7 Funciones

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Funciones y gráficas . . . 143
- 1.1. Funciones . . . 143
- 1.2. Gráfica de una función . . . 146
- 1.3. Gráficas de algunas funciones elementales . . . 149

2. Nuevas funciones a partir de otras . . . 155
- 2.1. Funciones definidas a trozos . . . 155
- 2.2. Operaciones con funciones . . . 157
- 2.3. Una operación especial: la composición . . . 158
- 2.4. La función inversa . . . 160
- 2.5. Función exponencial y logarítmica . . . 163

3. Algunas propiedades globales de las funciones . . . 166
- 3.1. Simetrías . . . 166
- 3.2. Funciones acotadas . . . 167
- 3.3. Funciones periódicas: funciones trigonométricas . . . 169

4. Catálogo de gráficas . . . 175

En esta unidad vamos a empezar estudiando el concepto de función, que es una de las principales herramientas matemáticas para describir el mundo real. A pesar de que actualmente disponemos de una definición formal muy precisa de lo que es una función matemática, esto no siempre ha sido así, de hecho los matemáticos han utilizado esta idea, como muchas otras, sin disponer de una definición, para estudiar problemas del mundo físico. Esto, el hecho de utilizar un objeto matemático prestando más atención a su utilidad que a su rigurosa definición, quizá sea una buena recomendación para quien empieza a adentrarse en este mundo. Científicos de la talla de Newton, Gauss, Kepler utilizaron las funciones para resolver problemas concretos, y los resolvieron, sin preocuparse de qué eran exactamente las funciones, después llegó la hora de formalizar la idea.

1. Funciones y gráficas

1.1. Funciones

El precio que tenemos que pagar por una llamada concreta desde una cabina telefónica depende de los minutos durante los cuales estemos hablando. El volumen de un cubo, medido en centímetros cúbicos, depende de la longitud, en centímetros, de la arista del cubo. El tiempo que tarda en hervir el agua puesta en un recipiente en un horno microondas a la máxima potencia, depende de la cantidad de agua. En todos estos ejemplos aparece de modo natural el concepto de **función**. En todos los casos, hay una variable, y (precio, volumen, tiempo), que depende de otra cantidad variable, x (minutos, longitud de la arista, cantidad de agua). Por esta razón decimos, incluso en el lenguaje cotidiano, que y está en *función* de x.

Vamos a detenernos en un ejemplo concreto. Supongamos que la altura de un rectángulo mide x centímetros y su base es el doble de la altura más 1 centímetro, es decir, la base es $2x + 1$ centímetros (ver la figura 7.1).

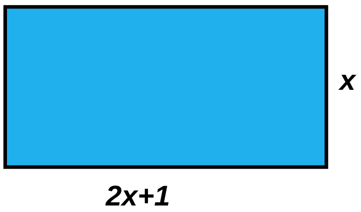


Figura 7.1: Rectángulo de base $(2x + 1)$ y altura x

Llamemos y al área, en cm^2, del rectángulo. Es evidente que el área y depende de la longitud de la base x, de manera que si conocemos cuánto mide la base, como el área de un rectángulo es el producto de la su base por su altura, podemos determinar, de manera única, cuánto mide el área. En la tabla siguiente se han calculado algunos valores del área para diferentes valores de la altura, en centímetros:

x (altura)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (área)	3	10	21	36	55	78	105	136	171	210

Por ejemplo, para calcular el valor de y correspondiente a $x = 6$, hacemos $y = 6(2{\cdot}6 + 1) = 6{\cdot}13 = 78$. En general, $y = x(2x + 1)$. Es importante observar que para cada valor de la altura, x, hay un único valor del área, y.

Podemos decir, de forma provisional que una *función* es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un único número real.

En el ejemplo que hemos visto antes, del área de un rectángulo, esta regla se puede escribir de la forma $y = x(2x + 1)$, como hemos visto, o bien, $f(x) = x(2x + 1)$ ($f(x)$ se lee "f de x".) La expresión $y = f(x)$ expresa la correspondencia entre x e y mediante f. Esto mismo se puede representar esquemáticamente de la forma,

$$x \overset{f}{\longmapsto} y.$$

Que nos indica que la función f transforma la x en la y.

Para tener una función hace falta entonces que haya una relación entre dos variables, de manera que a cada valor de una de ellas corresponda un único de la otra. No es preciso que esa regla se pueda expresar mediante una fórmula, tampoco es preciso que la regla se pueda aplicar a todos los números reales. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no se puede aplicar al número 1, ya que si hacemos $x = 1$, $f(1)$ no existe (porque no se puede dividir por cero.)

ACTIVIDADES

1. Expresar las reglas siguientes como funciones mediante su fórmula:
a) La regla que asigna a cada número real x su cuarta parte.
b) La regla que asigna a cada número real x su raíz cuadrada. ¿A qué números se puede aplicar esta regla o función?
c) La regla que asigna a cada número real x su triple más 5 unidades.

Las funciones que vamos a estudiar aquí son funciones que transforman números reales en números reales, por esta razón se llaman *funciones reales de variable real*, aunque hay otros tipos de funciones, por ejemplo, funciones que transforman vectores en vectores, o vectores en números.

Veamos entonces una definición precisa de lo que es una función real de variable real:

Una *función real de variable real* f es una regla que asigna a cada número real x perteneciente a un cierto conjunto D, un único número real $y = f(x)$. Formalmente lo podemos representar por

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = y \end{array}$$

donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$, es decir, un cierto conjunto de números reales que quizá no sean todos los números reales.

En lo sucesivo utilizaremos indistintamente la expresión $y = x^2 + 2x$, o bien $f(x) = x^2 + 2x$, para referirnos a las funciones.

El conjunto D se denomina **dominio de definición** de la función f, habitualmente lo representaremos por la expresión $\operatorname{dom}(f)$ y es el conjunto de números reales x para los cuales existe $f(x)$. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, sólo se puede aplicar a números reales distintos de 0, es decir, $f(0)$ no existe. Por esta razón decimos que su dominio de definición es $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ (es decir, todos los números reales menos el cero.)

Para que una función esté completamente determinada es preciso conocer siempre su dominio de definición. Determinar el dominio de una función a partir de su fórmula suele ser un problema sencillo, al menos para funciones elementales, como vamos a ver a continuación en algunos ejemplos:

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$. La función es un polinomio. Para calcular el valor de la función para cualquier x sólo hay que sumar, restar y multiplicar, y esto se puede hacer con cualquier número. Entonces, su dominio, y el de cualquier **función polinómica**, está compuesto por todos los números reales, $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}$.
- $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$. Ahora tenemos un cociente de dos polinomios, una **función racional**. La función existirá siempre que el denominador sea distinto de 0. Para que el denominador se anule, es necesario que,

  $$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

  Por tanto, el dominio entonces es $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, es decir, todos los números reales excepto el 3.
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Ahora tenemos una raíz cuadrada de un polinomio, es un ejemplo de lo que llamamos **función irracional**. Para que exista la raíz cuadrada de un número es preciso que éste sea mayor o igual que 0. Entonces, el dominio estará constituido por todos los números x tales que,

  $$x^2 - 4 \geq 0.$$

  Resolvemos la inecuación, como se vió en la unidad correspondiente, y obtenemos que su solución es $\mathrm{dom}\,(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. (El -2 y el 2 están incluidos en el dominio.)
- $f(x) = \dfrac{5x+1}{\sqrt{x+2}}$. Esta es una mezcla de función racional e irracional. Por una parte, al haber un denominador, éste no puede ser 0; por otra, como hay una raíz cuadrada, el radicando (lo de dentro) no puede ser negativo. Entonces, el dominio serán todos los números x tales que,

  $$x + 2 > 0$$

  Resolvemos la inecuación, y obtenemos que su solución es $\mathrm{dom}\,(f) = (-2, +\infty)$.

ACTIVIDADES

2. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x + 6}$ b) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ c) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Consideremos ahora la función $f(x) = x^2 + 1$. El dominio de esta función es $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}$, debido a que es una función polinómica. Si tomamos un punto del dominio, por ejemplo, $x = 2$ y lo sustituimos en la función, obtenemos $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$. Se dice que este número, $f(2)$, es la **imagen** del 2 por la función f. Pero, ¿cómo serán todas las imágenes de la función f? ¿se podrá obtener cualquier número o sólo algunos? En otras palabras, si sustituimos todos los números del dominio de la función en ella, todos los números reales, ¿qué imágenes obtendremos?

Vamos a mirarlo detenidamente, sea cual sea el x que sustituyamos, x^2 siempre será positivo o cero. Si además le sumamos 1, el resultado obtenido será siempre mayor o igual que 1. Estas son las únicas imágenes que se pueden obtener, números mayores o iguales que 1. Es fácil convencerse de que números tales como 0, -2, -10, nunca se van a obtener como imagen de ningún número real mediante esta función. Pues bien, este conjunto, el de todos los $f(x)$, con x recorriendo el dominio de la función también se llama **imagen** de la función f, aunque también recibe a veces el nombre de *rango* o *recorrido* de la función, y se denota por $\operatorname{im}(f)$, en el caso de la función de nuestro ejemplo, $\operatorname{im}(f) = [1, +\infty)$.

A diferencia del dominio de definición, que se puede calcular fácilmente en la mayoría de los casos, la imagen no se puede calcular con la misma facilidad, al menos, a partir de la fórmula. Por ejemplo, la imagen de la función $f(x) = 2x^6-8x^3-10x^2+2x+5$, sólo se podría determinar con exactitud si dispusiéramos de su gráfica, que es lo que vamos a estudiar a continuación.

ACTIVIDADES

3. Razonar cuál es la imagen de las siguientes funciones, sustituyendo algunos números del dominio de la función y teniendo en cuenta cuál es la forma de la función:
a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = x$.

1.2. Gráfica de una función

No es esta la primera vez que el alumno sabe de las funciones y de sus gráficas. No obstante, vamos a recordar la idea de la gráfica de una función.

Tenemos una función, por ejemplo, la función $f(x) = x^2$. A la hora de dibujar su gráfica, resulta más conveniente escribirla de la forma $y = x^2$. Damos valores a x y obtenemos valores para la y. De esta forma construimos lo que se llama **tabla de valores** de la función. (Ya hemos visto un ejemplo antes.) A continuación, hemos calculado algunos de los valores para la función $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Cada par (x, y) se representa en unos ejes de coordenadas como un punto. Con la tabla anterior, tenemos los puntos $(-3, 9)$; $(-2, 4)$; $(-1, 1)$; $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(2, 4)$ y $(3, 9)$. Dibujamos estos puntos y obtenemos la gráfica de la figura 7.2. En realidad la gráfica se obtendría así, pero representando muchos más puntos.

En definitiva, la **gráfica de una función** f es el conjunto de punto (x, y) tales que $y = f(x)$.

