4 Trigonometría

ÍNDICE DE CONTENIDOS

En cursos anteriores ya se han estudiado algunos conceptos de trigonometría. En este unidad vamos a repasar estos conceptos, y ampliar con algunos nuevos. En particular, estudiaremos nuevas herramientas que nos permitirán resolver problemas relacionados con triángulos cualesquiera, y no sólo con triángulos rectángulos. También veremos algunas relaciones trigonométricas nuevas con las que podremos resolver algunas ecuaciones trigonométricas, es decir, ecuaciones en las que aparecen involucradas las razones trigonométricas.

1. Ángulos

La trigonometría trata sobre las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. El concepto fundamental sobre el que se trabaja es el de **ángulo**. Dos semirrectas con un origen común dibujadas en un plano, dividen a éste en dos regiones. Cada una de estas regiones es un ángulo (figura 4.1).

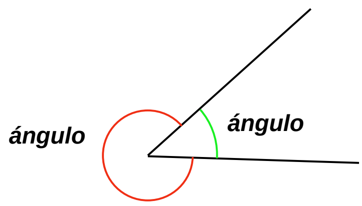


Figura 4.1: Ángulos

En un ángulo no importa la longitud de las semirrectas que lo componen, sino la abertura entre ellas. Para medir esta abertura, se utilizan diferentes sistemas de medida, los más importantes son: el sistema sexagesimal y los radianes.

Además de la medida, que estudiaremos a continuación, consideraremos que los ángulos tienen una orientación de acuerdo con el siguiente convenio, indicado además en la figura 4.2:

Si el ángulo está medido en el sentido contrario al giro de las agujas del reloj, diremos que es un ángulo *positivo*.
Si el ángulo está medido en el sentido de giro de las agujas del reloj, diremos que es un ángulo *negativo*.

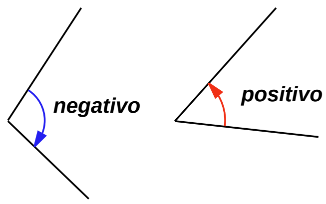


Figura 4.2: Ángulos orientados

1.1. Sistema sexagesimal

Un **ángulo recto** es el menor de los ángulos formados por dos rectas perpendiculares, como se señala en la figura 4.3.

Si dividimos el ángulo recto en 90 ángulos iguales, cada uno de estos ángulos es un grado (sexagesimal), y lo indicamos de la forma siguiente:

$$1 \text{ recto} = 90^0$$

Si dividimos un grado en 60 partes iguales, cada una de estas partes es un minuto (sexagesimal.) Los minutos los indicamos con una coma en la parte superior derecha

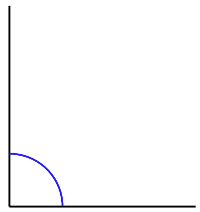


Figura 4.3: Ángulo recto

del número,

$$1^0 = 60'$$

Por último, si un minuto se divide en 60 partes iguales, cada una de ellas es un segundo (sexagesimal.) Los segundos los indicamos con una coma doble,

$$1' = 60''$$

Así, los ángulos medidos en el **sistema sexagesimal** se expresan de la forma $34^0\ 52'\ 32''$, que significa que el ángulo mide 34 grados, 52 minutos y 32 segundos.

Habitualmente situaremos los ángulos en unos ejes coordenados, como en la figura 4.4. Si empezamos a medir los ángulos desde la parte de la derecha del eje horizontal (ángulo de 0^0,) en sentido positivo, los ángulos de 90^0, 180^0, 270^0 y 360^0 son los que se han indicado en la figura.

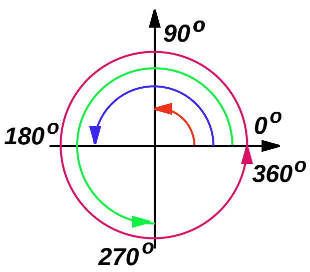


Figura 4.4: Ángulos en los ejes

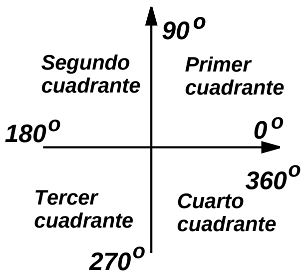


Figura 4.5: Cuadrantes

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones, que se denominan **cuadrantes**, ordenados según la figura 4.5.

ACTIVIDADES

1. Indicar en qué cuadrante se encuentra cada uno de los ángulos siguientes:
a) 30^0 b) $278^0\ 30'$ c) -35^0 d) $200^0\ 34'\ 38''$ e) 480^0
(Indicación: en el apartado e), en primer lugar hay que reducir el ángulo a uno menor que 360^0, esto se consigue dividiendo entre 360 y quedándose con el resto de la división.)

1.2. Radianes

Además del grado sexagesimal, en trigonometría se usa con frecuencia otra medida de ángulos, el **radián**.

Dibujemos una circunferencia de radio R, como en la figura 4.6. El ángulo central AOB mide 1 *radián*, si la longitud del arco de la circunferencia que va desde el punto A al punto B es igual al radio de la circunferencia R.

