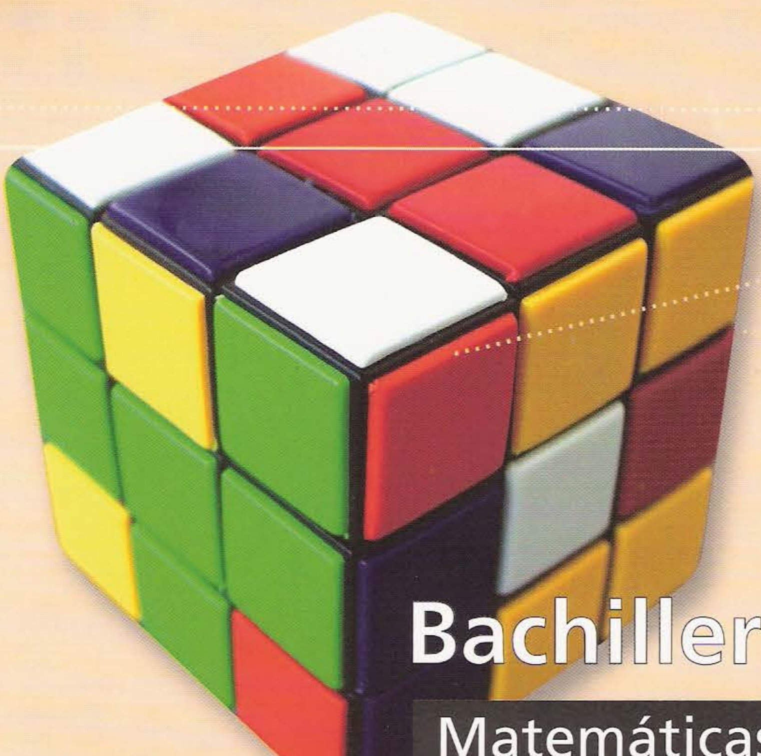


Bachillerato a distancia

Matemáticas I

CIDEAD Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia
CNICE Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa

1º Bachillerato a distancia

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN
Y CIENCIA

Todo debería hacerse tan sencillo
como sea posible, pero no más.
Albert Einstein, físico.
.
Cuanto más trabajo y practico,
más suerte parezco tener.
Gary Player, jugador profesional de golf.

Estudiar Matemáticas no siempre es una actividad agradable, incluso para aquellas personas que afirman sentirse atraídos por esta disciplina. Quizá sea porque aprender Matemáticas supone un esfuerzo que no siempre parece tener recompensa. Sin embargo, hay quien dice apreciar belleza en las Matemáticas, al igual que apreciamos belleza al contemplar una obra de arte.

Haya o no haya belleza en las Matemáticas, lo cierto es que resultan útiles. Resultan útiles para nuestra vida diaria y, más aún, resultan imprescindibles para entender las Ciencias, porque las Matemáticas son el lenguaje de las Ciencias, el lenguaje en el que está escrito el Universo, afirmaba Galileo.

El objeto de la asignatura de Matemáticas en las modalidades de Ciencias del Bachillerato es el de tener el primer contacto serio con este lenguaje de las Ciencias. Tanto para quien vaya a hacer de las Matemáticas un uso más prolongado, mediante estudios posteriores, como para quien las estudie sólo durante el Bachillerato, esta asignatura va a resultar útil desde el principio para entender otras Ciencias.

Este libro está dividido en doce unidades, que cubren la programación oficial de la materia. Cada una de las unidades tiene los siguientes elementos y características:

- Un índice de contenidos en el que aparecen los conceptos que se van a estudiar y sus relaciones.
- El desarrollo de la unidad, en la que se van estudiando los conceptos a partir de situaciones y ejemplos sencillos.
- En este desarrollo, cada uno de los apartados acaba con un *Recuerda*, que resume las ideas y conceptos fundamentales que se han estudiado.
- A lo largo de la unidad hay actividades propuestas que sirven para verificar la comprensión de los conceptos que se acaban de estudiar.
- Todas las actividades propuestas en el texto disponen de sus correspondientes soluciones detalladas, que aparecen después de la última unidad.

Los términos fundamentales que van apareciendo a lo largo del texto están recogidos en un glosario que se encuentra a continuación del solucionario.

Las Matemáticas se aprenden resolviendo, o a veces intentando resolver, problemas. Su estudio, por tanto, ha de ser una actividad dinámica; es preciso probar, conjeturar, calcular, verificar. En este sentido, la mejor manera de estudiar un texto de Matemáticas es usar lápiz y papel, e intentar hacer los cálculos de los ejercicios que se proponen, y de reconstruir los que ya están hechos, sin acudir a la solución hasta que no se haya hecho un intento serio para resolver cada problema. Algunos conceptos y técnicas los entenderemos rápidamente, otros requerirán más tiempo y más intentos. Pero no hay ningún obstáculo en las Matemáticas que nos disponemos a estudiar, que no se pueda superar con un poco de esfuerzo.

Deseamos, pues, al alumno el mayor de los éxitos en su intento.

1 Números reales y complejos

ÍNDICE DE CONTENIDOS

El número es el elemento fundamental sobre el que se construye toda la Matemática. En esta primera unidad estudiaremos todos los conjuntos numéricos, en particular, prestaremos especial atención al conjunto numérico que vamos a utilizar fundamentalmente durante todo el curso: los números reales. A pesar de que con los números reales se pueden hacer la mayoría de las Matemáticas que se estudiarán a lo largo de todo el Bachillerato, existen algunos problemas para los cuales no son suficientes, esto lleva a introducir un conjunto de números mayor, que son los números complejos. También veremos en esta unidad una pequeña introducción a estos números.

1. Números racionales

Los **números naturales** son los que se utilizan para contar, se representan mediante el símbolo $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

(En algunos textos se considera también que el número 0 es un número natural. La diferencia entre considerarlo o no es irrelevante a efectos prácticos, salvo que si lo consideramos, no podemos decir que son los que se utilizan para contar).

Con los números naturales podemos sumar y multiplicar sin ningún problema, es decir, si sumamos o multiplicamos dos números naturales, el resultado es un nuevo número natural. Sin embargo, no podemos restarlos siempre. Podemos restar $5 - 3 = 2$, pero no tiene sentido la operación $3 - 5$.

Para que la operación $3 - 5$ tenga sentido necesitamos un conjunto de números mayor, este conjunto es el de los **números enteros**, que se denota $\mathbb{Z}$ y está constituido por los naturales, el cero y los números negativos,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}.$$

Para indicar el hecho de que los números naturales están incluidos dentro del conjunto de los números enteros, utilizamos la expresión:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

(donde $\subset$ es el símbolo *incluido*).