Para obtener la gráfica de una función, hacemos una tabla de valores, representamos los puntos, y éstos los unimos mediante una línea, completando así aquellos puntos que no aparecen en la tabla. En la práctica la cosa no es tan sencilla, la tabla

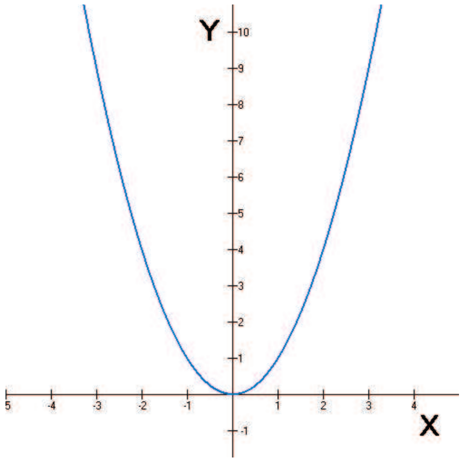


Figura 7.2: Gráfica de $y = x^2$

de valores puede no contener información suficiente para hacerse una idea precisa de cómo es la gráfica. Para dibujar la gráfica exacta de una función hay que estudiar bastantes más cosas, que iremos viendo poco a poco en esta y las unidades siguientes.

Sin embargo, con lo que sabemos hasta el momento aparecen algunas cuestiones interesantes. Una de las primeras es, ¿cualquier dibujo en el plano, cualquier curva que dibujemos sobre unos ejes representará siempre una función? La respuesta es negativa. No todas las curvas son funciones. Ya que, según se indicó en la definición de función, para cada x del dominio habrá un **único** y. Por ejemplo, si en una función hacemos $x = 1$, no es posible obtener dos valores para y distintos, $y = 3$ e $y = 4$. Esto hace que en la gráfica nunca pueden aparecer puntos que estén sobre la misma vertical, unos sobre otros. En las gráficas de las figuras 7.3 y 7.4 se expresa lo que queremos decir. La curva que hemos dibujado en la figura 7.4 no es una función porque hay algunos puntos x para los cuales hay más de un valor de y posible, esto hace que no sea una función. Sin embargo, en la gráfica de la figura 7.3 cada x tiene un único y.

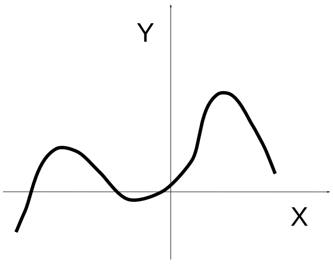


Figura 7.3: Curva que **sí** es una función

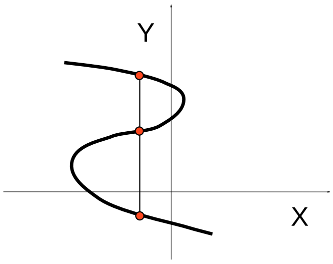
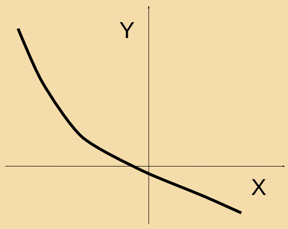


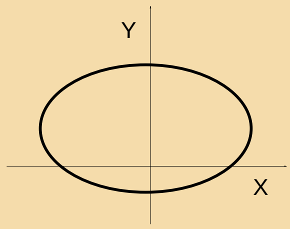
Figura 7.4: Curva que **no** es una función

ACTIVIDADES

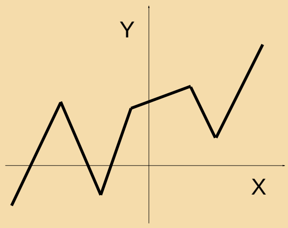
4. En las gráficas de las siguientes figuras, indicar cuál es función y cuál no:



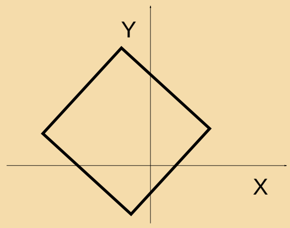
a)



b)



c)



d)

La gráfica de una función permite apreciar de un vistazo cuál es su dominio y su imagen.

Para que un punto x se encuentre en el dominio, es necesario que exista $f(x)$. Entonces, para que un punto del eje X esté en el dominio, hace falta que, por encima de él, o por debajo, haya gráfica de la función. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 7.5 hemos representado una función y señalado varios puntos sobre el eje X.

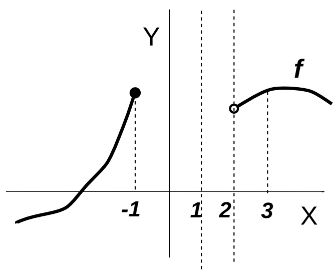


Figura 7.5: El dominio en la gráfica

Los puntos -1 y 3 están en el dominio de definición, porque existe $f(-1)$ y $f(3)$, esto lo apreciamos en la figura dibujando una recta vertical y viendo que interseca a la gráfica de la función (la gráfica tiene dos trozos distintos, esto puede ocurrir perfectamente). Sin embargo, los puntos 1 y 2 no pertenecen al dominio, ya que dibujando rectas verticales por estos puntos, estas rectas no llegan a tocar a la gráfica de la función. (Para indicar que la gráfica llega hasta un punto concreto, dibujaremos ese extremo con un punto relleno, como el punto -1 en la figura 7.5. Para indicar que no llega, dibujaremos un punto hueco, como es el caso del punto 2 de la misma figura).

Por lo dicho antes, el dominio de la función de la figura 7.5 es

$$\text{dom}\,(f) = (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$$

Para que un punto y se encuentre en la imagen de la función f, es necesario que haya algún x tal que $f(x) = y$. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 7.6 vemos que los puntos -2,1 y 3 están en la imagen de la función, porque dibujando ahora una recta horizontal se llega a alcanzar la gráfica de la función. Sin embargo, los puntos -3 y -1,

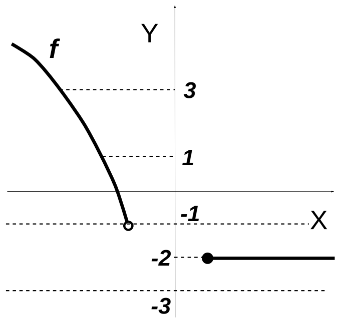


Figura 7.6: La imagen en la gráfica

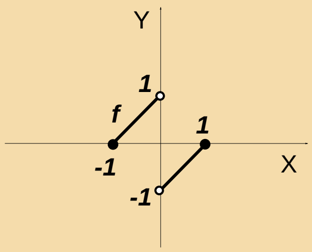
que también se han señalado, no están en la imagen, porque la gráfica de la función no llega a esas alturas, ya que dibujando una recta horizontal por estos puntos, no se toca a la gráfica. Entonces, la imagen de la función de la gráfica está compuesta por los siguientes puntos,

$$\text{im}\,(f) = \{-2\} \cup (-1, +\infty)$$

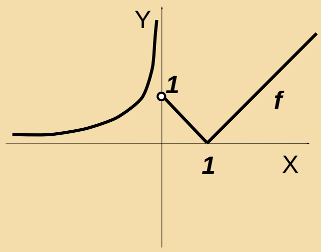
(El -2 es un punto "aislado" de la imagen, por esta razón se escribe entre llaves).

ACTIVIDADES

5. Para las siguientes funciones, indicar cuál es el dominio y cuál la imagen, a partir de su gráfica:



a)



b)

1.3. Gráficas de algunas funciones elementales

Vamos a hacer aquí un recordatorio de las gráficas de algunas funciones elementales, tales como la función constante, funciones polinómicas de grado primer y segundo grado y la función de proporcionalidad inversa. Estas funciones las utilizaremos después para construir otras.

Función constante

Una **función constante** es, por ejemplo, $y = 2$. Si hiciésemos una tabla de valores, para cualquier valor de x siempre sería $y = 2$. Entonces, todos los puntos están alineados en una recta horizontal que pasa a la altura del 2, como la que se ha representado en la figura 7.7.

El dominio está formado siempre por todos los números reales, $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}$. Y la imagen es el valor de la constante, porque éste es el único resultado que puede dar la y, en nuestro caso, $\mathrm{im}\,(f) = \{2\}$.

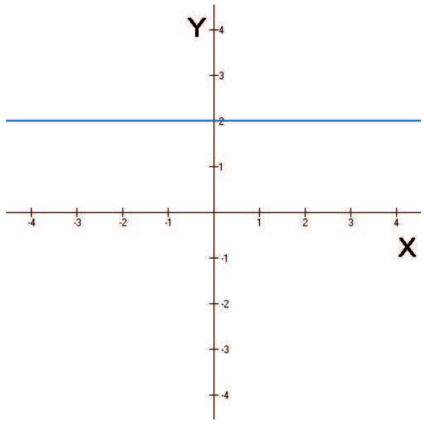


Figura 7.7: Gráfica de $y = 2$

ACTIVIDADES

6. La gráfica de una función constante es una recta horizontal. Una recta vertical, ¿es una función?

Función polinómica de grado 1

La función $y = mx + n$. Aquí hay que distinguir varios casos:

- Si $m = 0$, tenemos la función constante, que ya hemos estudiado.

- Si $n = 0$ (y $m \neq 0$), tenemos una función de la forma $y = x$, $y = 2x$, $y = -3x$, etc. En todas estas funciones, si $x = 0$ entonces $y = 0$, por tanto, todas pasan por el origen de coordenadas, el punto $(0, 0)$. Además, se puede comprobar, haciendo tablas de valores, que se trata de rectas en las que el número que multiplica a x, el número m mide la inclinación de la recta, es la *pendiente* de la recta. En las gráficas de las figuras 7.8 y 7.9 hemos dibujado diferentes rectas de la forma $y = mx$, con diferentes pendientes.

A la función $f(x) = mx$ a veces se le llama *función lineal*, pero el nombre no es lo importante, lo importante es identificar la función $y = 2x$ con su gráfica.

- Si $m \neq 0$ y $n \neq 0$, tenemos una función de la forma $y = x + 1$, $y = 2x - 2$, $y = -3x+2$, etc. También son rectas, pero ahora ninguna pasa por el origen. De hecho, pasan por el punto de coordenadas $(0, n)$. Y, como hemos estudiado en geometría, m sigue siendo la *pendiente* de la recta. En las gráficas de las figuras 7.10 y 7.11 hemos dibujado diferentes rectas de la forma $y = mx + n$, con diferentes pendientes. En las gráficas se aprecia que ninguna recta pasa por el origen, sino que la recta $y = 2x + 1$ pasa por el punto $(0, 1)$; la recta $y = 2x - 3$ pasa por el punto $(0, -3)$; etc. A esta función en algunos libros se le denomina *función afín*, aunque este nombre está en desuso. Hay quien llama a todas las funciones cuyas gráficas son rectas, *funciones lineales.*

En todos los casos de funciones que representan rectas, excepto las funciones constantes, el dominio y la imagen están formados por todos los números reales.