Podemos calcular la cantidad de radianes que hay en una vuelta completa de la circunferencia, sin más que dividir su longitud entre la longitud del radio. La longitud del radio de la circunferencia es

$$L = 2\pi R$$

Entonces, una vuelta completa tiene

$$1 \text{ vuelta} = \frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{radio}} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}$$

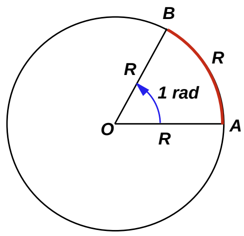


Figura 4.6: Radián

De aquí se deduce que el ángulo de 360^0 tiene 2π rad, y también que el ángulo de 180^0 es de π rad. Las equivalencias entre los ángulos que delimitan los cuadrantes en grados y radianes, vienen dadas en la siguiente tabla:

grados	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Conviene recordar estas equivalencias.

Para convertir cualquier otro ángulo, bien de grados a radianes, bien de radianes a grados, se puede utilizar la siguiente proporción

$$\boxed{\frac{\textbf{radianes}}{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\textbf{grados}}{\mathbf{180}}}$$

Por ejemplo, queremos convertir el ángulo de $\alpha = 280^0$ a radianes. Utilizamos la proporción anterior,

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{280}{180}$$

de donde,

$$\alpha = \frac{280\pi}{180} = \frac{14\pi}{9} \text{ rad}$$

Nota: Para referirse a los ángulos, se utilizan con mucha frecuencia las primeras letras del alfabeto griego: α, “alfa"; β, “beta"; γ, “gamma"; etc.

Supongamos ahora que queremos convertir el ángulo $\beta = \frac{3\pi}{4}$ rad a grados. Utilizando la misma proporción, $\frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} = \frac{\beta}{180}$, obtenemos,

$$\beta = 180 \cdot \frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} = 180 \cdot \frac{3}{4} = 135^0.$$

ACTIVIDADES

2. Convertir los siguientes ángulos en grados sexagesimales a radianes:
a) 45^0 b) 120^0 c) 30^0 d) 60^0 e) 300^0

3. Convertir los siguientes ángulos en radianes a grados sexagesimales:
a) 1 rad b) $\frac{\pi}{5}$ rad c) $\frac{5\pi}{3}$ rad d) 10π rad e) $\frac{360}{\pi}$ rad

Recuerda

✓ Un *ángulo* es cada una de las regiones en las que dividen al plano dos semirrectas con un origen común.

Un ángulo está medido en sentido *positivo*, si lo está en el sentido contrario al del giro de las agujas del reloj. Y en sentido *negativo*, si es en el sentido de giro de las agujas del reloj.

✓ El *sistema sexagesimal* es un sistema de medida de ángulos en el que la unidad es el grado sexagesimal. Un grado es el resultado de partir un ángulo recto en 90 partes iguales, de aquí,

$$1 \text{ recto} = 90^0 \qquad 1^0 = 60' \text{ (minutos)} \qquad 1' = 60'' \text{ (segundos)}$$

✓ Un *radián* es la medida de un ángulo central en una circunferencia, de tal forma que el arco que abarca el ángulo tenga la misma longitud que el radio de la circunferencia.

✓ Para convertir grados a radianes, o radianes a grados, se utiliza la proporción

$$\frac{\text{radianes}}{\pi} = \frac{\text{grados}}{180}$$

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Un ángulo agudo es un ángulo entre 0^0 y 90^0, es decir, un ángulo del primer cuadrante. Para definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo, utilizaremos un triángulo rectángulo.

2.1. Definición

Consideramos un triángulo rectángulo como el de la figura 4.7. En el que consideramos el ángulo agudo α. La longitud de la *hipotenusa* es a, la longitud del *cateto opuesto* al ángulo α es b y la longitud del *cateto adyacente* al ángulo α es c.

Se llaman **razones trigonométricas** del ángulo α a las *razones* (proporciones) entre los lados del triángulo, y son **seno** (sen), **coseno** $(\cos)$, **tangente** (tg), **cosecante** (cosec), **secante** $(\sec)$ y **cotangente** (cotg), que se definen como se indica a continuación:

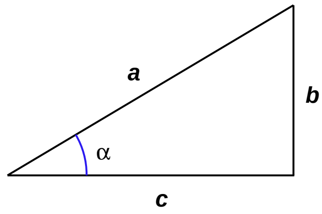


Figura 4.7: Triángulo rectángulo

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c} \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

(Las más importantes son el seno, coseno y tangente).

Por ejemplo, en el triángulo de la figura 4.8, las razones trigonométricas del ángulo α son las siguientes:

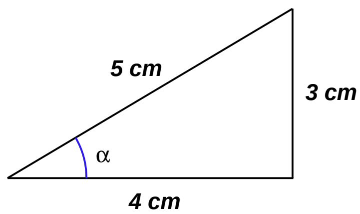


Figura 4.8: Triángulo de lados 3, 4 y 5 cm

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{4}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4} \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4}{3}$$

En la figura 4.9 tenemos dos triángulos rectángulos que comparten el ángulo α. Estos dos triángulos son **semejantes**, es decir, de sus tres ángulos son iguales y, por tanto, como sabemos, sus lados son proporcionales, es decir,

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

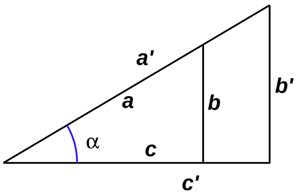


Figura 4.9: Triángulos semejantes

A primera vista, da la impresión de que el valor de las razones trigonométricas depende del tamaño del triángulo. Sin embargo, no es así, como podemos apreciar en la figura 4.9.