Con los números enteros se puede sumar, restar y multiplicar. Para multiplicar dos números enteros hay que tener en cuenta la tabla de los signos, que recordamos a continuación,

$$\begin{aligned} + \cdot + &= + \\ + \cdot - &= - \\ - \cdot + &= - \\ - \cdot - &= + \end{aligned}$$

(la misma tabla sirve para la división).

Sin embargo, con los números enteros no se pueden llevar a cabo, o carecen de sentido, las divisiones que no son exactas. Por ejemplo, con los números enteros no podemos expresar la tercera parte de algo.

Para que tengan sentido cosas tales como la tercera parte o la cuarta parte de la unidad, y en general todas las divisiones entre dos números enteros (salvo en las que el divisor sea 0), se introduce el conjunto de los **números racionales**. Los números racionales, que denotaremos $\mathbb{Q}$, son todos los números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son ambos enteros, y además q es distinto de 0. Lo cual, simbólicamente se puede expresar así,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

(El símbolo $\in$ se lee *pertenece* y sirve para indicar que un elemento está en un conjunto, en este caso nos sirve para indicar que el numerador y el denominador del número racional son enteros).

Por ejemplo, son ejemplos de números racionales los siguientes:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{-3}{4}, \quad \frac{55}{-37}.$$

Hay que tener en cuenta que los números enteros, y también los naturales, están incluidos dentro del conjunto de los números racionales. En efecto, cualquier número entero se puede expresar como un número racional, por ejemplo, $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2}$. De manera que podemos escribir

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

ACTIVIDADES

1. Indicar a qué conjuntos de números; naturales, enteros o racionales, pertenecen cada uno de los números siguientes:

$$-3, \qquad 2, \qquad \frac{6}{3}, \qquad \frac{-5}{77}, \qquad 3.$$

1.1. Expresión decimal de los números racionales

Los números racionales se pueden expresar mediante su forma fraccionaria, pero también se pueden expresar mediante su forma decimal. Para obtener esta expresión, sólo hay que hacer la división que indica la fracción. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = 0'5, \qquad \frac{6}{5} = 1'2, \qquad \frac{5}{4} = 1'25.$$

Los tres ejemplos anteriores se denominan **decimales exactos**, porque cuando se hace la división, llega un momento en que el resto sale cero, de esta forma la cantidad de cifras decimales es finita.

También puede ocurrir que, al dividir, los restos empiecen a repetirse, por ejemplo,

$$\frac{1}{3} = 0'333\ldots \qquad \frac{2}{9} = 0'222\ldots \qquad \frac{122}{99} = 1'232323\ldots$$

Estos números se llaman **decimales periódicos puros**, porque la parte decimal está formada por alguna cifra, o grupo de cifras, que se repiten.

Si en la parte decimal hay una parte que no se repite y otra que sí lo hace, se denomina **decimal periódico mixto**. Por ejemplo, los números que se obtienen de dividir las siguientes fracciones son periódicos mixtos:

$$\frac{106}{45} = 2'35555\ldots \qquad \frac{427}{300} = 1'423333\ldots \qquad \frac{799}{330} = 2'4212121\ldots$$

Según acabamos de ver, dada la expresión fraccionaria de un número racional, su expresión decimal se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador de la fracción. Veamos ahora cómo se puede realizar el proceso inverso, es decir, dado el número decimal, cómo obtener la fracción que lo genera.

- Si se trata de un *decimal exacto*, sólo hay que dividir el número sin coma, entre el 1 seguido de tantos ceros como decimales haya en el número, después, si es preciso se simplifica la fracción. Por ejemplo,

$$3'51 = \frac{351}{100}; \qquad 2'035 = \frac{2035}{1000} = \frac{407}{200}; \qquad 5'42 = \frac{542}{100} = \frac{271}{50}.$$

- Si se trata de un *decimal periódico puro*, por ejemplo, $N = 2'3333\ldots$, hacemos lo siguiente:

  - Multiplicamos el número N por 10, porque sólo tiene una cifra decimal que se repite, si fueran dos, multiplicaríamos por 100,

$$10N = 23'3333\ldots$$

  - Restamos al número $10N$ el número inicial,

$$\begin{array}{rcr} 10N & = & 23'3333\ldots \\ N & = & 2'3333\ldots \\ \hline 9N & = & 21'0000\ldots \end{array}$$

  - Despejamos el valor de N y simplificamos la fracción, si es posible:

$$N = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}.$$

- Si se trata de un número *decimal periódico mixto*, por ejemplo, $N = 6'214444\ldots$, seguimos un proceso parecido al anterior. Hay que plantear una resta entre dos números, de manera que sus partes decimales desaparezcan, para lo cual, es preciso que sea en ambos casos la parte periódica:

  - Multiplicamos el número N por 1000, para que salgan fuera de la coma todas las cifras decimales, hasta la primera del período,

$$1000N = 6214'4444\ldots$$

  - Restamos al número $1000N$ el número $100N$, para que la parte decimal de los dos números que restamos sea la misma,

$$\begin{array}{rcr} 1000N & = & 6214'4444\ldots \\ 100N & = & 621'4444\ldots \\ \hline 900N & = & 5593'0000\ldots \end{array}$$

  - Despejamos el valor de N y obtenemos la fracción que buscábamos:

$$N = \frac{5593}{900}.$$

ACTIVIDADES

2. Calcular la expresión decimal de los siguientes números racionales e indicar el tipo de decimal del que se trata:
a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{3}{7}$; c) $\frac{5}{13}$; d) $\frac{-87}{22}$; e) $\frac{65}{33}$.

3. Calcular la expresión fraccionaria de los siguientes números decimales:
a) $3'34$; b) $0'003$; c) $31'21212121\ldots$; d) $2'5555\ldots$; e) $4'3215151515\ldots$

1.2. Representación gráfica de los números racionales

Los números racionales se pueden representar en una recta de la forma siguiente:
- Elegimos un punto como origen, en el que situaremos el número 0.
- Con una cierta medida como unidad, representamos los enteros positivos a la derecha del 0, y los enteros negativos a la izquierda, como se muestra en la figura 1.1.

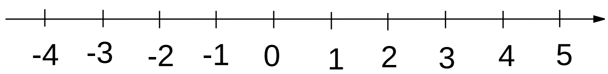


Figura 1.1: Recta racional

Veamos cómo se pueden representar números racionales que no sean enteros. Por ejemplo, queremos representar el número racional $\frac{5}{6}$, dividimos la unidad en seis partes iguales y contamos 5, como en la figura 1.2.