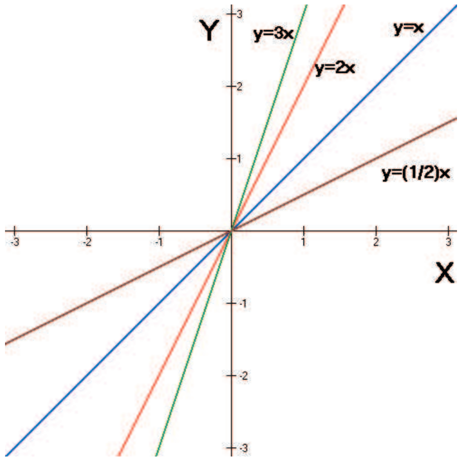


Figura 7.8: Rectas $y = mx$ con $m > 0$

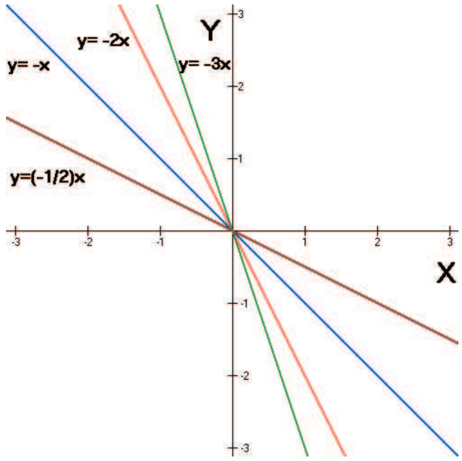


Figura 7.9: Rectas $y = mx$ con $m < 0$

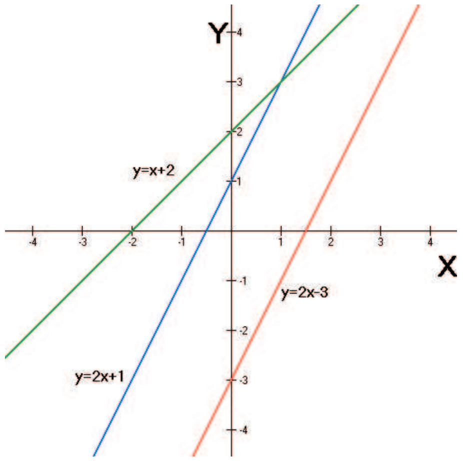


Figura 7.10: Rectas $y = mx+n$ con $m > 0$

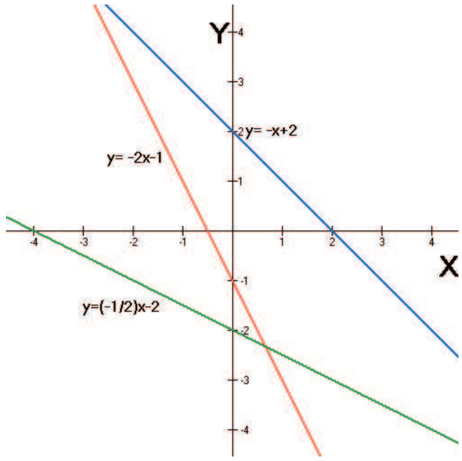


Figura 7.11: Rectas $y = mx+n$ con $m < 0$

Función cuadrática (función polinómica de grado 2)

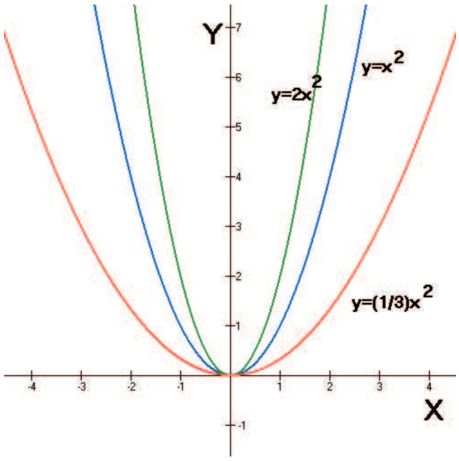
En general, se llama **función cuadrática** a la función polinómica de segundo grado, es decir, la función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

El caso particular de $y = x^2$ ya lo hemos dibujado en la figura 7.2, es una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$, eje de simetría el eje Y y abierta hacia arriba. Cambiando el signo, obtenemos la función $y = -x^2$ que es igual que la anterior, pero abierta hacia abajo.

Si multiplicamos por una constante a distinta de cero, obtenemos $y = ax^2$. Esta función siempre tiene por gráfica una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$ y eje de simetría el eje Y. Cuando $a > 0$, la parábola siempre está abierta hacia arriba, en la figura 7.12 hemos dibujado algunos ejemplos; y cuando $a < 0$, la parábola está abierta hacia abajo, como se puede ver en los ejemplos de la figura 7.13.

El hecho de que el valor de a sea mayor o menor influye en que la parábola sea más cerrada o más abierta, respectivamente.

El dominio de definición de una parábola está formado por todos los números reales, ya que se trata de un polinomio. Sin embargo, la imagen dependerá de que la



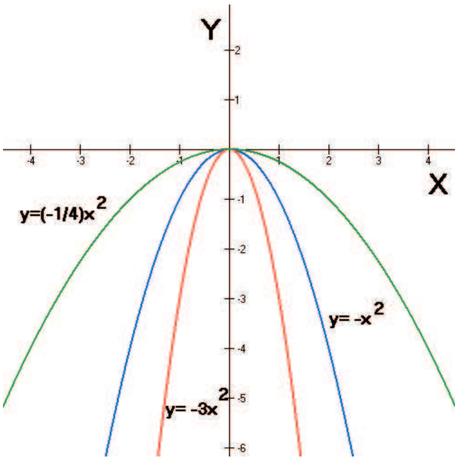


Figura 7.12: Parábolas $y = ax^2$ con $a > 0$ Figura 7.13: Parábolas $y = ax^2$ con $a < 0$

parábola sea abierta hacia arriba o hacia abajo, y de la altura a la que se encuentre el vértice.

ACTIVIDADES

7. Utilizando las gráficas de las parábolas dibujadas en los ejemplos anteriores, dibujar las gráficas de las siguientes, sin hacer tablas de valores:
a) $y = x^2 + 2$ b) $y = -x^2 - 1$ c) $y = -3x^2 + 1$
Escribir, en cada caso, el dominio y la imagen de cada función.

El caso general de una función cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$ ya ha sido estudiado en cursos anteriores. Recordamos que, al igual que en el caso $y = ax^2$, la parábola es abierta hacia arriba si $a > 0$ y abierta hacia abajo si $a < 0$. Por otra parte, las coordenadas del vértice se pueden calcular teniendo en cuenta que la abscisa es $x = \dfrac{-b}{2a}$, la ordenada se calcula sustituyendo esta x en la ecuación.

Por ejemplo, consideramos la parábola $y = x^2 - 4x + 3$.
Como $a = 1 > 0$ es abierta hacia arriba.
La x del vértice es $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2{\cdot}1} = 2$.
Sustituimos en la ecuación para calcular el valor de y, $y = 2^2 - 4{\cdot}2 + 3 = -1$. Entonces, el vértice se encuentra en el punto de coordenadas $V(2, -1)$

Por último, resulta muy útil para representar la gráfica calcular los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas:
Punto de corte con el eje Y; $x = 0$, $y = 3$.
Puntos de corte con el eje X; $y = 0$, $0 = x^2 - 4x + 3$. Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos las soluciones $x = 1$; $x = 3$.
Con toda esta información, se puede concluir que la gráfica de la parábola es la de la figura 7.14.
Con la gráfica a la vista, podemos apreciar que el dominio es $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$ y la imagen $\operatorname{im}(f) = [-1, +\infty)$.

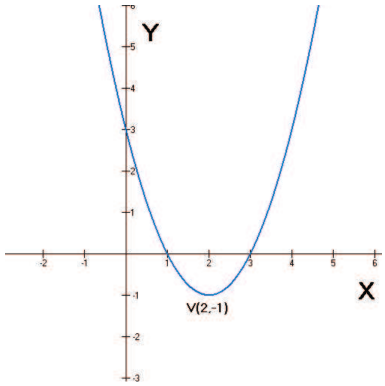


Figura 7.14: Gráfica de $y = x^2 - 4x + 3$

ACTIVIDADES

8. Dadas las siguientes funciones polinómicas de segundo grado, dibujar sus gráficas calculando el vértice, puntos de corte con los ejes y teniendo en cuenta si son abiertas hacia arriba o hacia abajo:
a) $y = -x^2 - 2x$ b) $y = x^2 - 2x + 2$

9. En la unidad en la que hemos estudiado las cónicas hemos visto parábolas abiertas hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda. ¿Son funciones todas ellas?

Función de proporcionalidad inversa

Dibujamos la función $y = \dfrac{1}{x}$, haciendo una tabla de valores:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$\nexists$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Como no existe para $x = 0$, hemos dado valores entre 0 y 1, para ver cómo se comporta la gráfica al aproximarse la x a cero desde la derecha. Lo que se observa en la tabla es que la y crece. Si diésemos a x los mismos valores, pero negativos, obtendríamos los mismos valores de y, pero también negativos. Al final, tenemos la gráfica de la figura 7.15.

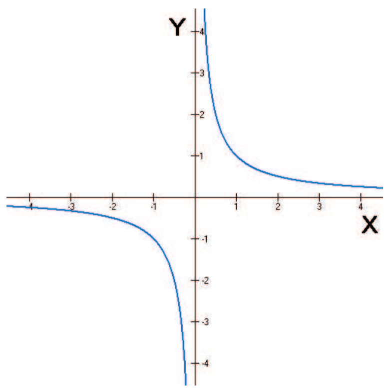


Figura 7.15: Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$

Esta que acabamos de representar es un caso particular de lo que se denomina a veces **función de proporcionalidad inversa** que, en general, tiene la forma $f(x) = \dfrac{k}{x}$, donde k es una constante distinta de cero.

En las figuras 7.16 y 7.17 se han dibujado diferentes casos de la función de proporcionalidad inversa, para distintos valores de la constante k. Es fácil ver de qué manera influye el valor de la constante en el aspecto de la gráfica: a medida que k aumenta, la gráfica se separa de los ejes; si cambia de signo, en lugar de estar en el primer y tercer cuadrante, pasa a estar en el segundo y cuarto. Esto no es exclusivo de esta función, cuando conocemos la gráfica de una función $y = f(x)$ la gráfica de la función $y = -f(x)$ es la simétrica de la de $y = f(x)$ con respecto del eje X, es decir, lo que se obtendría si doblásemos la hoja de papel por el eje X.

