f(-1) \neq \text{ signo de } f(0) \end{array}\right\}$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$. $f(x)$ cortará al eje OX en $x = c$.

EJERCICIO 24 : Halla un intervalo de amplitud menor que 2 en el que la siguiente ecuación tenga, al menos, una raíz real: $3x^3 + 2x - 7 = 0$

Solución:

- Consideramos la función $f(x) = 3x^3 + 2x - 7$, continua por ser polinómica.
- Tanteando, encontramos que $f(1) = -2$; $f(2) = 21$.
- Es decir: $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [1, 2] \\ \text{signo de } f(1) \neq \text{ signo de } f(2) \end{array}\right\}$

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe, al menos, un $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.
La raíz de la ecuación es c.

EJERCICIO 25 : Prueba que la función $f(x) = 3x + \cos \pi x + 1$ corta al eje OX en el intervalo $[-1, 0]$.

Solución:

- $f(x)$ es una función continua en $\mathbf{R}$, pues es suma de funciones continuas. En particular, será continua en $[-1, 0]$.
- Por otra parte: $\left.\begin{array}{r} f(-1) = -3 < 0 \\ f(0) = 2 > 0 \end{array}\right\}$ signo de $f(-1) \neq$ signo de $f(0)$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$. $f(x)$ cortará al eje OX en $x = c$.

EJERCICIO 26 : Demuestra que la ecuación: $x^7 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real. Determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

Solución:

- Consideramos la función $f(x) = x^7 + 3x^2 - 2x + 1$, que es continua por ser polinómica.
- Tanteando, encontramos que $f(-2) = -111$; $f(-1) = 5$.
- Es decir: $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [-2, -1] \\ \text{signo de } f(-2) \neq \text{ signo de } f(-1) \end{array}\right\}$

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe, al menos, un $c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$.
La raíz de la ecuación es c.

EJERCICIO 27 : Demuestra que la ecuación $e^{-3x} + 4x - 2 = 0$ tiene, al menos, una solución real en el intervalo [0, 1].

Solución:

- Consideramos la función $f(x) = e^{-3x} + 4x - 2$, continua en $\mathbf{R}$, pues es suma de funciones continuas. En particular, será continua en $[0, 1]$.
- Por otra parte, tenemos que: $\left.\begin{array}{r} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e^{-3} + 2 > 0 \end{array}\right\}$ signo de $f(0) \neq$ signo de $f(1)$

- Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

La raíz de la ecuación es c.