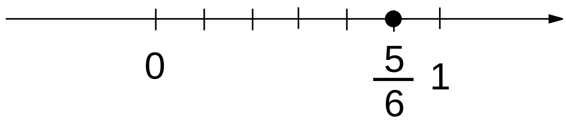


Figura 1.2: Representación de $\frac{5}{6}$

La representación gráfica de los números racionales en una recta permite entender intituitivamente una importante propiedad que distingue a estos números de los enteros. Entre dos números enteros consecutivos cualesquiera, por ejemplo, el 5 y el 6, no es posible encontrar ningún otro número entero. Sin embargo, entre dos números racionales cualesquiera p y q, siempre es posible encontrar, no sólo uno, sino infinitos números racionales. A esta propiedad se le llama propiedad de **densidad**.

ACTIVIDADES

4. Escribir cuatro números racionales distintos entre los siguientes pares de fracciones:

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{16}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{4}$ c) $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{7}$ d) $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{5}$.

Recuerda

- ✓ Los *números naturales* son

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

- ✓ Los *números enteros* son

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots\}.$$

- ✓ Los *números racionales* son las fracciones entre dos números enteros, es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}.$$

Los naturales están incluidos en los enteros, y estos a su vez, están incluidos dentro de los racionales, es decir,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

- ✓ Los números racionales también se pueden expresar mediante números decimales. Se puede convertir una fracción en un número decimal y un número decimal en una fracción, mediante un sencillo proceso.
- ✓ Los números racionales se pueden representar en una recta, que refleja la idea de *densidad*, es decir, que entre dos números racionales cualesquiera, siempre es posible hallar un número infinito de ellos.

2. Números reales

Hemos visto cómo los números racionales admiten una representación decimal, para obtenerla, no hay más que dividir el numerador entre el denominador de la fracción. Pero también hemos visto que el resultado no es un número decimal cualquiera, de hecho, sólo salen decimales de tres tipos: decimales exactos, periódicos puros o periódicos mixtos. No hay ninguna fracción que al dividirla produzca un decimal como

$$2'31331333133331\ldots$$

Esto hace pensar que puede haber números que no son racionales, vamos a ver a continuación que, en efecto, así es, hay números no racionales.

2.1. Números irracionales

Si calculamos el número $\sqrt{2}$ con la calculadora, obtenemos la el siguiente resultado,

$$\sqrt{2} = 1'414213562\ldots$$

Dependiendo del modelo de calculadora, se pueden obtener más o menos cifras decimales. En cualquier caso, observamos que las cifras no se repiten y, si fuera posible, seguir obteniendo decimales, veríamos que tampoco se acaban. Esto nos lleva a pensar, como comentábamos antes, que quizá el número $\sqrt{2}$ no sea un número racional. Vamos a demostrar que así es. Lo vamos a hacer con una técnica que se denomina **reducción al absurdo**, esta técnica de demostración consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere probar, hasta llegar a alguna afirmación que sepamos que es falsa, con lo cual, nuestra suposición inicial también ha de ser falsa.

Supongamos entonces que $\sqrt{2}$ es un número racional, es decir, que se puede expresar como una fracción $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Supongamos además, que la fracción $\frac{p}{q}$ está simplificada, es decir, los números p y q son primos entre sí, no es posible encontrar un número (que no sea el 1) que divida simultáneamente a los dos números.

Elevamos ahora la expresión $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ al cuadrado y obtenemos,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2.$$

Como $2q^2 = p^2$, el número p^2 debe ser par (ya que es igual a un múltiplo de 2). Pero si p^2 es par, también es par p, ya que $(\text{par})^2 = \text{par}$ y $(\text{impar})^2 = \text{impar}$. Ahora bien, si p es un número par, entonces se puede escribir de la forma $p = 2k$, donde k es un número entero. Sustituyendo $p = 2k$ en la expresión $2q^2 = p^2$, tenemos

$$2q^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow 2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2.$$

Entonces, usando el mismo razonamiento que antes, llegamos a la conclusión de que q es también un número par. Pero esto es imposible, ya que habíamos supuesto que $\frac{p}{q}$ era la fracción simplificada, es imposible que p y q sean ambos pares. Luego, nuestra suposición inicial, es decir, el hecho de que $\sqrt{2}$ era racional debe ser falso.

Los números que no son racionales se llaman **números irracionales**, y lo que acabamos de demostrar es que

$\sqrt{2}$ es un número irracional.

Con demostraciones similares se puede probar que también son irracionales números como

$$\sqrt{3}; \qquad \sqrt{5}; \qquad \sqrt[3]{2}; \qquad \sqrt[3]{7}; \qquad \text{etc.}$$

Y con técnicas mucho más sofisticadas se puede probar que el número $\pi = 3'141592654\ldots$ también es irracional.

Dado que un número racional es aquel que no se puede expresar como un cociente entre dos números enteros, esto implica que su expresión decimal debe ser distinta también, es decir, que la expresión decimal de un número irracional siempre será infinita y no periódica.

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales, es decir, al conjunto de todos los números decimales posibles, le llamamos conjunto de los **números reales** y lo representamos con la letra $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irracionales}\}$$

Entonces,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

El conjunto de los números reales es el conjunto de números que utilizaremos a lo largo de todo el curso. Cada vez que usemos la palabra *número*, entenderemos que decimos número real, salvo que se especifique otra cosa. No obstante, veremos al final de esta unidad que hay un conjunto de números mayor y que contiene a los números reales, aunque no se usará en este curso.

ACTIVIDADES

5. Dados los siguientes números, indicar a qué conjuntos numéricos pertenece cada uno, y si son racionales o irracionales:

a) $\frac{-4}{5}$; b) $4'777777\ldots$; c) $2'01001000100001\ldots$; d) $\sqrt{7}$; e) -81.

2.2. Propiedades de los números reales: operaciones y orden

A pesar de que desde que nos enseñaron los principios de la aritmética, siempre hemos pensado en cuatro operaciones entre números: suma, resta, multiplicación y división; realmente se puede considerar que sólo hay dos operaciones: suma y producto. La resta $5-3$, se puede considerar como la suma $5+(-3)$; y la división $\frac{6}{3}$, se puede considerar como el producto $6 \cdot \frac{1}{3}$.

Con respecto de la suma y el producto, los números reales verifican las propiedades que vamos a exponer a continuación que, aunque no conociésemos el nombre, ya usábamos de una manera natural:

Si a, b y c son números reales, entonces se verifican:

Asociativa. $a+(b+c) = (a+b)+c$. Esta propiedad nos indica que para sumar tres números reales, se pueden sumar (asociar) primero dos de ellos y después sumar el tercero, y es indiferente cuáles asociemos.

Conmutativa. $a+b = b+a$. Es decir, no importa el orden de la suma, el resultado es el mismo.