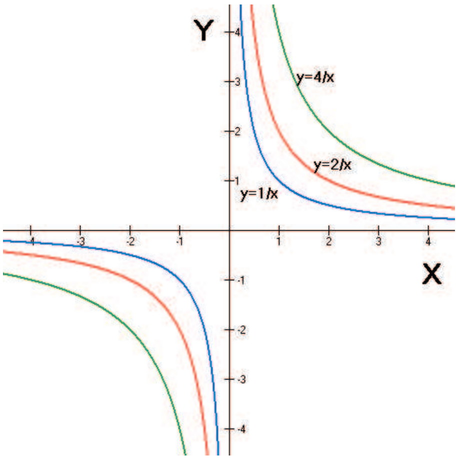


Figura 7.16: $y = \dfrac{k}{x}$ con $k > 0$

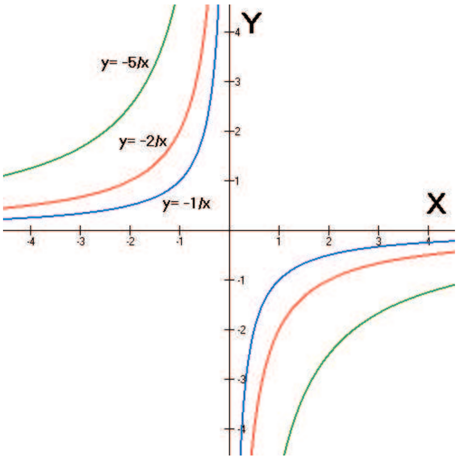


Figura 7.17: $y = \dfrac{k}{x}$ con $k < 0$

ACTIVIDADES

10. ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función $f(x) = \dfrac{k}{x}$? Mirar las gráficas.

Recuerda

- ✓ Una *función real de variable real* f es una regla que asigna a cada número real x perteneciente a un cierto conjunto D, un único número real $y = f(x)$.
- ✓ El conjunto D se denomina es el *dominio de definición* de la función f, habitualmente se representa por $\operatorname{dom}(f)$, y es el conjunto de números reales x para los cuales existe $f(x)$.
- ✓ La *imagen* de la función es el conjunto de todos los $f(x)$, con x recorriendo el dominio de la función. Se denota por $\operatorname{im}(f)$.
- ✓ La *gráfica* de una función es el conjunto de puntos (x, y) tales que $y = f(x)$. Para dibujarla se puede utilizar una *tabla de valores*.
- ✓ No todas las curvas dibujadas en un plano son funciones. Sólo lo son aquellas en las que si dibujamos una recta vertical a través de cualquier punto del dominio, ésta sólo toca a la función en un único punto, es decir, aquellas para las que a cada x del dominio le corresponde un único valor de y.
- ✓ Algunas funciones:

  - Función constante: $y = k$. Su gráfica es una recta horizontal.

  - Función polinómica de grado 1: $y = mx + n$. Su gráfica es una recta no horizontal. Si $n = 0$ pasa por el origen, en caso contrario, no pasa por el origen.

  - Función polinómica de grado 2: $y = ax^2 + bx + c$. Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba o hacia abajo.

  - Función de proporcionalidad constante: $y = \dfrac{k}{x}$. Su gráfica es la de una hipérbola.

2. Nuevas funciones a partir de otras

En la sección anterior hemos visto las gráficas de algunas funciones elementales. Aunque no conocemos muchas de momento, con estas pocas, combinándolas de diversas formas, podemos construir muchas más.

2.1. Funciones definidas a trozos

Una forma de construir una nueva función a partir de otras, consiste en cortar trozos de varias funciones para pegarlos y hacer otra nueva.

La siguiente es una **función definida a trozos**: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Este ejemplo tiene tres trozos, cada uno de ellos expresado en un renglón de la definición. En cada renglón se escribe: en primer lugar, a qué función pertenece el trozo; y en segundo, la parte del eje X sobre el cual hay que dibujarlo.

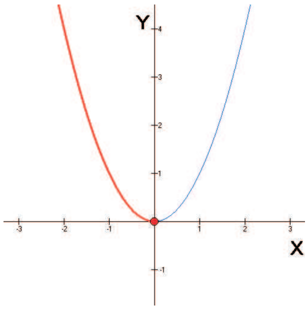


Figura 7.18: x^2 si $x < 0$

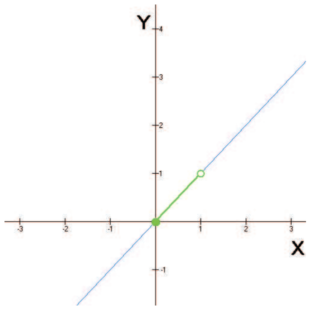


Figura 7.19: x si $0 \leq x < 1$

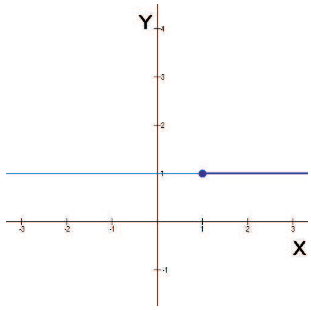


Figura 7.20: 1 si $x \geq 1$

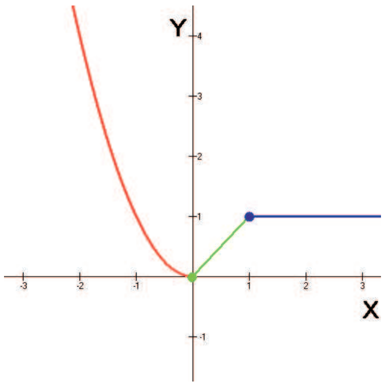


Figura 7.21: Gráfica de $f(x)$

En las figuras 7.18, 7.19 y 7.20 hemos representado cada uno de los tres trozos que intervienen en la definición. Por ejemplo, en la figura 7.18 hemos representado la función x^2, y con trazo más grueso hemos señalado la parte de esta función para la cual $x < 0$. Así lo hemos hecho también en los otros trozos, dibujar con trazo más grueso la parte de la función $f(x)$.

Ahora, para dibujar la función $f(x)$ lo único que hay que hacer es poner los tres trozos juntos en el mismo dibujo. Si la función está bien definida, nunca deben superponerse los trozos.

Una vez que tenemos la gráfica de la función podemos saber que su dominio son todos los números reales, dom $(f) = \mathbb{R}$; y su imagen es im $(f) = [0, +\infty)$.

Función valor absoluto

La **función valor absoluto** es un ejemplo importante de función definida a trozos, es la función que asigna a cada número real x su valor absoluto $|x|$. Como sabemos, el valor absoluto de un número real es el mismo número, si el número es positivo o cero; y su opuesto, si el número es negativo. Entonces, podemos escribir la definición de la función de la forma

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

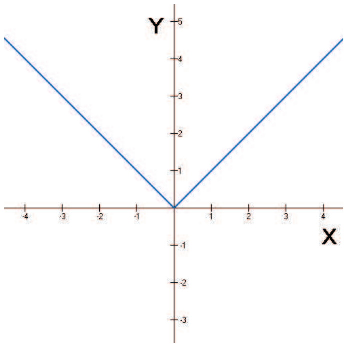


Figura 7.22: Gráfica de $f(x) = |x|$

Por tanto, su gráfica es la de la figura 7.22.

ACTIVIDADES

11. Dibujar las siguientes funciones definidas a trozos. A partir de las gráficas, indicar cuál es el dominio y la imagen de cada función:

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ -x+4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

2.2. Operaciones con funciones

Otra forma de obtener nuevas funciones a partir de otras es haciendo operaciones entre ellas. Hay un grupo de operaciones que se pueden hacer entre funciones que son precisamente las mismas que se pueden hacer entre números reales: sumar (y restar), multiplicar y dividir. Después veremos que hay una operación especial, que no se puede hacer entre números reales, pero sí entre funciones.

Suma

Por ejemplo, tenemos las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 5 + \frac{2}{x}$. Entonces, para sumarlas

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 1 + 5 + \frac{2}{x} = x^2 + 6 + \frac{2}{x}$$

La nueva función suma, $(f+g)(x) = x^2 + 6 + \frac{2}{x}$, realmente es el resultado de sumar las imágenes de las dos funciones punto a punto, en otras palabras, es como si hubiésemos hecho una tabla de valores de cada una de las dos funciones y hubiésemos sumado estas dos tablas. De manera que, por ejemplo, para $x = 2$ en las funciones, antes de ser sumadas teníamos $f(2) = 5$, $g(2) = 6$. Sustituyendo en la suma $(f+g)(2) = 2^2 + 6 + \frac{2}{2} = 11$, el mismo resultado de sumar $f(2) + g(2)$. Más aún, la función $g(x)$ no existe para $x = 0$, es decir, no existe $g(0)$, por tanto, no existe $(f + g)(0)$. Para que un punto se encuentre en el dominio de la función suma, debe estar en cada uno de los dominios de las funciones sumandos.

La resta no es una operación distinta, realmente es la misma y se hace igual que la suma.

Producto

Tomemos ahora las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{5}{x-3}$. El producto de las dos funciones,

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x+1)\frac{5}{x-3} = \frac{5(x+1)}{x-3}$$

De manera que el producto funciona exactamente igual que la suma. La función producto existirá en un punto, cuando existan los dos factores que intervienen en él.

Cociente

Sean ahora las funciones $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = x - 5$. El cociente de f entre g es,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-4}{x-5}$$

En cuanto al dominio de definición, la situación es ahora distinta a las que se presenta en la suma y el producto. En el ejemplo que acabamos de ver, dom $(f) = \mathbb{R}$ y dom $(g) = \mathbb{R}$; sin embargo, dom $\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{5\}$. ¿Por qué ocurre esto? Simplemente porque $g(5) = 0$, y un denominador nunca puede ser cero. Por tanto, para que el cociente de las funciones f y g tenga sentido, hace falta que $g(x) \neq 0$.

ACTIVIDADES

12. Sean las funciones $f(x) = x^2 + x + 1$; $g(x) = x^2 - 4$ y $h(x) = x + 2$. Efectuar las siguientes operaciones e indicar el dominio de definición de las funciones resultantes:
a) $(f+g)(x)$ b) $(f-g)(x)$ c) $(g.h)(x)$ d) $\left(\dfrac{g}{h}\right)(x)$

2.3. Una operación especial: la composición

Vamos a estudiar ahora una operación característica de las funciones, la **composición de funciones**.