Por tanto, las razones trigonométricas se pueden calcular utilizando las medidas del triángulo grande o del triángulo pequeño, es decir, lo único que importa es el ángulo α

Debido a que las razones trigonométricas son independientes del triángulo con respecto del cual se calculen, sus valores están tabulados, y se pueden calcular mediante una calculadora científica. Para hacer cálculos mediante la calculadora, en primer lugar hay que asegurarse de que la calculadora esté puesta en grados o en radianes, dependiendo de cómo queramos hacer los cálculos. En la pantalla aparecerá la indicación DEG, si está en grados sexagesimales; o RAD, si está puesta en radianes. (El cambio de uno a otro sistema dependerá del tipo de calculadora, aunque lo más habitual es que se haga utilizando la tecla $\boxed{\text{MODE}}$ y algún número, según una leyenda que suele aparecer justo debajo de la pantalla.)

Las teclas que sirven para calcular seno, coseno y tangente; son $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$, respectivamente. Por ejemplo, para calcular el valor de $\text{sen}(35^0)$, con la calculadora en el modo DEG, pulsamos

$$\boxed{35}\ \boxed{\text{sin}}$$

y el resultado que se obtiene (dependiendo del número de decimales que admita la calculadora) es

$$\text{sen}(35^0) = 0'5735764364$$

Conocido el valor de una razón trigonométrica, también es posible calcular mediante la calculadora, el valor del ángulo. Por ejemplo, si $\cos\alpha = 0'24$, para calcular el valor del ángulo, utilizamos la función de la calculadora $\boxed{\cos^{-1}}$. Esta es la función inversa del coseno y será estudiada con más detalle más adelante, en la unidad correspondiente a funciones. Para utilizarla, pulsamos

$$\boxed{0'24}\ \boxed{\text{INV}}\ \overset{\cos^{-1}}{\boxed{\cos}}$$

el resultado que obtenemos,

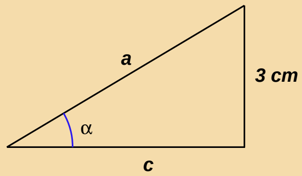
$$76'11345964$$

se puede convertir a grados, minutos, segundos, mediante la secuencia $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{{}^{0}\ {}'\ {}''}$, y se obtiene aproximadamente

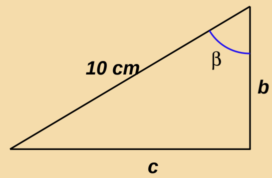
$$\alpha = 76^0\ 6'\ 48''$$

ACTIVIDADES

4. En el triángulo rectángulo de la figura siguiente, $\alpha = 38^0$. Calcular el valor de a y c.



5. En el triángulo rectángulo de la figura siguiente, $\beta = 65^0$. Calcular el valor de b y c.



2.2. Identidades trigonométricas

Las razones trigonométricas están relacionadas entre sí mediante algunas fórmulas que vamos a estudiar a continuación. Volvemos a considerar el triángulo rectángulo sobre el que hemos definido las razones trigonométricas, que representamos de nuevo en la figura 4.10.

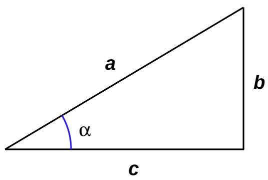


Figura 4.10: Triángulo rectángulo

Si dividimos $\operatorname{sen}\alpha$ entre $\cos\alpha$, y simplificamos $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha$, es decir, la tangente es igual al seno entre el coseno,

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Resulta evidente comprobar también las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

Vamos a obtener ahora otra relación importante, utilizando el teorema de Pitágoras. El **teorema de Pitágoras** afirma que, en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En nuestro triángulo, esto se traduce en la siguiente expresión:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Si dividimos esta expresión entre a^2, obtenemos

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Ahora bien, como $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{a}$ y $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$, la expresión anterior se puede escribir como

$$\boxed{\mathbf{sen^2\,\boldsymbol{\alpha} + cos^2\,\boldsymbol{\alpha} = 1}}$$

Esta identidad recibe el nombre de **relación fundamental de la trigonometría**, y relaciona el valor del seno y el coseno de un mismo ángulo α.

Veamos un ejemplo de utilización de la relación fundamental. Por ejemplo, sabiendo que $\operatorname{sen}(30^0) = \dfrac{1}{2}$, vamos a calcular su coseno y su tangente.

En primer lugar, sustituimos en la relación fundamental,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2(30^0) = 1$$

despejamos $\cos^2(30^0)$,

$$\cos^2(30^0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Entonces,

$$\cos(30^0) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(En principio, al sacar la raíz cuadrada, deberíamos considerar la posibilidad de que $\cos(30^0)$ fuese positivo o negativo, pero tal como hemos definido las razones trigonométricas, como fracciones entre medidas de lados de un triángulo, debemos tomar el signo positivo. No obstante, para ángulos no agudos esto puede no ser así, como veremos después.)

Para calcular ahora el valor de la tangente, aplicamos la fórmula $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$,

$$\operatorname{tg}(30^0) = \frac{\operatorname{sen}(30^0)}{\cos(30^0)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A partir de la relación fundamental, se pueden obtener fácilmente otras relaciones entre las razones trigonométricas.