Existencia de elemento neutro. $a+0 = 0+a = 0$. Hay un número real, el 0, que sumado con cualquier otro, nos da siempre el otro número.

Existencia de elemento opuesto. $a + (-a) = 0$. Dado un número real cualquiera a, existe otro, el elemento opuesto $(-a)$ que, sumado con el anterior, produce el elemento neutro.

Con respecto del producto se cumplen las siguientes propiedades:

Asociativa. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Conmutativa. $a \cdot b = b \cdot a$.

Existencia de elemento neutro. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Tiene el mismo significado que en la suma, pero ahora es el número 1.

Existencia de elemento inverso. Dado un número a distinto de 0, existe otro, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, tal que $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$.

Por último, también hay una propiedad que involucra las dos operaciones y que sirve para “quitar paréntesis"que, sin duda, se ha utilizado ya en cursos anteriores. Se trata de la *propiedad distributiva*, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(No es importante recordar de memoria toda la lista de propiedades, sino utilizarlas con soltura a la hora de manejar números reales. Precisamente, aprender a manipular números y expresiones que representan números es uno de los objetivos fundamentales de este curso).

Además de las propiedades de los números con respecto de las operaciones hay otra característica importante de los números reales, se trata del concepto de orden. Los números reales se pueden ordenar en el sentido, de que dados dos números reales, o bien son iguales, o bien hay uno del que se puede decir que es mayor que el otro.

Esto se puede definir de la forma siguiente: como está claro cuándo un número real es positivo, cuando su expresión decimal lo es, dados dos números a y b,

$$b \geq a \Leftrightarrow b - a \geq 0,$$

que significa que b es mayor o igual que a, si y sólo si, la diferencia $b - a$ es mayor o igual que 0. También se podría haber establecido la relación de orden en términos de “$\leq$".

(El símbolo $\Leftrightarrow$ se lee “si y sólo si", se utiliza para expresar que dos afirmaciones son equivalentes y lo utilizaremos con cierta frecuencia a lo largo del curso, de hecho, ya lo hemos utilizado y seguro que se conoce de cursos anteriores.)

En la práctica no es necesario calcular ninguna diferencia, basta con comparar las expresiones decimales de los dos números. Por ejemplo, sabemos

$$8'98765 \leq 8'98873$$

porque la tercera cifra decimal del número de la derecha es mayor que la del número de la izquierda.

ACTIVIDADES

6. Calcular la expresión decimal de los siguientes números reales, utilizando una calculadora si es preciso, ordenarlos de mayor a menor:

$$\frac{-3}{4} \qquad \sqrt{3} \qquad 2\pi \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Con respecto de la relación de orden, se verifican las siguientes propiedades:

- $a \geq a$.
- Si $a \geq b$ y $b \geq a$, entonces $a = b$.
- Si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$.
- Si $a \geq b$, entonces $a + c \geq b + c$. Esta propiedad tendrá bastante importancia cuando estudiemos las inecuaciones.
- Si $a \geq b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c \geq b \cdot c$. Si c fuese negativo, entonces cambiaría el sentido de la desigualdad. También sobre esta propiedad volveremos cuando estudiemos las inecuaciones.

2.3. Redondeos y cálculos aproximados

Todos los números reales tienen una expresión decimal, que puede ser exacta, periódica o ninguna de las dos cosas, es decir, infinita y no periódica, como ocurre con los irracionales. Por esta razón, a la hora de hacer cálculos con ellos la forma decimal, en muchas ocasiones no podremos trabajar con el número exacto, sino con alguna aproximación. Por ejemplo, usamos la aproximación $3'14$ para el número π, pero no es su valor exacto, como todos sabemos.

Lo habitual es trabajar con **redondeos** de los números. Este concepto se hizo bastante popular con la implantación de la nueva moneda, ya que en algunos casos esos redondeos no se hacían siguiendo las reglas adecuadas, a veces por desconocimiento, y otras veces por razones de todos conocidas. Recordemos en qué consiste el redondeo.

Por ejemplo, los primeros decimales del número $\sqrt{2} = 1'4142135\ldots$. Queremos utilizar su valor aproximado redondeado al tercer decimal: el tercer decimal es un 4, miramos al cuarto:

- Si el cuarto decimal es 0, 1, 2, 3 ó 4; dejamos el tercero como está.

- Si el cuarto decimal es 5, 6, 7, 8 ó 9; aumentamos una unidad el tercer decimal.

Entonces, el número $\sqrt{2}$ redondeado al tercer decimal es $1'414$.

ACTIVIDADES

7. Escribir la expresión decimal de los siguientes números reales, redondeando a la segunda cifra decimal:

a) $\sqrt{3}$ b) 3π c) $\frac{1}{7}$.

2.4. Operaciones con radicales

El primer ejemplo de número irracional con el que nos hemos encontrado es $\sqrt{2}$. Estos números aparecerán con bastante frecuencia, por lo que resulta conveniente tener cierta soltura en su manipulación. Haremos aquí un pequeño repaso de las operaciones que se pueden hacer con los radicales.

Decimos que $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$. De la misma manera, decimos que $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$.

En general,

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

$\sqrt[n]{a} = b$ se lee *raíz enésima de a*.

n es un número natural, se llama **índice de la raíz**. (Cuando no aparece ningún número en el índice, entendemos que éste es 2.)

a es un número real llamado **radicando**. Si el índice de la raíz es par, el radicando sólo puede ser positivo. Si el índice de la raíz es impar, el radicando puede ser cualquier número.

La raíz enésima de un número también se puede escribir en forma de potencia. Por ejemplo,

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$$

Esto es así, porque $\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = 5$.

Por tanto, la raíz de una potencia se puede escribir como una potencia con exponente racional. Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$$

Propiedades de los radicales

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$. Es decir, para multiplicar dos radicales, deben tener el mismo índice. Por ejemplo,

  $$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$$

  Si los índices no son iguales, se pueden reducir a un índice común usando el *mínimo común múltiplo*. Por ejemplo, para calcular

  $$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{7}$$

  calculamos el mínimo común múltiplo de 3 y 5, que es 15. Ahora dividimos el mínimo entre cada índice y este resultado será el exponente de cada radicando,

  $$\sqrt[15]{4^5} \cdot \sqrt[15]{7^3} = \sqrt[15]{4^5 \cdot 7^3}$$

- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. Como en el caso del producto, para dividir radicales, éstos deben tener el mismo índice. Por ejemplo,

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}} = \sqrt[3]{2}$$

Y lo mismo que en el producto cuando los índices no son iguales.

- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$. Es decir, para hacer una raíz de una raíz, se multiplican los índices. Por ejemplo,

$$\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$$

A veces necesitamos conocer el valor aproximado de una raíz. Si se trata de una raíz cuadrada, no hay mayor problema, ya que suele haber una tecla específica en las calculadoras al efecto. Para calcular raíces de otros índices, debemos comprobar si nuestra calculadora dispone de la función $x^{\frac{1}{y}}$, que habitualmente se encuentra sobre la tecla de la multiplicación,

$$\overset{x^{\frac{1}{y}}}{\boxed{\times}}$$

Lo que quiere decir que, para utilizarla, hay que pulsar previamente la tecla $\boxed{\text{INV}}$ (o $\boxed{\text{SHIFT}}$, depende del modelo,) que se encuentra habitualmente en la parte superior izquierda, debajo de la pantalla.

Por ejemplo, queremos calcular $\sqrt[5]{7}$. Entonces, pulsamos la secuencia de teclas siguiente:

$$\boxed{7}\quad \boxed{\text{INV}}\quad \overset{x^{\frac{1}{y}}}{\boxed{\times}}\quad \boxed{5}\quad \boxed{=}$$

y obtenemos el resultado

$$1'475773162$$

con más o menos cifras decimales, dependiendo de la capacidad de la calculadora.

ACTIVIDADES

8. Efectuar las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{5}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[9]{5}}{\sqrt[27]{3}}$

d) $\sqrt{\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{2\sqrt[5]{2}}$

Recuerda

- ✓ Los *números reales*, $\mathbb{R}$, son los números racionales y los números irracionales. Se llaman irracionales a los números que no se pueden expresar como una fracción de dos números enteros.
- ✓ Los *números irracionales* tienen un desarrollo decimal infinito y no periódico.
- ✓ Las operaciones entre números reales, suma y producto, verifican una serie de propiedades naturales que nos permiten operar con ellos.
- ✓ El conjunto de los números reales se puede ordenar de manera que, dados dos números reales, o bien son iguales, o bien uno es mayor que otro.
- ✓ Con los números reales, en particular con los irracionales, no siempre se puede trabajar de una manera exacta, sino que es conveniente utilizar aproximaciones redondeadas de los números.
- ✓ Radicales:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

Propiedades de los radicales:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

- ✓ Cálculo de una raíz con una calculadora:

$$\sqrt[5]{7} \longrightarrow \boxed{7}\ \boxed{\text{INV}}\ \overset{x^{\frac{1}{y}}}{\boxed{\times}}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\quad 1'475773162$$

3. La recta real

Los números reales, al igual que los números racionales, también se pueden representar en una recta, la **recta real**. También ponemos los positivos a la derecha, los negativos a la izquierda. Los enteros y los racionales ocupan el mismo lugar, y los “huecos" que dejaban los racionales, se rellenan con los irracionales, de manera que se supone que los reales rellenan toda la recta.

La representación de los números irracionales no siempre es sencilla, algunas veces es imposible hacerlo exactamente, aunque hay algunos casos en que sí se puede hacer de una manera sencilla.

Por ejemplo, para representar en la recta el número $\sqrt{2}$ podemos utilizar el teorema de Pitágoras y dibujar un triángulo rectángulo con catetos 1 y 1, de manera que la longitud de la hipotenusa sea precisamente el número $\sqrt{2}$, como se indica en la gráfica

Los números reales, al igual que ocurría con los números racionales, también tie-

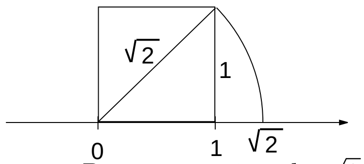


Figura 1.3: Representación de $\sqrt{2}$

nen la propiedad de *densidad*, es decir, entre cada dos números reales distintos r_1 y r_2 siempre podemos encontrar infinitos números reales. Aunque, a diferencia de los números racionales, los números reales no dejan huecos en la recta, en este sentido se dice que $\mathbb{R}$ es *completo*.

ACTIVIDADES

9. Representar en la recta real, utilizando el teorema de Pitágoras, los números reales:
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{8}$.

10. Encontrar dos números reales distintos entre cada par de los siguientes:
a) $2'3451$ y $2'3461$. b) $-3'125$ y $-3'124$.

3.1. Intervalos

Para describir conjuntos de números reales, resulta útil a veces expresarlos como trozos o segmentos de la recta, a estos trozos les llamamos *intervalos*, cuyos diferentes tipos describimos a continuación:

Intervalo cerrado. Por ejemplo, el intervalo $[3,5]$, son todos los números reales que hay entre 3 y 5, incluidos el 3 y el 5, es decir,

$$[3,5] = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 5\}$$

gráficamente, son los puntos de la figura 1.4.

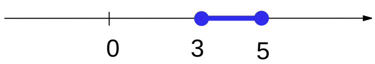


Figura 1.4: Intervalo cerrado $[3,5]$

La característica fundamental de un intervalo cerrado es que están incluidos sus extremos, lo cual indicamos en la figura con los puntos “rellenos” en el 3 y en el 5.

En general, el intervalo cerrado $[a,b]$ es el conjunto que se puede describir de la forma

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Intervalo abierto. Por ejemplo, $(2,4)$ son todos los números reales que hay entre 2 y 4, sin incluir los extremos, es decir,

$$(2,4) = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 4\}$$

gráficamente, son los puntos de la figura 1.5.

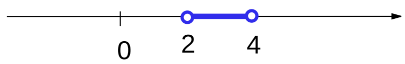


Figura 1.5: Intervalo abierto $(2, 4)$

La característica fundamental del intervalo abierto, es que no están incluidos los extremos, lo cual indicamos mediante los puntos “huecos” de la figura.

En general, el intervalo abierto (a, b) es el conjunto que se puede describir de la forma

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

También se pueden considerar intervalos que incluyan únicamente uno de los extremos. Por ejemplo, $(2, 3]$ en el que se incluye el 3, pero no el 2; el intervalo $[-3, 1)$ en el que se incluye el -3, pero no se incluye el 1, etc.

Incluso se pueden considerar intervalos de longitud infinita. Por ejemplo, $(-\infty, 3]$ son todos los números reales menores o iguales que 3, es decir,

$$(-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$$

gráficamente, son los puntos de la figura 1.6.

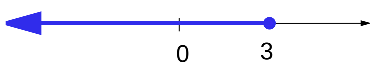


Figura 1.6: Intervalo $(-\infty, 3]$

Otro ejemplo, el intervalo $(2, +\infty)$ son todos los números reales mayores que 2 (sin incluir 2), es decir,

$$(2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\},$$

gráficamente, son los puntos de la figura 1.7

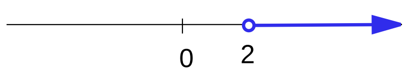


Figura 1.7: Intervalo $(2, +\infty)$

(Recordamos que ∞ es el símbolo que se utiliza para representar la idea de infinito, no es un número que se encuentre en la recta, por eso no lo incluimos en los intervalos. La propia recta real se puede expresar como el intervalo $(-\infty, +\infty)$.)