Sea la función $f(x) = x - 3$. La función f transforma cada número real en otro número que es tres unidades menor que el anterior, por ejemplo, el 5 se transforma en el número 2:

$$5 \overset{f}{\longmapsto} 2$$

Por otra parte, la función $g(x) = x^2$, transforma cada número en su cuadrado. Si aplicamos esta función al número 2,

$$2 \quad \overset{g}{\longmapsto} \quad 4$$

Si ahora encadenamos las dos transformaciones,

$$5 \quad \overset{f}{\longmapsto} \quad 2 \quad \overset{g}{\longmapsto} \quad 4.$$

Podemos interpretar que hay una función que pasa directamente del 5 al 4, esta función es la que se llama *composición de funciones* y se denota $g \circ f$, de tal forma que, ahora tenemos,

$$5 \quad \overset{g \circ f}{\longmapsto} \quad 4$$

En el esquema de la figura 7.23 se indica lo que ocurre: la función f transforma x en $f(x)$ y la función g transforma $f(x)$ en $g(f(x))$. Entonces, la composición $g \circ f$ transforma x directamente en $g(f(x))$.

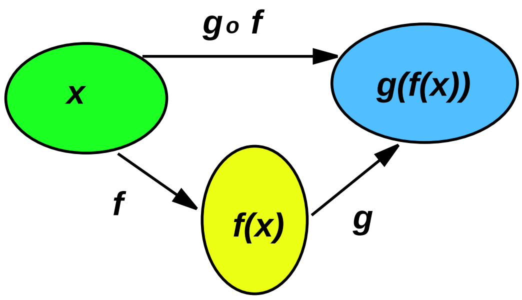


Figura 7.23: Composición $g \circ f$

Para calcular la fórmula de la composición de funciones $g \circ f$ tenemos que sustituir la expresión de la función $f(x)$ por la x de la función $g(x)$, es decir,

$$\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Aunque escribimos, $g \circ f$ se lee "f compuesta con g", porque la f es la función que actúa en primer lugar sobre la x.

La fórmula de $g \circ f$ para las funciones $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2$ queda,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 3) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Pero si la hacemos al revés,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 3$$

Y esto prueba un hecho importante a tener en cuenta; *la composición de funciones no es conmutativa*, es decir, en general $g \circ f \neq f \circ g$.

ACTIVIDADES

13. Sean $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ y $g(x) = 5x^2$. Calcular las composiciones $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$.

2.4. La función inversa

Seguimos con la composición de funciones. Sea la función $I(x) = x$ y cualquier otra función, por ejemplo, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Vamos a componer estas dos funciones en los dos sentidos posibles:

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = I(2x^2 - 3x + 1) = 2x^2 - 3x + 1$$

Aunque, según hemos dicho antes, la composición de funciones no es conmutativa en general, para este caso particular, sí lo es. Además, el resultado en ambos casos ha sido la función f, hemos obtenido, $f \circ I = f$, $I \circ f = f$.

Esta función, $I(x) = x$, que funciona para la composición de funciones como el 1 para la multiplicación de números, se llama **función identidad**.

Pensando en la analogía del 1 en la multiplicación de números, dado un número cualquiera, por ejemplo, el 5, ¿cuál es el número que multiplicado por 5 nos da el 1? Ese número, se llama inverso del 5, y es $\dfrac{1}{5}$, ya que $5.\dfrac{1}{5} = 1$. Pues con la composición de funciones ocurre algo completamente análogo.

Dada una función f, se llama **función inversa** de f, y se denota por f^{-1}, a la función que verifica $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

Vamos a intentar aclarar un poco estas ideas con un ejemplo. La función $f(x) = 3x + 2$ tiene por función inversa a la función $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$. Esto se puede verificar directamente haciendo la composición de las dos funciones:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3.\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x = I(x)$$

Haciendo la composición en el otro sentido también se obtiene lo mismo.

Aplicamos la función f a varios números y después les aplicamos la función f^{-1},

$$\begin{array}{ccccc} & f & & f^{-1} & \\ -2 & \longmapsto & -4 & \longmapsto & -2 \\ 3 & \longmapsto & 11 & \longmapsto & 3 \\ 5 & \longmapsto & 17 & \longmapsto & 5 \end{array}$$

Y aquí vemos el significado de la función inversa, una vez que hemos tranformado un número con la función f, la inversa nos devuelve al número original del que partimos.

En el esquema de la figura 7.24 se ha representado la situación.

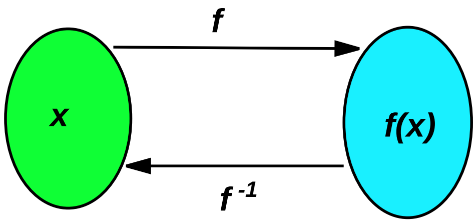


Figura 7.24: La función f y su inversa f^{-1}

Ya sabemos qué significa, ahora nos hace falta saber cómo se calcula. La función f transforma x en y, la función f^{-1}, si existe, transforma y en x. Esta es la clave para calcular la inversa: **intercambiar la x y la y**.

Por ejemplo, queremos calcular la función inversa de $f(x) = 2x - 7$. En primer lugar, la escribimos de la forma $y = 2x - 7$, intercambiamos la x y la y y despejamos y,

$$x = 2y - 7 \Rightarrow y = \frac{x+7}{2},$$

y esta es la función inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{2}$. Además, se puede (y se debe) comprobar que se trata de la inversa, componiéndola con la función original, y verificando que se obtiene la función identidad,

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+7}{2}\right) = 2.\left(\frac{x+7}{2}\right) - 7 = x$$

(Haciendo la composición $(f^{-1} \circ f)$ se obtiene el mismo resultado.)

Este procedimiento no siempre funciona, porque no siempre existe función inversa. Por ejemplo, la función $y = x^2$. Cambiamos x por y e intentamos despejar y,

$$x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x},$$

y el resultado no es una función, sino dos funciones, una sobre otra. Con lo cual la función $f(x) = x^2$ no tiene inversa. (De la misma manera que el número 0 no tiene inverso).

¿Qué ocurre con la gráfica de la inversa, tendrá alguna relación con la gráfica de la función?

En efecto, para calcular la inversa intercambiamos x por y, lo que gráficamente equivale a intercambiar el eje X por el eje Y. Si tuviésemos una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función $y = f(x)$, esta misma tabla, intercambiando los valores de x por los de y nos serviría para dibujar la gráfica de $y = f^{-1}(x)$.

En la figura 7.25 hemos dibujado un ejemplo de la gráfica de una función f y la gráfica de su función inversa.

Como se puede ver en la figura, las gráficas de f y de su inversa f^{-1} son simétricas con respecto de la recta $y = x$, en otras palabras, si doblamos la hoja de papel a lo largo de la recta $y = x$, las dos gráficas coinciden.

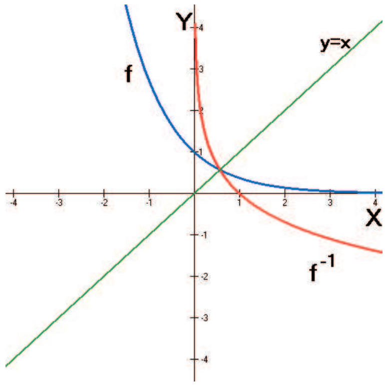


Figura 7.25: Gráficas de f y de f^{-1}

Entonces, la gráfica de la función inversa f^{-1} es la simétrica con respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de la función f.

ACTIVIDADES

14. Calcular las inversas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{2x-5}{3}$ b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ c) $h(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$.

15. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Comprobar, dibujando la gráfica correspondiente, que su inversa no existe.
Dibujar ahora la gráfica de la función $f(x) = x^2$ con $x \geq 0$. ¿Tiene inversa esta función? Dibujar su gráfica y calcular su fórmula.

Según acabamos de ver en la actividad anterior, el hecho de que una función tenga inversa o no también es una cuestión geométrica. Siempre que en una función f existan dos valores distintos a y b tales que $f(a) = f(b)$, esa función no tendrá inversa. En las gráficas de las figuras 7.26 y 7.27 se puede entender esto con claridad. La

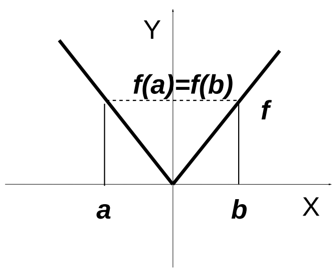


Figura 7.26: $a \neq b$ pero $f(a) = f(b)$

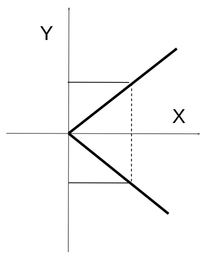


Figura 7.27: No existe inversa

recta horizontal, en la figura 7.26, que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, al pasar a la gráfica simétrica con respecto de la recta $y = x$, en la figura 7.27 se ha convertido en una recta vertical y, como ya sabemos, esto no puede ser una función.

En definitiva, para que exista función inversa de la función f debe ocurrir que, para cada dos puntos distintos a y b de su dominio, sus imágenes también deben ser distintas, es decir, $f(a) \neq f(b)$. Una función que cumpla esta propiedad se dice que es **inyectiva**. Geométricamente, que una función sea inyectiva significa que cualquier recta horizontal dibujada a través de la gráfica sólo puede cortarla en un único punto.

2.5. Función exponencial y logarítmica

La función $f(x) = a^x$, donde $a > 0$, se llama **función exponencial** de base a. Cuando la base es el número e (que apareció en las sucesiones y era el límite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2'718281828...$), simplemente diremos *función exponencial* y nos estaremos refiriendo a la función $f(x) = e^x$.

Vamos a representar las gráficas de las funciones exponenciales de bases 2, 3 y 10. Para ello hacemos tablas de valores

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
3^x	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81
10^x	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10000

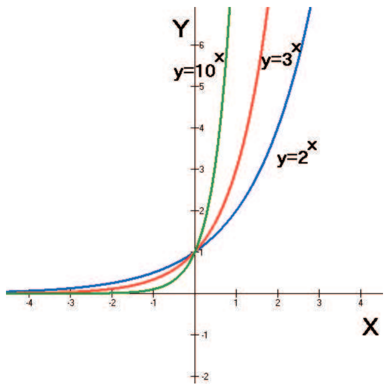


Figura 7.28: Gráficas de $y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = 10^x$

Representando los puntos de las tablas anteriores aproximadamente, tenemos las gráficas de la figura 7.28.

Para hacer una tabla de valores de la función $y = e^x$, necesitaremos una calculadora científica que disponga de la función $\boxed{e^x}$, habitualmente se encuentra en la tecla

$\boxed{\overset{e^x}{\ln}}$. Para utilizarla hay que pulsar primero $\boxed{\text{INV}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$, dependiendo del modelo, de manera que si queremos calcular e^2, tendremos que pulsar la secuencia de teclas: $\boxed{2}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\overset{e^x}{\ln}}$; y obtendremos el valor $7'389056....$ Si damos a x los mismos valores de las tablas anteriores, obtenemos la tabla de valores siguiente, para $y = e^x$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$0'0183$	$0'0498$	$0'1353$	$0'3679$	1	$2'7183$	$7'3891$	$20'0855$	$54'5982$

Estos valores llevados a la gráfica, producen el dibujo aproximado de la figura 7.29 que, como vemos, es similar a las anteriores.