Si dividimos todos los términos de la relación fundamental entre $\cos^2\alpha$,

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Simplificando, obtenemos

$$\boxed{\mathbf{tg^2\,\boldsymbol{\alpha} + 1 = \frac{1}{cos^2\,\boldsymbol{\alpha}}}}$$

Si dividimos la relación fundamental entre $\operatorname{sen}^2\alpha$ y simplificamos, obtenemos la siguiente fórmula de menos utilidad que las anteriores:

$$\boxed{\mathbf{1 + cotg^2\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{sen^2\,\boldsymbol{\alpha}}}}$$

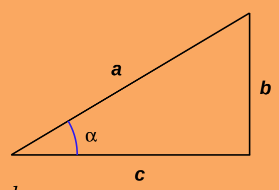
ACTIVIDADES

6. Sabiendo que $\cos(60^0) = \dfrac{1}{2}$, calcular el seno y la tangente del ángulo de 60^0.

7. Sabiendo que $\operatorname{tg}(45^0) = 1$, calcular el seno y el coseno del ángulo de 45^0.
(Indicación: utilizar la relación $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ para calcular el valor del coseno).

Recuerda

✓ Razones trigonométricas de un ángulo agudo:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

✓ Relaciones entre las razones trigonométricas:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

✓ Relación fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

✓ Relaciones que se obtienen a partir de la relación fundamental:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

3. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

3.1. La circunferencia goniométrica

Ahora vamos a extender la definición de las razones trigonométricas que ya conocemos para un ángulo agudo a un ángulo cualquiera. Para ello, situamos el triángulo rectángulo que usábamos antes dentro de una circunferencia centrada en el origen de coordenadas, como el la figura 4.11.

Dado que las razones trigonométricas no dependían de lo grande o lo pequeño que fuese el triángulo, tampoco dependerán de lo grande o pequeña que sea nuestra circunferencia. Por esta razón, elegimos un radio con el que resulta muy cómodo hacer operaciones, radio $= 1$. Lo que ahora es el radio, antes era la hipotenusa, de manera que cada vez que haya que dividir entre ésta, no habrá nada que hacer, ya que el resultado será el de dividir por 1. A esta circunferencia, a la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, que nos servirá para *medir* las razones trigonométricas, se le llama **circunferencia goniométrica**.

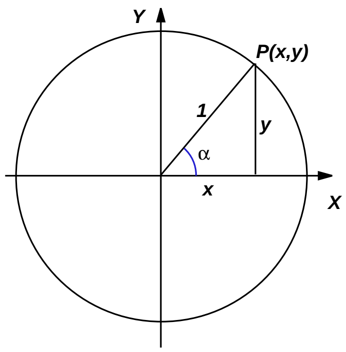


Figura 4.11: Circunferencia goniométrica

Ahora el ángulo α es un ángulo central de la circunferencia. La hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura, que ahora es un radio de la circunferencia, corta a ésta en el punto $P(x, y)$. Entonces, las razones trigonométricas del ángulo α se definen como

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}}$$

(Cosecante, secante y cotangente se pueden calcular utilizando sus relaciones con las anteriores.)

Esta idea nos permite dar sentido a las razones trigonométricas de un ángulo de un cuadrante cualquiera. Por ejemplo, si el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, su seno y coseno son los de la figura 4.12. Es decir, su seno es la ordenada y del punto P y el coseno, la abscisa x. Como el punto P está en el segundo cuadrante, el seno será positivo y el coseno será negativo.

Con dibujos análogos, se puede comprobar que el signo de las razones trigonométricas es el indicado en la siguiente tabla (se recomienda no memorizar la tabla,

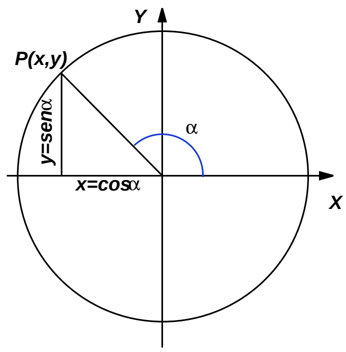


Figura 4.12: Ángulo del segundo cuadrante

cuando sea preciso averiguar un signo se puede hacer el dibujo correspondiente):

Signo de las razones trigonométricas:

	seno	coseno	tangente
1er cuadrante	+	+	+
2^{o} cuadrante	+	–	–
3er cuadrante	–	–	+
4^{o} cuadrante	–	+	–

ACTIVIDADES

8. Sabiendo que $\cos\alpha = \dfrac{-1}{2}$ y que α se encuentra en el tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

9. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-1}{3}$ y que $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcular el resto de las razones trigonométricas.

A partir de la representación de las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica se puede deducir una propiedad importante del seno y del coseno, a saber, que sus valores siempre están comprendidos entre -1 y 1. Esto es debido a que tanto las ordenadas y las abscisas del punto $P(x, y)$ que va recorriendo la circunferencia siempre oscilan entre estos dos valores, por ser 1 el radio de la circunferencia. Por tanto, se verifica, para cualquier ángulo α,

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Los valores de las distintas razones trigonométricas en los ángulos de 0, 90, 180, 270 y 360 grados se indican en la tabla siguiente, que también se puede deducir a partir de la circunferencia goniométrica:

	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tg	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

(Recordemos que no se puede dividir entre 0, esta es la razón por la que la tangente de 90^0 y 270^0 no existe, $\nexists$).

3.2. Relación entre ángulos de distintos cuadrantes

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo siempre se pueden relacionar con las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante.

Por ejemplo, el ángulo de 135^0 se encuentra en el segundo cuadrante (figura 4.13). Hasta 180^0 le faltan 45^0, que se puede representar en el primer cuadrante.