ACTIVIDADES

11. Expresar como intervalos los conjuntos de números reales x que verifican las siguientes condiciones:

a) $x \geq 0$ b) $-1 < x \leq 5$ c) $-3 < x < 3$ d) $4 \geq x$.

3.2. Valor absoluto, distancias y entornos

El **valor absoluto** de un número real x es el mayor entre x y $-x$, se denota $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$, $|-3| = 3$.

También se puede definir, de una forma más precisa,

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Lo que significa que cuando el número es negativo, le cambiamos de signo, y cuando es positivo, lo dejamos tal como está.

El valor absoluto verifica las siguientes propiedades:

Si a y b son números reales:

- $|a| \geq 0$, para cualquier número real a.
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$. Esta propiedad, que se llama desigualdad triangular, expresa que el valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos.

ACTIVIDADES

12. Describir los conjuntos de números reales x que verifican las siguientes condiciones, utilizando intervalos si es preciso:
a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| \geq 2$.

Una de las utilidades del valor absoluto es para expresar la idea de **distancia** entre dos números reales, la distancia entre los números reales a y b es la diferencia entre el mayor y el menor. Como no sabemos cuál de ellos es mayor, si restamos $b - a$ podríamos obtener un número positivo o negativo, pero las distancias han de ser siempre positivas, por esta razón, se define la distancia entre a y b como el número $|b - a|$.

Por ejemplo, la distancia entre -3 y 5 es $|5 - (-3)| = |8| = 8$, o bien, $|-3 - 5| = |-8| = 8$.

La distancia a su vez se puede utilizar para definir otro concepto que, si bien no utilizaremos con mucha frecuencia en este curso, resultará importante a la larga, se trata del concepto de **entorno de un punto**.

Se llama *entorno* de centro el número a y radio $r > 0$ al conjunto de números reales x, tales que la distancia de x al centro del entorno a, es menor que r. Simbólicamente,

$$E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}.$$

También se puede expresar directamente como el intervalo $(a - r, a + r)$.

ACTIVIDADES

13. Expresar en forma de intervalo el entorno de centro 4 y radio 3.

Recuerda

- ✓ Los números reales se pueden representar en una recta de la misma forma que hacíamos con los racionales, aunque con los números reales, los huecos que dejaban en la recta los racionales, los ocupan los irracionales. De manera que los reales siguen siendo *densos* y además *completos* en el sentido de que la recta real no tiene huecos.
- ✓ Diferentes tipos de intervalos de la recta real:

  Intervalo cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (se incluyen los extremos).

  Intervalo abierto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (no se incluyen los extremos).

  Intervalos de longitud infinita, por ejemplo, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$; $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$.
- ✓ El *valor absoluto* de x es $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
- ✓ La *distancia* entre los números a y b es $|b - a|$.
- ✓ Se llama *entorno* de centro el número a y radio $r > 0$ al conjunto de números reales x, tales que la distancia de x al centro del entorno a, es menor que r, es decir, $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$.

4. Números complejos

Como ya hemos dicho antes, los números reales son los que vamos a utilizar a lo largo de este curso. Pero no es el conjunto más grande de números que se utiliza en matemáticas. La razón para esta nueva ampliación del campo numérico es que hay ciertas operaciones que no se pueden llevar a cabo sólo con los números reales.

En una unidad posterior repasaremos cómo se resuelven las ecuaciones de segundo grado, sin embargo, seguro que recordamos cómo se puede resolver la ecuación

$$x^2 - 1 = 0.$$

Despejamos x^2; $x^2 = 1$. Ahora nos preguntamos qué número elevado al cuadrado, da como resultado 1. Hay dos números, $+1$ y -1, ya que $(+1)^2 = 1$ y $(-1)^2 = 1$. Decimos entonces que la ecuación tiene dos soluciones,

$$x = \pm 1.$$

De manera análoga, las soluciones de la ecuación $x^2 - 16 = 0$ son $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$.

La situación cambia completamente para el caso de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, haciendo las mismas operaciones que antes llegamos a $x^2 = -1$.

¿Cuál es el número real que elevado al cuadrado da 1? No hay ningún número real que satisfaga esta ecuación, porque no tiene sentido la operación $\sqrt{-1}$.

Al llegar a este punto, los matemáticos decidieron que si éste no era un número real, debería ser un número de otra clase, y decidieron llamar a este número con la letra i y de esta forma introdujeron lo que se llama **unidad imaginaria**, $i = \sqrt{-1}$.

Es decir, i es un cierto "número", no real, tal que $i^2 = -1$. Con esta unidad imaginaria, podemos expresar los números siguientes, que no tenían cabida en el conjunto de los números reales, $\sqrt{-4} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2i$.

Y tendremos números de la forma $3 + 4i$ que llamaremos **números complejos**. El conjunto de los números complejos está constituido por todas los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, se denota $\mathbb{C}$, es decir,

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Dado un número complejo $z = a + bi$; al número a se le llama **parte real** de z, y se escribe $\text{Re}(z) = a$; al número b se le llama **parte imaginaria** de z, y se escribe $\text{Im}(z) = b$.

Si $\text{Im}(z) = 0$, entonces el número $z = a + 0i$ es real, por tanto, los números reales están incluidos en los números complejos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Si $\text{Re}(z) = 0$, entonces el número $z = bi$ se dice que es un número **imaginario puro**.

ACTIVIDADES

14. Indicar si los siguientes números son reales, imaginarios puros o complejos en general:
a) $3 + \sqrt{3}$; b) $-3i$; c) πi; d) $3 + \sqrt{-1}$.

15. Expresar los siguientes números como complejos en términos de la unidad imaginaria i:
a) $\sqrt{-2}$; b) $2 + \sqrt{-16}$; c) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{-8}$.

16. Sabiendo que la fórmula para resolver una ecuación general de segundo grado $ax^2+bx+c = 0$ es $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, resolver las siguientes ecuaciones, expresando sus soluciones en forma de números complejos:
a) $x^2 + 5 = 0$; b) $x^2 - 4x + 13 = 0$; c) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

4.1. Operaciones con números complejos

Para hacer operaciones con números complejos no hay que hacer nada especial, la unidad imaginaria i hay que interpretarla como un número más, eso sí, un número que verifica $i^2 = -1$. Vamos a ir viendo mediante ejemplos las principales operaciones.