Las gráficas de las funciones exponenciales tienen unas características interesantes. Su dominio está constituido por todos los números reales y la imagen son los números positivos. Además, son un claro ejemplo de función inyectiva, esto quiere decir que cualquier función exponencial, de cualquier base, tiene función inversa.

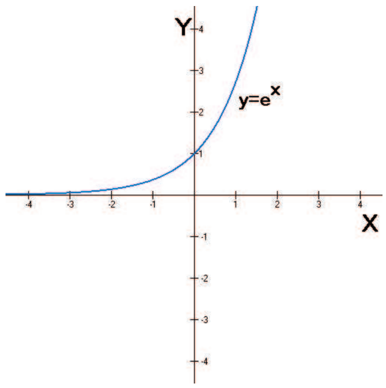


Figura 7.29: Gráfica de $y = e^x$

Para calcular la función inversa de $f(x) = 2^x$, la escribimos de la forma $y = 2^x$ e intercambiamos x por y, para después despejar y,

$$x = 2^y \Rightarrow y = \log_2(x),$$

como vimos en la unidad en la que estudiamos los logaritmos. Por tanto, la función inversa de $f(x) = 2^x$ es el logaritmo en base 2 de x, $f^{-1}(x) = \log_2(x)$.

En general, la función inversa de $f(x) = a^x$ es $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. En particular, la función inversa de la función exponencial $f(x) = e^x$ es el logaritmo neperiano (logaritmo en base e) $f^{-1}(x) = \ln(x)$.

A esta función se le llama, como no podía ser de otra forma, **función logarítmica**. La gráfica de la función logarítmica, por ser inversa de la función exponencial, es la de la figura 7.30.

Las gráficas de las funciones logarítmicas de otras bases son similares a la del logaritmo neperiano, aunque ahora, al haber cambiado la x por la y, también ha cambiado el dominio y la imagen. Ahora el dominio es dom $(\ln(x)) = (0, +\infty)$ y la imagen im $(\ln(x)) = \mathbb{R}$.

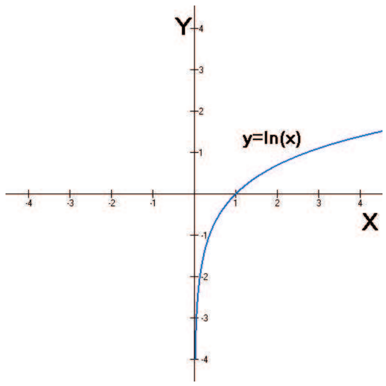


Figura 7.30: Gráfica de $y = \ln(x)$

ACTIVIDADES

16. Por medio de una tabla de valores, dibujar las gráficas de las funciones exponenciales siguientes:

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ (Indicación: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$; $\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$).

17. Calcular la función inversa de $f(x) = 2^{-x}$ y dibujar su gráfica.

18. Supongamos que f es una función inyectiva, es decir, existe su inversa. ¿Cuál es la inversa de la inversa, es decir, $(f^{-1})^{-1}$? (Pensar en las gráficas).

Recuerda

✓ Una *función definida a trozos* es una función construida a partir de trozos de otras. Un ejemplo importante de función definida a trozos es la función *valor absoluto*:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

✓ Operaciones con funciones:

- *Suma:* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- *Producto:* $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- *Cociente:* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, si $g(x) \neq 0$
- *Composición:* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

✓ $I(x) = x$ es la *función identidad*. Para cualquier función f, se cumple $(f \circ I) = (I \circ f) = f$.

Dada una función f, su *inversa*, si existe, es otra función f^{-1} tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. Para que f tenga inversa, es necesario que sea *inyectiva*, esto es, para cada par de números del dominio $a \neq b$, se debe verificar $f(a) \neq f(b)$.

✓ La *función exponencial* es $f(x) = e^x$ (la función exponencial de base $a > 0$ es $f(x) = a^x$), su función inversa es la *función logarítmica* $f^{-1}(x) = \ln(x)$ (o bien, $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ para el caso general).

3. Algunas propiedades globales de las funciones

Después de ver cómo se pueden construir funciones a partir de otras y ya que tenemos una colección importante de funciones, vamos a ver algunas propiedades que afectan a todo el dominio de una función. En particular, vamos a estudiar las simetrías que puede presentar la gráfica de una función, la acotación y la periodicidad, en este último apartado estudiaremos las funciones trigonométricas, que son funciones que surgen de las razones trigonométricas estudiadas en una unidad anterior.

3.1. Simetrías

Observemos la gráfica que hemos dibujado en la figura 7.31. Si doblamos la hoja de papel a lo largo del eje Y el trozo de la izquierda coincide con el trozo de la derecha, lo que indica que la gráfica es simétrica con respecto del eje Y.
Para que se dé esta situación es necesario que la función tome los mismos valores a izquierda y derecha del eje Y, como vemos en la gráfica, para todo x del dominio de definición de la función, se cumple $f(-x) = f(x)$.

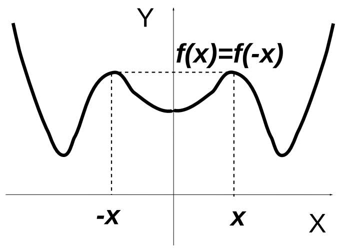


Figura 7.31: Una función par

A una función que cumpla lo anterior se le llama **función par**.

Si tenemos la gráfica de la función podemos apreciar a simple vista si es o no es par, pero si sólo disponemos de la fórmula tendremos que comprobar que se cumple $f(-x) = f(x)$. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4 - 3x^2$ es par, ya que para todo x,

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$$

En la gráfica de la figura 7.32 tenemos una simetría distinta. Elegimos un punto cualquiera sobre la gráfica, dibujamos una recta que pase por el punto y por el origen, entonces al otro lado del origen, a la misma distancia nos encontramos otro punto de la gráfica. Entonces se dice que la gráfica es simétrica con respecto del origen.

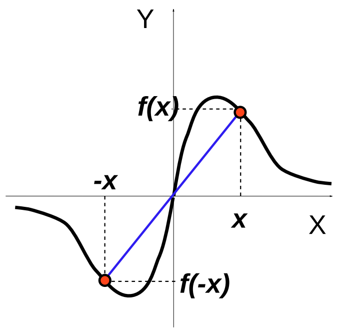


Figura 7.32: Una función impar

¿Qué ocurre ahora con los valores de la función? Como vemos en la gráfica, en los puntos a izquierda y derecha del origen (a la misma distancia) la función toma el mismo valor, pero con signo distinto. Lo que ahora ocurre es que para todo x del dominio de definición de la función, se verifica $f(-x) = -f(x)$. Este es ahora el criterio para comprobar si una función es simétrica con respecto del origen. A una función simétrica con respecto del origen, se le llama **función impar**.

Por ejemplo, la función $f(x) = 2x^3 - x$ es una función impar, ya que para todo x de su dominio se verifica, $f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -(2x^3 - x) = -f(x)$.

Una función puede ser par, impar o ninguna de las dos cosas. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 + 1$. Calculamos,

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

Y el resultado no es igual a $f(x)$, ni a $-f(x)$, por tanto, no es par ni impar. Sin embargo, sí es posible que una función sea simultáneamente par e impar, por ejemplo, la función $f(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ (ya que su gráfica es el eje X y, por tanto, tiene las dos simetrías que hemos mencionado).

El hecho de saber si una función es par o impar nos permite dibujar su gráfica con más facilidad, ya que basta con saber cómo es el dibujo a un lado del eje X, al otro lado será simétrico. Esto lo aplicaremos cuando estudiemos la unidad de representación de funciones.

ACTIVIDADES

19. Estudiar las simetrías de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ b) $g(x) = 2x^3 + 4x$ c) $h(x) = |x| - 1$.

20. a) f es función par de la que sabemos que $f(2) = 3$. ¿Cuánto vale $f(-2)$?
b) g es una función impar de la que sabemos que $g(x) = x^2$ si $x > 0$. ¿Cuánto vale $g(x)$ si $x < 0$?

3.2. Funciones acotadas

La gráfica de la función $f(x) = -x^2$ es la de la figura 7.33. La imagen de esta función es $\operatorname{im}(f) = (-\infty, 0]$, es decir, sólo alcanza valores negativos y el cero. Por tanto, para cualquier x del dominio $f(x) \leq 2$, por ejemplo. Se dice entonces que el 2 es una **cota superior** de la función y que la función está **acotada superiormente**. Es evidente que el número 2 no es la única cota superior, también lo es el 3, el 4, incluso el propio 0. Sin embargo, no es cota superior el -1, ya que la función llega a superar esta altura.

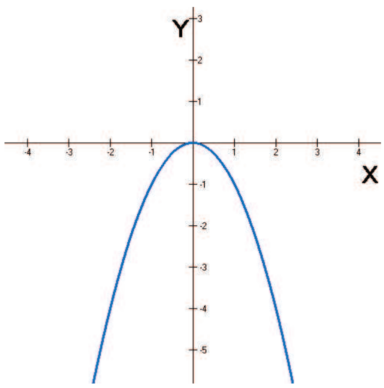


Figura 7.33: Gráfica de $y = -x^2$

Geométricamente, el hecho de que la función esté acotada superiormente es equivalente a que se pueda dibujar una recta horizontal, de tal forma, que toda la gráfica quede por debajo de ella.

Consideremos ahora la función $f(x) = e^x + 1$. Su gráfica es como la de la función e^x, pero elevada una unidad. La hemos representado en la figura 7.34. Ahora la imagen es $\text{im}\,(f) = (1, +\infty)$ (ya que e^x nunca llegaba al 0). Tenemos la misma situación que antes, pero ahora por la parte de abajo. Por ejemplo, para cualquier x del dominio, $f(x) \geq 0$, por lo que el 0 es una **cota inferior**. Se dice entonces que la función f está **acotada inferiormente**.

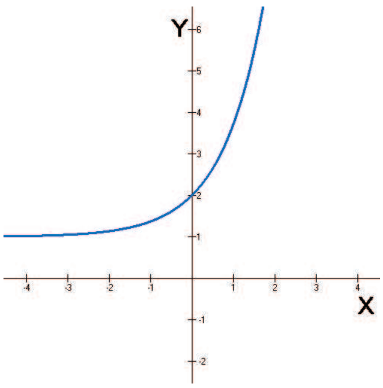


Figura 7.34: Gráfica de $y = e^x + 1$

Una misma función puede ser acotada superiormente e inferiormente, como por ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En la gráfica de la función $y = f(x)$, que hemos representado en la figura 7.35, se puede apreciar que la imagen de la función es $\text{im}\,(f) = [-1, 1]$. Es decir, para todo x del dominio, se cumple $-1 \leq f(x) \leq 1$, o lo que es equivalente $|f(x)| \leq 1$. En este caso, diremos que la función es **acotada**, para indicar que lo es superior e inferiormente.