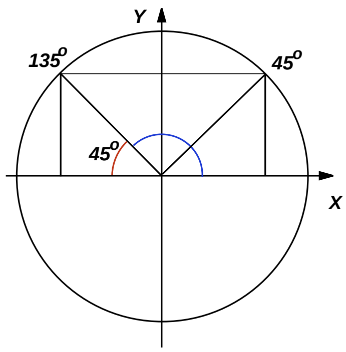


Figura 4.13: Ángulos suplementarios

En la figura se puede observar que el valor del seno de los dos ángulos coincide y el valor del coseno es igual, aunque de signo distinto. Por tanto,

$$\operatorname{sen}(135^0) = \operatorname{sen}(45^0) \qquad \cos(135^0) = -\cos(45^0) \qquad \operatorname{tg}(135^0) = -\operatorname{tg}(45^0)$$

(Dos ángulos, que como 135^0 y 45^0, sumen 180^0, se llaman **ángulos suplementarios**).

Si estamos en el tercer cuandrante, por ejemplo, el ángulo de 200^0 (figura 4.14), prolongando el radio, hasta el primer cuadrante; obtenemos el ángulo de 20^0, que es precisamente la diferencia entre 180^0 y 200^0.

Entonces, a partir de la figura, se puede deducir que tanto seno, como coseno, tienen los mismos valores aunque signos distintos. Por tanto,

$$\operatorname{sen}(200^0) = -\operatorname{sen}(20^0) \qquad \cos(200^0) = -\cos(20^0) \qquad \operatorname{tg}(200^0) = \operatorname{tg}(20^0)$$

Si el ángulo está en el cuarto cuadrante, por ejemplo el ángulo de 300^0, como en la figura 4.15, prolongando el seno del ángulo de 300^0 hasta el primer cuadrante, tenemos el ángulo de 60^0.

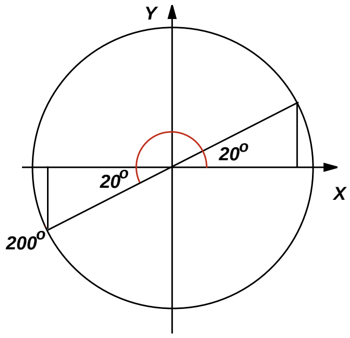


Figura 4.14: Ángulo del tercer y del primer cuadrante

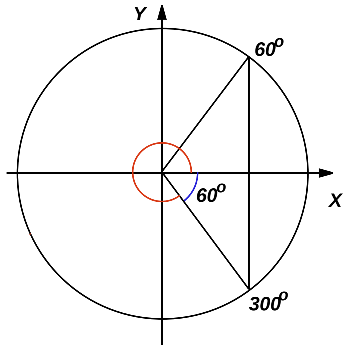


Figura 4.15: Ángulo del cuarto y del primer cuadrante

En la figura apreciamos que el seno de los dos ángulos es igual pero de signo contrario, y el coseno es exactamente el mismo. Entonces,

$$\operatorname{sen}(300^0) = -\operatorname{sen}(60^0) \qquad \cos(300^0) = \cos(60^0) \qquad \operatorname{tg}(300^0) = -\operatorname{tg}(60^0)$$

Por último, también entre dos ángulos del primer cuadrante se puede encontrar una relación, que ya ha aparecido antes. Se trata de dos ángulos que sumen 90^0, que se llaman **ángulos complementarios**. Por ejemplo, en la figura 4.16 hemos dibujado los ángulos de 30^0 y de 60^0, que son complementarios.

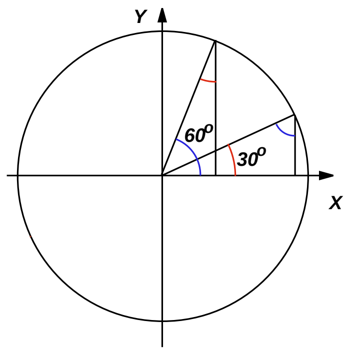


Figura 4.16: Ángulos complementarios

En la figura se observa que los valores del seno y del coseno del ángulo de 30^0 coinciden con los valores del coseno y del seno, respectivamente, del ángulo de 60^0.

Entonces,

$$\operatorname{sen}(30^0) = \cos(60^0) \qquad \cos(30^0) = \operatorname{sen}(60^0) \qquad \operatorname{tg}(30^0) = \operatorname{cotg}(60^0)$$

Tampoco es preciso memorizar estas relaciones, cada vez que se necesiten se pueden representar y deducir fácilmente.

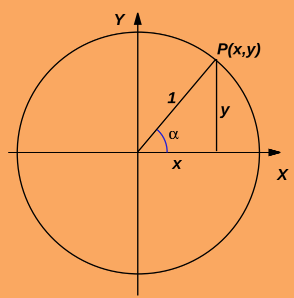
Si el ángulo es superior a 360^0, en primer lugar, habrá que dividir entre 360^0 y quedarse con el resto, después se puede relacionar con un ángulo del primer cuadrante, utilizando alguno de los gráficos anteriores.