Suma

Queremos sumar los complejos $z_1 = 3+4i$ y $z_2 = -4+8i$, sólo tenemos que sumar parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria:

$$z_1 + z_2 = (3+4i) + (-4+8i) = -1+12i.$$

Producto

El producto de dos números complejos se hace como se haría el de dos binomios cualesquiera, pero teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. Por ejemplo, si queremos multiplicar $z_1 = 2+3i$ y $z_2 = 3-5i$,

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(3-5i) = 6-10i+9i-15i^2 = 6-10i+9i-15(-1) = 21-i.$$

Dado un número complejo $z = a+bi$, se llama **conjugado** de z al número complejo $\overline{z} = a-bi$. El producto de un complejo por su conjugado es:

$$z\cdot\overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-b^2\cdot i^2 = a^2+b^2.$$

Se llama **módulo** del número complejo $z = a+bi$ al número real

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Entonces, el producto anterior se puede reescribir de la forma

$$z\cdot\overline{z} = |z|^2.$$

División

Para dividir dos números complejos multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, de esta forma conseguimos que desaparezca i del denominador. Por ejemplo, queremos dividir $z_1 = 5+3i$ entre $z_2 = 8+7i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5+3i)}{(8+7i)}\cdot\frac{(8-7i)}{(8-7i)} = \frac{40-35i+24i-21i^2}{64+49} = \frac{61-11i}{113} = \frac{61}{113}-\frac{11}{113}i.$$

ACTIVIDADES

17. Dados los números complejos $z_1 = 2+3i$; $z_2 = -3+2i$ y $z_3 = 5i$, efectuar las operaciones indicadas a continuación:

a) $z_1+z_2-z_3$ b) $z_1\cdot z_2+z_3$ c) $z_1\cdot z_3$ d) $z_1+z_2\cdot z_3$.

18. Dados los números complejos $z_1 = 3-5i$; $z_2 = 1+7i$ y $z_3 = -i$, efectuar las operaciones indicadas a continuación ($\overline{z}$ significa conjugado de z):

a) $z_1\cdot\overline{z_2}$ b) $\overline{z_1\cdot z_3}$ c) $\dfrac{z_2}{z_1}+z_3$ d) $\overline{\dfrac{z_3}{z_2}}$.

Potencias de i

La potenciación en los números complejos es exactamente igual que en los números reales, salvo que las potencias de la unidad imaginaria presentan un comportamiento cíclico.

Calculamos algunas de ellas:

$i^0 = 1$, como en el caso de los números reales, cualquier número no nulo elevado a 0 es 1.

$i^1 = i$, también aquí ocurre como con los números reales.

$i^2 = -1$, por la definición de unidad imaginaria.

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$.

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$, y a partir de este momento empiezan a repetirse los resultados.

$i^5 = i$; $i^6 = -1$; $i^7 = -i$, etc.

Entonces, si queremos calcular una potencia alta de i, sólo hay que dividir entre cuatro y mirar el resto de la división. Por ejemplo, para calcular $i^{231} = i^3 = -i$, ya que 3 es el resto de la división de 231 entre 4.

También ocurre lo mismo cuando los exponentes son negativos.

ACTIVIDADES

19. Calcular: a) $(2i)^{10}$ b) i^{1002}.

Potencia de un número complejo

Como ya sabemos la forma de calcular las potencias de la unidad imaginaria, ya podemos calcular la potencia de cualquier número complejo. Por ejemplo, queremos calcular

$$(3 + 4i)^2$$

Utilizamos la fórmula del cuadrado de una suma, es decir,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

cambiando A por la parte real del complejo y B por la parte imaginaria, entonces,

$$(3 + 4i)^2 = 3^2 + 2{\cdot}3{\cdot}4i + (4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = 9 - 16 + 24i = -7 + 24i$$

En el caso de que las potencias sean mayores que 2, hay que fórmulas del desarrollo del **binomio de Newton**, esto es fórmulas para desarrollar $(A+B)^n$. Veamos de una manera práctica cómo se pueden obtener de una manera rápida estas fórmulas.

Por ejemplo, necesitamos obtener la fórmula correspondiente a $(A+B)^5$. Entonces, en primer lugar escribimos el *triángulo de Tartaglia* hasta su quinta fila. Recordemos que el triángulo de Tartaglia es el siguiente, en el que cada número se obtiene mediante la suma de los dos que están inmediatamente sobre él.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}$$

Los elementos de la quinta fila van a ser los coeficientes del desarrollo del binomio. Además, cada uno de ellos va ir multiplicado por los factores A y B, elevados cada uno de ellos a un exponente, según la siguiente regla: A se empieza elevando a 5 y se va disminuyendo hasta llegar a 0; B se empieza elevando a 0 y se va aumentando hasta llegar a 5. Así,

$$\begin{aligned}(A+B)^5 &= 1A^5B^0+5A^4B^1+10A^3B^2+10A^2B^3+5A^1B^4+1A^0B^5\\ &= A^5+5A^4B+10A^3B^2+10A^2B^3+5AB^4+B^5\end{aligned}$$

Ahora podemos utilizar esta fórmula para calcular, por ejemplo, $(1+i)^5$, sustituyendo A por 1 y B por i,

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= 1^5+5{\cdot}1^4{\cdot}i+10{\cdot}1^3{\cdot}i^2+10{\cdot}1^2{\cdot}i^3+5{\cdot}1{\cdot}i^4+i^5\\ &= 1+5i+10(-1)+10(-i)+5{\cdot}1+i=-4-4i.\end{aligned}$$

ACTIVIDADES

20. Calcular las siguientes potencias de números complejos:
a) $(2+i)^2$ b) $(2-i)^3$ c) $(1+2i)^4$

4.2. El plano complejo

Los números reales se pueden representar en una recta, sin embargo, los números complejos se representan en un plano, el **plano complejo**. La idea es representar cada complejo de la forma $z=a+bi$, como el punto de coordenadas (a,b). La parte real a se representa en el eje horizontal, llamado *eje real*; y la parte imaginaria b se representa en el eje vertical, que se llama por esta razón *eje imaginario* (ver figura 1.8). Al punto (a,b) se le llama **afijo** del número complejo z.

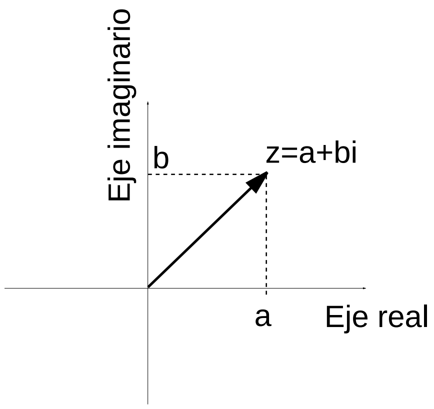


Figura 1.8: Plano complejo

ACTIVIDADES

21. ¿Dónde se encuentran los afijos de los números reales, es decir, de los complejos de la forma $z = a + 0i$?
¿Dónde se encuentran los afijos de los números imaginarios puros, es decir, de los complejos de la forma $z = 0 + bi$?