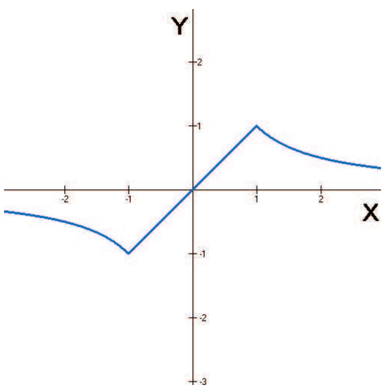


Figura 7.35: Gráfica de $y = f(x)$

Por último, una función puede *no ser acotada*, ni superior, ni inferiormente. Tal es el caso de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. En la gráfica de la figura 7.36, vemos que sea cual sea el valor numérico K en el que pensemos, existirá algún momento en el que $f(x) > K$, es decir, no hay manera de dibujar una recta horizontal que quede por encima de toda

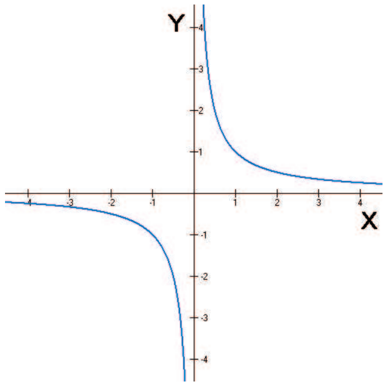


Figura 7.36: Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$

la gráfica, por esta razón la función no es acotada superiormente. Lo mismo ocurre en la parte inferior, no tiene cotas inferiores, por lo que no es acotada inferiormente.

ACTIVIDADES

21. Estudiar si las siguientes funciones son acotadas o no, indicando en su caso, las posibles cotas inferiores o superiores:
a) $f(x) = 2$ b) $g(x) = x$ c) $h(x) = |x|$

3.3. Funciones periódicas: funciones trigonométricas

En la gráfica de la figura 7.37 hemos dibujado una **función periódica**. Vamos a ver por qué recibe este nombre. Algo periódico es algo que se repite, y eso es lo que

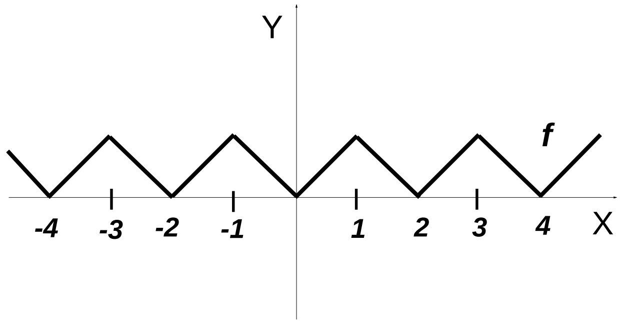


Figura 7.37: Una función periódica

ocurre con esta función. La parte de la función que hay sobre el intervalo $[0, 2]$ del eje X vuelve a repetirse en el intervalo $[2, 4]$, otra vez en el $[4, 6]$, y así sucesivamente. Lo que ocurre de hecho, es que $f(x) = f(x + 2)$ para todo x. Decimos entonces que es una *función periódica* de **periodo** 2.

Las funciones periódicas más importantes son las **funciones trigonométricas**, que son las que se pueden definir a partir de las razones trigonométricas ya estudiadas. Cuando hemos estudiado las razones trigonométricas las hemos utilizado para calcular longitudes de lados, ángulos y otras aplicaciones geométricas. El hecho de que con estas razones trigonométricas se puedan definir funciones periódicas tiene una enorme utilidad a la hora de modelizar fenómenos que se repiten con el tiempo.

A la hora de utilizar las razones trigonométricas, los ángulos los hemos medido en grados sexagesimales y en radianes, ahora sólo utilizaremos los radianes.

Función seno

La función seno es $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, donde x es un número real que representa el ángulo medido en radianes. Para ver cómo es la gráfica, representamos el ángulo en el eje X, y los valores de $y = \operatorname{sen}(x)$ en el eje Y. Hacemos una tabla de valores, utilizando una calculadora (puesta en radianes) y nuestros conocimientos previos de trigonometría (hemos redondeado al segundo decimal para que la tabla salga más sencilla),

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$0'71$	1	$0'71$	0	$-0'71$	-1	$-0'71$	0

La tabla la hemos hecho con valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, si hacemos una tabla en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$ obtenemos los mismos valores para y, y estos valores se siguen repitiendo cada 2π unidades, es decir, cada vuelta a la circunferencia.

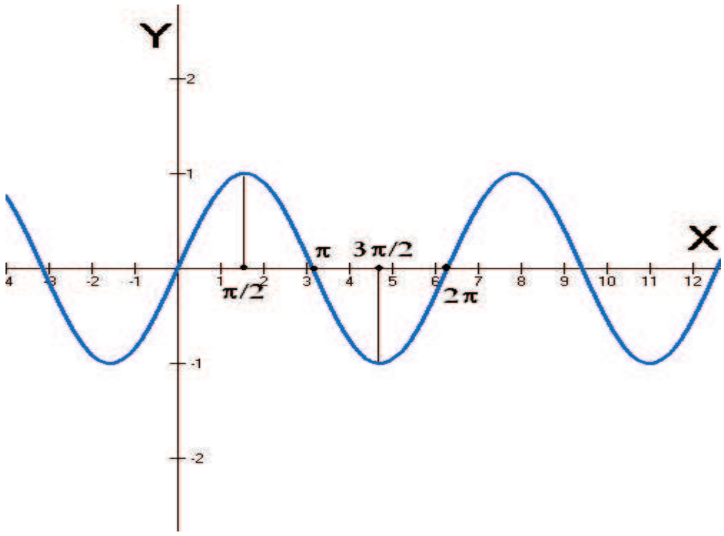


Figura 7.38: Gráfica de $y = \operatorname{sen}(x)$

El resultado de representar los puntos de la tabla gráficamente es el de la figura 7.38.

En esta gráfica se observan las propiedades principales de la función seno:

- Su dominio es $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$.

- Su imagen es $\operatorname{im}(f) = [-1, 1]$, lo que significa que es una función acotada, ya que se cumple que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$, para todo x.

- Es una función periódica de período 2π.

La función seno no es inyectiva, como se puede apreciar en la gráfica. Sin embargo, si nos restringimos a determinados intervalos, sí lo es. En particular, es inyectiva en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es lo que hemos representado en la figura 7.39. Por tanto, en este intervalo, existe función inversa de la función seno. Esta función se denomina arcoseno, y se denota habitualmente $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$. Su gráfica, que es simétrica con respecto de la recta $y = x$ de la de la figura 7.39, es la representada en la figura 7.40.

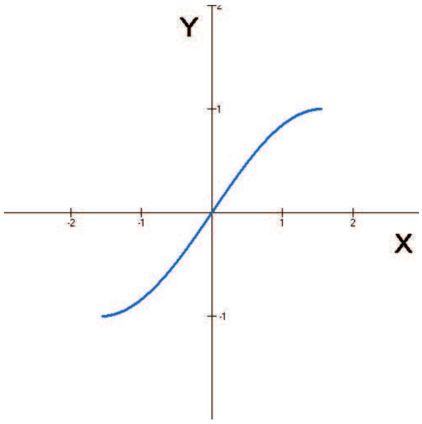


Figura 7.39: $y = \operatorname{sen}(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

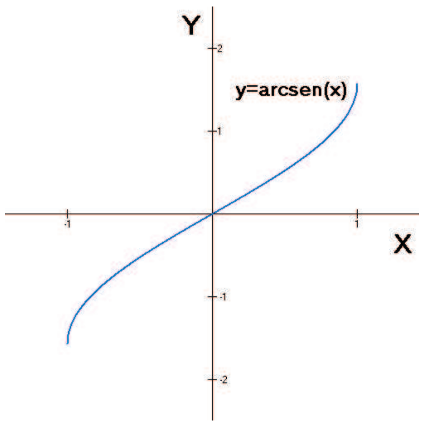


Figura 7.40: Gráfica de $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$

ACTIVIDADES

22. ¿Cuál es el dominio y la imagen de $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$?

Unas observaciones acerca de la función arcoseno:

- El hecho de haber elegido el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es completamente arbitrario, se podía haber elegido entre infinitas posibilidades, basta con elegir un tramo en el que la función sea inyectiva, es por tanto, un convenio.

- En las calculadoras científicas, la función $\operatorname{arc\,sen}(x)$ se representa $\sin^{-1}$, y viene habitualmente con la tecla $\overset{\sin^{-1}}{\boxed{\sin}}$. Para utilizarla, hay que pulsar previamente la tecla $\boxed{\text{INV}}$. Por ejemplo, para calcular $\operatorname{arc\,sen}(0'5)$ tendremos que poner primero la calculadora en radianes (si queremos obtener el resultado en radianes) y pulsar la siguiente secuencia:

$$\boxed{0.5} \quad \boxed{\text{INV}} \quad \overset{\sin^{-1}}{\boxed{\sin}}$$

obtendremos el resultado aproximado: $\boxed{0.5235987755983}$.

Función coseno

La función coseno es $f(x) = \cos(x)$, donde x es un número real que representa el ángulo medido en radianes. Para ver cómo es la gráfica, hacemos lo mismo que hemos hecho para representar la gráfica de $y = \text{sen}(x)$. Hacemos una tabla de valores,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$0'71$	0	$-0'71$	-1	$-0'71$	0	$0'71$	1

También hemos hecho la tabla de valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, y estos valores se siguen repitiendo cada 2π unidades, es decir, cada vuelta a la circunferencia.

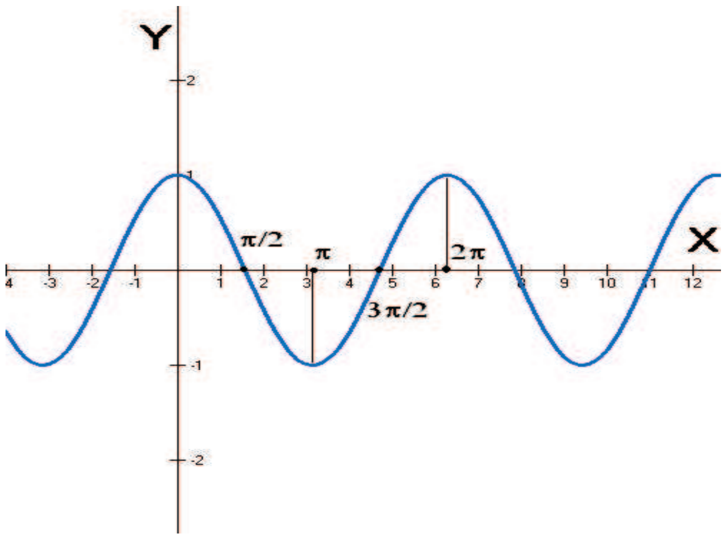


Figura 7.41: Gráfica de $y = \cos(x)$

El resultado de representar los puntos de la tabla gráficamente es el de la figura 7.41.