ACTIVIDADES

10. Suponiendo que α es un ángulo del primer cuadrante, escribir en función de alguna razón trigonométrica del ángulo α las razones que se indican a continuación:
a) $\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$ b) $\cos(\alpha + \pi)$ c) $\operatorname{tg}(-\alpha)$ d) $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)$

Recuerda

- ✓ Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera se pueden definir utilizando la circunferencia goniométrica, centrada en el origen, de radio 1, de la forma siguiente:



$$\operatorname{sen}\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

- ✓ A partir de esta definición se pueden deducir los diferentes signos de las razones trigonométricas de un ángulo, dependiendo del cuadrante en el que se encuentre. También, se deduce que

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

- ✓ Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera siempre se pueden reducir a las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante.

4. Triángulos

Estudiaremos en este apartado dos fórmulas que permiten resolver un triángulo cualquiera. Es decir, conocidos ciertos elementos del triángulo (lados o ángulos), calcular los restantes. Estas fórmulas son el teorema de los senos y el teorema del coseno.

Las fórmulas estarán referidas a los lados y los ángulos de un triángulo no rectángulo cualquiera, nombrados según el siguiente convenio: los ángulos con las letras mayúsculas A, B y C; los ángulos con las letras minúsculas a, b y c; de manera que un ángulo y un lado opuestos tengan la misma letra, como en la figura 4.17.

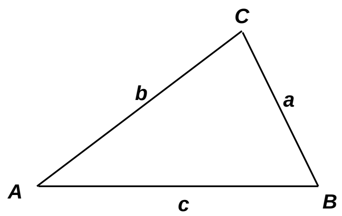


Figura 4.17: Un triángulo no rectángulo

4.1. Teorema de los senos

Si observamos el triángulo de la figura 4.17, podemos observar un hecho que salta a la vista. El ángulo más pequeño, el A está enfrente del lado más pequeño, el a; y el ángulo más grande, el C, está enfrente del lado más largo, el c. Parece que hubiera alguna relación directa entre la medida del ángulo y la medida del lado. Pudiera pensarse que los ángulos y los lados del triángulo fueran estuvieran en proporción directa. Sin embargo, la realidad es que sí hay una relación, aunque a través de los valores de los senos de los ángulos. De hecho se tiene el siguiente resultado, que se denomina **teorema de los senos**:

En un triángulo cualquiera de ángulos A, B y C, con lados opuestos a, b y c, se verifica

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

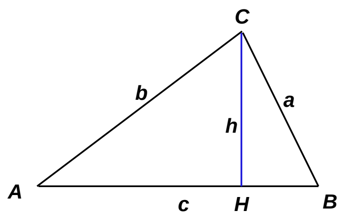


Figura 4.18: Teorema de los senos

Para demostrar el teorema, consideramos el triángulo de la figura 4.18. Se trata del triángulo de la figura anterior, al que hemos añadido su altura sobre el lado c. La altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos: BHC y AHC.

En el triángulo BHC, se tiene que

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \operatorname{sen} B$$

En el triángulo AHC, se tiene que

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \operatorname{sen} A$$

Igualando las dos expresiones de la altura h obtenidas antes,

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$$

de donde se deduce

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

La otra igualdad de la proporción se puede deducir de modo análogo, considerando la altura del triángulo sobre otro de los lados. También es posible demostrar el teorema para el caso en el que alguno de los ángulos sea mayor de 90^0.

A pesar de que resulta un interesante ejercicio el intentar comprender la demostración del teorema, para nosotros, lo importante ahora es aprender a utilizarlo.

Por ejemplo, dado el triángulo de la figura 4.19, vamos a calcular la longitud de los lados a y c.

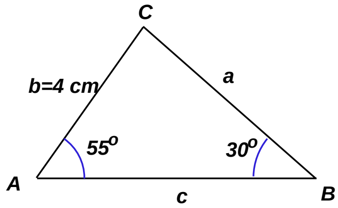


Figura 4.19: Calcular a y c

Vamos a utilizar el teorema de los senos, en particular, empezaremos por utilizar la parte

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Sustituimos en la expresión anterior los datos del problema y despejamos el valor de a,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 55^0} = \frac{b}{\operatorname{sen} 30^0} \Rightarrow a = \frac{4 \cdot \operatorname{sen} 55^0}{\operatorname{sen} 30^0} = 6'55 \text{ cm}$$

Para calcular el valor de c podemos utilizar

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}; \quad \text{o bien} \quad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Lo hacemos con la primera expresión, para lo cual necesitamos saber cuánto mide el ángulo C, pero esto es sencillo, ya que sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera siempre es 180^0. Por tanto, $C = 180^0 - 55^0 - 30^0 = 95^0$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 55^0} = \frac{c}{\operatorname{sen} 95^0} \Rightarrow c = \frac{6'55 \cdot \operatorname{sen} 95^0}{\operatorname{sen} 55^0} = 7'97 \text{ cm}$$

ACTIVIDADES

11. Calcular el valor del ángulo B y del lado c de un triángulo en el que $a = 9$ cm, $b = 6$ cm y $A = 60^0$.

4.2. Teorema del coseno

En un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es a y los catetos son b y c, se verifica el teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Sin embargo, si el triángulo no es rectángulo esto no tiene por qué cumplirse. Pero se verifica una generalización del teorema de Pitágoras que se denomina **teorema del coseno**:

En un triángulo cualquiera de ángulos A, B y C, con lados opuestos a, b y c, se verifica

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos A$$

Dado que la asignación de letras a los lados del triángulo es completamente arbitraria, también se verifican las dos fórmulas siguientes, que son equivalentes a la anterior:

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot}\cos B}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}\cos C}$$

El teorema del coseno también se puede demostrar utilizando argumentos geométricos, entre ellos, el teorema de Pitágoras. Sin embargo, en este caso vamos a ir directamente a ver cómo se puede aplicar la fórmula.