En esta gráfica se observan las propiedades principales de la función coseno:

- Su dominio es $\text{dom}\,(f) = \mathbb{R}$.

- Su imagen es $\text{im}\,(f) = [-1, 1]$, lo que significa que, al igual que la función seno, es acotada, ya que también se cumple que $|\cos(x)| \leq 1$, para todo x.

- Es una función periódica de período 2π.

ACTIVIDADES

23. La función coseno no es inyectiva, pero si nos restringimos al intervalo $[0, \pi]$, sí lo es:
a) Dibujar la gráfica de la función coseno en este intervalo.
b) Dibujar la gráfica de su función inversa, que recibe el nombre de función arcocoseno, $f(x) = \text{arc}\cos(x)$.
c) Calcular el dominio y la imagen de la función arcocoseno.

En la calculadora, la función arcocoseno se encuentra en la tecla $\overset{\cos^{-1}}{\boxed{\cos}}$, y su uso es análogo al del cálculo de arcosenos, que ya se ha explicado antes.

Función tangente

La función tangente es $f(x) = \text{tg}(x)$, donde x es un número real que representa el ángulo medido en radianes. Para ver cómo es la gráfica, hacemos lo mismo que hemos hecho para representar las gráficas del seno y del coseno. Hacemos una tabla de valores,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

Ahora, sin embargo, los resultados de la tabla no están tan claros como en los dos casos anteriores. La tangente no existe en los ángulos de $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ radianes. Entonces para entender qué ocurre en los alrededores de estos puntos habría que hacer tablas de valores próximos a ellos. Vamos a hacerlo sólo para un caso, la izquierda del punto $\frac{\pi}{2}$. Dado que $\frac{\pi}{4} = 0'78$ y $\frac{\pi}{2} = 1'57$, haremos una tabla con valores entre $0'8$ y $1'5$,

x	$0'8$	$0'9$	1	$1'1$	$1'2$	$1'3$	$1'4$	$1'5$
y	$1'03$	$1'26$	$1'56$	$1'96$	$2'57$	$3'60$	$5'80$	$14'10$

En esta tabla observamos que, a medida que nos acercamos a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda, los valores de la tangente van aumentando cada vez más. Por la parte de la derecha ocurre lo mismo, pero en este caso los resultados son negativos. De estas observaciones se puede deducir, que la gráfica de la tangente al acercarse la x a $\frac{\pi}{2}$ sube (hasta infinito), y por la derecha, baja (hasta menos infinito.) En el punto $\frac{3\pi}{2}$ ocurre exactamente lo mismo.

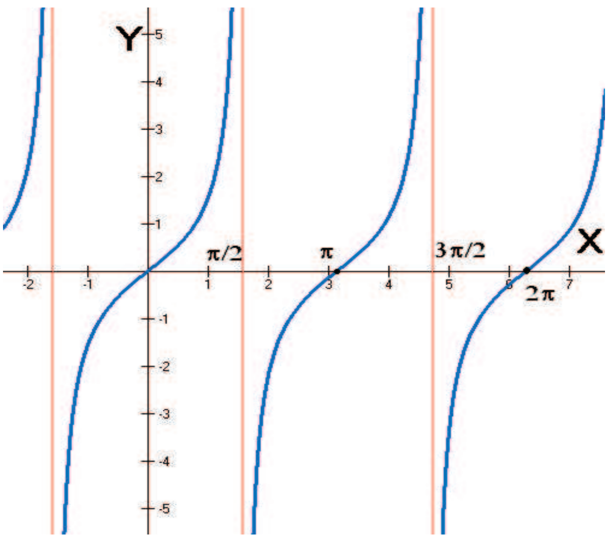


Figura 7.42: Gráfica de $y = \text{tg}(x)$

La gráfica, teniendo en cuenta todo lo anterior, es aproximadamente la de la figura 7.42. Por supuesto, como ocurre con las gráficas de seno y coseno, los valores vuelven a repetirse a lo largo del eje X.

Las propiedades de la función tangente son bastante distintas de las funciones seno y coseno:

- Su dominio está formado por todos los reales, excepto los puntos en los que no existe la tangente, que son precisamente aquellos en los que el coseno se anula, recordemos que $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$. Entonces, dom $(f) = \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, es decir, todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. En cada uno de estos puntos hemos dibujado una recta vertical, por la que no pasa la función tangente. Estas rectas se llaman asíntotas verticales y serán estudiadas más adelante.

- Su imagen, im $(f) = \mathbb{R}$. Lo que significa que la función no es acotada.

- También es una función periódica, pero el período es más pequeño. Desde luego, la gráfica se repite cada 2π unidades, pero en realidad se repite cada menos, ya que la parte de la gráfica que se repite es la comprendida entre cada dos rectas verticales, y la distancia entre cada una y la siguiente es $\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$. Entonces, la función tangente es periódica de periodo π.

ACTIVIDADES

24. La función tangente no es inyectiva. Sin embargo, si la restringimos al intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sí lo es:
a) Dibujar la gráfica de la función tangente en este intervalo.
b) Dibujar la gráfica de su función inversa, que recibe el nombre de función arcotangente, $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$.
c) Calcular el dominio y la imagen de la función arcotangente.

En la calculadora, la función arcotangente se encuentra en la tecla $\overset{\tan^{-1}}{\boxed{\tan}}$, y su uso es análogo al del cálculo de arcosenos y arcocosenos.

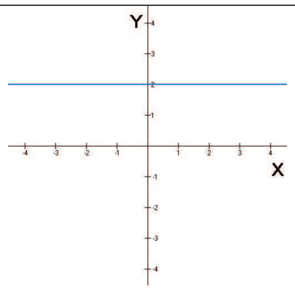
Recuerda

- ✓ Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$, para todo x del dominio. Su gráfica es simétrica con respecto del eje Y.
- ✓ Una función f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$, para todo x del dominio. Su gráfica es simétrica con respecto del origen.
- ✓ Una función f es *acotada superiormente* si tiene alguna *cota superior*, esto es, hay un número k, tal que $f(x) \leq k$. Es *acotada inferiormente* si tiene alguna *cota inferior*, es decir, hay un número m, tal que $f(x) \geq m$. Una función es *acotada*, cuando lo es superior e inferiormente.
- ✓ Una función f es *periódica*, de *periodo* T, cuando los valores que toma la función se repiten cada T unidades, es decir, $f(x) = f(x+T)$, para todo x del dominio.

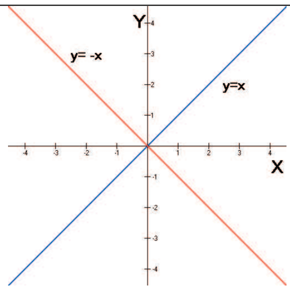
  Las funciones periódicas más importantes son las *funciones trigonométricas*: $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ e $y = \operatorname{tg}(x)$. Sus inversas son $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$, $y = \operatorname{arc\,cos}(x)$ e $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$, respectivamente. Es importante asociar cada fórmula con su gráfica correspondiente, ya que a partir de la gráfica, se pueden deducir las propiedades de la función.

4. Catálogo de gráficas

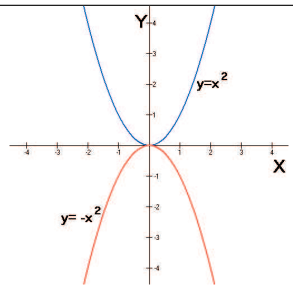
A modo de resumen, se ponen a continuación en una tabla, las gráficas de las funciones más importantes que han aparecido hasta ahora.



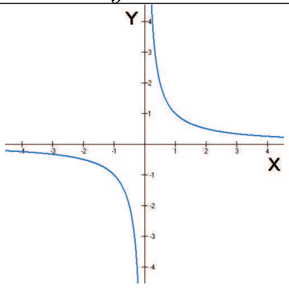
$y = 2$



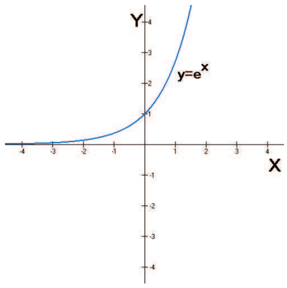
$y = x \qquad y = -x$



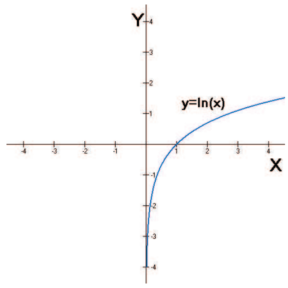
$y = x^2 \qquad y = -x^2$



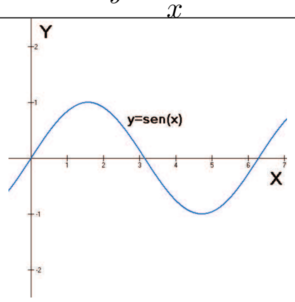
$y = \dfrac{1}{x}$



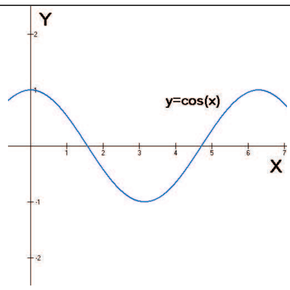
$y = e^x$



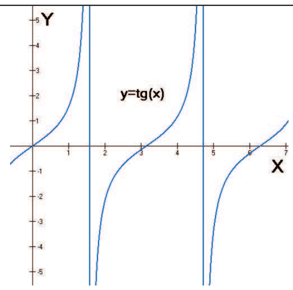
$y = \ln(x)$



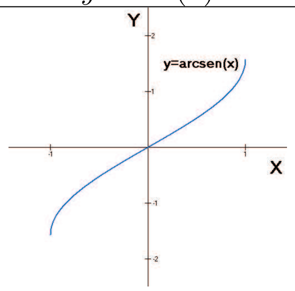
$y = \operatorname{sen}(x)$



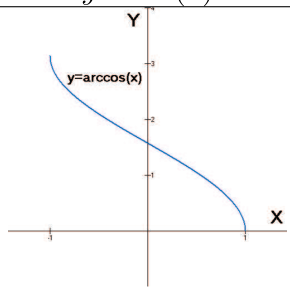
$y = \cos(x)$



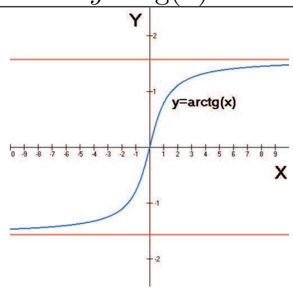
$y = \operatorname{tg}(x)$



$y = \operatorname{arc\,sen}(x)$



$y = \operatorname{arc\,cos}(x)$



$y = \operatorname{arc\,tg}(x)$