Por ejemplo, a partir de los datos del triángulo de la figura 4.20, queremos calcular la longitud del lado a.

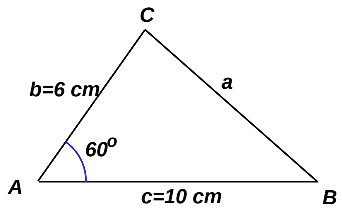


Figura 4.20: Calcular a

Utilizamos el teorema del coseno, con la fórmula que hemos visto en primer lugar, la que empieza por a^2, por razones evidentes. Sustituimos entonces en la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos A$$

$$a^2 = 36^2 + 100^2 - 2{\cdot}6{\cdot}10{\cdot}\cos 60^0 = 76$$

Entonces,

$$a = \sqrt{76} = 8'72 \text{ cm}$$

Es importante destacar que este ejemplo no se podría haber hecho utilizando el teorema de los senos, ya que para ello hubiera sido preciso que tuviésemos al menos el valor de un ángulo y el de su lado opuesto.

4.3. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo consiste en calcular el valor de todos sus elementos: ángulos y lados. Para ello acabamos de estudiar dos herramientas: teorema de los senos y teorema del coseno. ¿Cuándo hay que utilizar uno u otro?

El teorema de los senos se puede utilizar siempre que entre los datos se encuentren al menos un ángulo y el lado opuesto, además de algún otro elemento del triángulo.

El teorema del coseno se puede utilizar cuando los datos que tenemos son un ángulo y los dos lados que lo forman. También se puede utilizar cuando disponemos de las medidas de los tres lados, aunque no tengamos ningún ángulo.

Vamos a ver algún ejemplo más:

Tres ciudades A, B y C se encuentran unidas mediante tres carreteras rectas. Las dos carreteras que parten de A hacia las otras dos ciudades forman un ángulo de 120^0. La distancia entre A y B es de 50 kilómetros y la distancia de A a C es de 30 kilómetros. Queremos calcular la distancia de la ciudad B a la ciudad C.

En primer lugar representamos gráficamente los datos del problema.

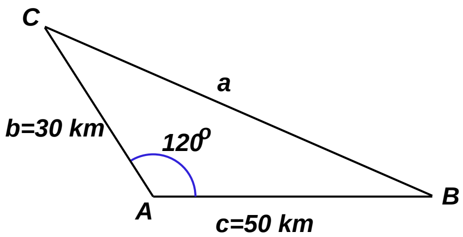


Figura 4.21: Tres ciudades

En la figura 4.21 vemos que la incógnita del problema es el lado a. Entonces, utilizamos el teorema del coseno. Sustituimos en la expresión

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot} \cos A$$

$$a^2 = 30^2 + 50^2 - 2{\cdot}30{\cdot}50 \cos 120^0 = 4900$$

Entonces,

$$a = \sqrt{4900} = 70 \text{ km}$$

Si ahora quisiéramos calcular el valor de alguno de los otros dos ángulos, podríamos utilizar el teorema de los senos, porque ya tenemos el valor del ángulo A y del lado a.

Otro ejemplo:

Los tres lados de un triángulo miden $a = 3$ cm, $b = 6$ cm y $c = 4$ cm. Calcular el valor de sus ángulos.

También en este caso tenemos que empezar utilizando el teorema del coseno en cualquiera de sus formas. Por ejemplo,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot} \cos A$$

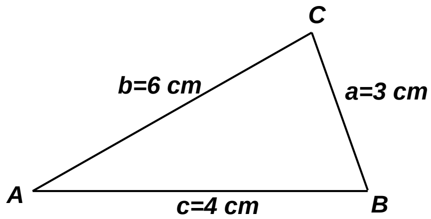


Figura 4.22: Calcular los ángulos

Sustituimos los datos del problema (figura 4.22) y despejamos $\cos A$,

$$3^2 = 6^2 + 4^2 - 2{\cdot}6{\cdot}4{\cdot}\cos A \Leftrightarrow 9 = 36 + 16 - 48\cos A$$

pasando $\cos A$ al miembro izquierdo,

$$48\cos A = 43$$

de donde,

$$\cos A = \frac{43}{48} = 0'89583$$

Utilizando la calculadora, obtenemos que

$$A = 26^0\ 23'\ 4''$$

ACTIVIDADES

12. Calcular el valor de los dos ángulos que faltan en el ejemplo anterior. Es decir, sabiendo que $a = 3$ cm, $b = 6$ cm y $c = 4$ cm, y $A = 26^0\ 23'\ 4''$, calcular B y C.

Recuerda

- *Teorema de los senos:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

- *Teorema del coseno:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot}\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}\cos C$$

- El teorema de los senos se puede utilizar para resolver un triángulo en el que se conozcan dos ángulos y algún lado, o bien, dos lados y el ángulo opuesto de uno de ellos.

  El teorema del coseno se puede utilizar para resolver un triángulo en el que se conozca el valor de un ángulo y el de los dos lados que lo forman, o bien, los tres lados del triángulo.

5. Relaciones trigonométricas

Vamos a estudiar en este último apartado algunas relaciones trigonométricas, además de la relación fundamental, ya estudiada antes. También veremos cómo se pueden resolver algunas ecuaciones en las que aparecen razones trigonométricas.

5.1. Seno y coseno de una suma

Vamos a deducir una fórmula para el seno de una suma de dos ángulos, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, en función del seno y coseno de los ángulos α y β. La deducción no es fácil, sobre todo en una primera lectura, pero puede resultar un buen ejercicio, aunque difícil, intentar comprenderla. A pesar de todo, para el desarrollo posterior, no es imprescindible su comprensión.

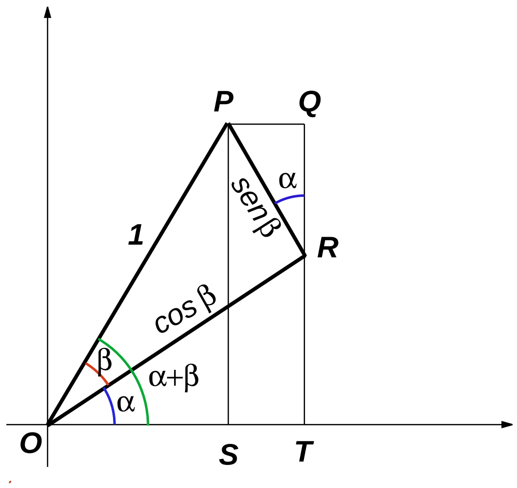


Figura 4.23: Seno de una suma

Vamos a utilizar la figura 4.23. En esta figura hemos dibujado un triángulo rectángulo, el OPR en el que la hipotenusa mide 1. De esta forma, el cateto opuesto y el adyacente del ángulo β son, respectivamente, $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$.

Si consideramos el triángulo rectángulo OPS, tenemos que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = PS$ Pero

$$PS = TQ = TR + RQ$$

Según el triángulo ORT,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{TR}{\cos\beta} \Rightarrow TR = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

Según el triángulo PQR,

$$\cos\alpha = \frac{RQ}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow RQ = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Entonces,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = TR + RQ = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Con lo que, si el lector ha tenido la paciencia de llegar hasta este punto, habrá comprobado que hemos obtenido la fórmula del **seno de una suma**:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Con argumentos similares, se puede comprobar que el **coseno de una suma**:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

A partir de estas dos fórmulas, se pueden obtener multitud de relaciones trigonométricas, mediante manipulaciones algebraicas, algunas de las cuales vamos a proponer a continuación como actividades.

ACTIVIDADES

13. Utilizando la fórmula del seno de una suma, calcular el seno de una diferencia, es decir, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

14. Utilizando la fórmula del coseno de una suma, calcular el coseno de una diferencia, es decir, $\cos(\alpha-\beta)$.

15. Utilizando las fórmulas del seno y del coseno de una suma, calcular la tangente de una suma, es decir, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.
(Indicación: utilizar el hecho de que $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ y dividir el numerador y el denominador de la expresión que se obtiene por el producto $\cos\alpha\cos\beta$).

Otras dos fórmulas importantes son el seno y el coseno del ángulo doble:
El seno del ángulo doble se puede obtener a partir de la fórmula del seno de una suma, sin más que aplicar esta fórmula a $\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)$, e ir cambiando β por α.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

ACTIVIDADES

16. Comprobar que la fórmula del coseno del ángulo doble es

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

5.2. Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en la que aparecen razones trigonométricas.

Veamos algunos ejemplos:

Queremos resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x = 1$$

Se trata de encontrar todos los ángulos cuyo seno es 1. Sabemos que el ángulo de 90^0 verifica esta condición. Y también lo harán los ángulos que se obtengan cada vez que a este ángulo le sumemos 360^0, es decir, cada vez que demos una vuelta completa a la circunferencia. Entonces, todas las soluciones son de la forma

$$x = 90^0 + 360k$$

donde k es un número entero de vueltas.

ACTIVIDADES

17. Resolver la ecuación trigonométrica $\cos x = -1$.

Las ecuaciones trigonométricas pueden ser algo más complicadas. Por ejemplo, pueden involucrar más de una razón trigonométrica. En este caso lo que hay que hacer es intentar reducirla a una única razón, para poder llegar a alguna ecuación como las anteriores.

Por ejemplo, queremos resolver la ecuación

$$3 - 2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x = 0$$

sabiendo que x es un ángulo tal que $0^0 \leq x \leq 90^0$.

Utilizamos la relación fundamental de la trigonometría para transformar $\operatorname{sen}^2 x$. Como

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación,

$$3 - 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$$

Hacemos operaciones y llegamos a la ecuación

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

que no es más que una ecuación de segundo grado en $\cos x$. Resolvemos esta ecuación y obtenemos

$$\cos x = \frac{1}{2} \qquad \cos x = 1$$

que son dos ecuaciones sencillas, como las que hemos empezado estudiando.

Sus soluciones son (comprobarlo)

$$x = 60^0 \qquad x = 0^0$$

debido a que nos indicaban que las soluciones sólo podían estar comprendidas entre 0^0 y 90^0, incluidos estos ángulos.

ACTIVIDADES

18. Resolver la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$$

Recuerda

- *El seno y el coseno de una suma:*

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

- *El seno y el coseno del ángulo doble:*

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

- Una *ecuación trigonométrica* es una ecuación en la que la incógnita aparece involucrada con razones trigonométricas. Se resuelven intentando reducirlas de manera que sólo aparezca una razón trigonométrica: seno o coseno igual a algún valor.