22. Dibujar en el plano complejo el afijo del número $z = 3 + 4i$.
- Calcular su módulo, ¿qué significado geométrico tiene el módulo en el dibujo?
- Calcular y dibujar su conjugado, ¿qué relación geométrica hay entre el afijo del número y el de su conjugado?

Recuerda

- ✓ Los *números complejos* son los números de la forma $a + bi$, donde $i = \sqrt{-1}$ es la *unidad imaginaria*. a es la *parte real* y b es la *parte imaginaria*.
- ✓ La suma y producto de complejos se hace como si se tratara de operaciones entre binomios de números reales, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.
- ✓ El *conjugado* del número complejo $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$. El *módulo* del número complejo $z = a + bi$ es el número $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- ✓ Para dividir dos números complejos se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.
- ✓ Las potencias de la unidad imaginaria toman los valores: $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; y a partir de aquí se repiten cada cuatro unidades del exponente. Utilizando las potencias de la unidad imaginaria y las fórmulas del desarrollo del binomio de Newton, se pueden calcular las potencias de exponente entero de cualquier número complejo.
- ✓ Los números complejos se represetan gráficamente sobre unos ejes coordenados que constituyen el *plano complejo*, dibujando su parte real a sobre el eje horizontal y su parte imaginaria b sobre el eje vertical.

2 Sucesiones y número e. Logaritmos

ÍNDICE DE CONTENIDOS

En esta unidad empezaremos a utilizar los números reales de una manera práctica. Los usaremos para entender el concepto de sucesión numérica. Una sucesión de números reales es una colección de infinitos números ordenados, por ejemplo, la sucesión de los números pares

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

En una sucesión nos va a interesar estudiar hacia dónde tienden los números de la misma, si se acercan a alguno en concreto, si crecen indefinidamente, o cualquier otro comportamiento. Este estudio es lo que denominaremos *cálculo de límites*. Como un ejemplo de un límite de una sucesión especial aparecerá el número e, de una importancia en Matemáticas comparable a la del número π. Y, por último, estudiaremos los logaritmos, que son la operación inversa de la potenciación, en los cuales aparecerá el número e, recién estudiado.

1. Sucesiones de números reales

El conjunto de los números pares,

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

es un ejemplo de **sucesión de números reales**. Una sucesión de números reales es un conjunto de infinitos números reales ordenados. Se llama **término** a cada uno de los números que la componen, y se denotan

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

(a_1 se lee "a sub 1", a_2 se lee "a sub 2", y así sucesivamente. Habitualmente, para simplificar la escritura, no usaremos las llaves.)

De manera que, en el ejemplo de los números pares, $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$; etc. El término que ocupa el *enésimo* lugar, es decir, el lugar n, se llama **término general** de la sucesión, es la fórmula que nos permite calcular el valor de un término cualquiera de la sucesión. Por ejemplo, en el ejemplo anterior, el término general es

$$a_n = 2n$$

A partir del término general, se puede calcular cualquier término de la sucesión sin más que sustituir el valor correspondiente en n. Por ejemplo, el término que ocupa el lugar décimo,

$$a_{10} = 2 \cdot 10 = 20$$

Otros ejemplos:

- Los cuatro primeros términos de la sucesión de término general $a_n = 3n + 1$ se obtienen dando a n los valores 1, 2, 3 y 4:

$$4, 7, 10, 13, \dots$$

- Los primeros términos de la sucesión de término general $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$ son

$$\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \dots$$

que simplificados, son

$$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \dots$$

- Los primeros términos de la sucesión $a_n = n^2 - 1$ son

$$0, 3, 8, 15, \dots$$

ACTIVIDADES

1. Calcular los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

a) $a_n = -2n + 1$ b) $b_n = 2n^3$ c) $c_n = \dfrac{n^2}{n+2}$ d) $d_n = 3^n$ e) $e_n = (-1)^n$

Un problema más complicado en general, es el de determinar cuál es el término general, conociendo los primeros términos de la sucesión. No obstante, como vamos a ver a continuación, hay algunas sucesiones concretas para las que puede resultar más sencillo porque se puede utilizar una fórmula, esto ocurre así para las *progresiones aritméticas y geométricas* que vamos a estudiar a continuación.

1.1. Progresiones aritméticas y geométricas

Vamos a estudiar ahora dos ejemplos importantes de sucesiones que aparecen con cierta frecuencia: las progresiones aritméticas y las geométricas.

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir del anterior, sumándole una cantidad fija que llamamos *diferencia*.

Por ejemplo, la sucesión de términos

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

es una progresión aritmética en la que la diferencia es 2.

La sucesión de términos

$$3, 1, -1, -3, -5, \ldots$$

es una progresión aritmética en la que la diferencia es -2.

Si el primer término de una progresión aritmética es a_1 y su diferencia es d, se pueden calcular todos los términos de la sucesión. Por ejemplo, su segundo término se puede calcular de la forma siguiente:

$$a_2 = a_1 + d;$$

su tercer término,

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$

su cuarto término,

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d;$$

y, en general, el término *enésimo* de una progresión aritmética es

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Esta fórmula nos puede resultar útil para calcular la fórmula del término general de una progresión aritmética o el de una sucesión en la que aparezcan progresiones aritméticas. Por ejemplo, la sucesión cuyos primeros términos son:

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{9}, \frac{7}{13}, \frac{9}{17}, \ldots$$

no es una progresión aritmética, pero su numerador y su denominador si lo son. El numerador es una progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 3$ y su diferencia es $d = 2$, entonces su término general es $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$. El denominador es una progresión aritmética cuyo primer término es $b_1 = 5$ y su diferencia es $d = 4$, entonces su término general es $b_n = 5 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 1$. Entonces, el término general de la sucesión inicial es

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2n+1}{4n+1}$$

ACTIVIDADES

2. Calcular el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son los siguientes, en las que aparecen involucradas progresiones aritméticas:

a) $10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots$ b) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$ c) $\frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{10}, \frac{10}{13}, \ldots$

Recordamos también aquí, aunque no vamos a hacer uso de ella, la fórmula para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir del anterior, multiplicándolo por una cantidad fija que llamamos *razón*.

Por ejemplo, la sucesión de términos

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

es una progresión geométrica de razón $r = 2$.

La sucesión de términos

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$$

es una progresión geométrica cuya razón es $r = \frac{1}{3}$.

Para tener completamente determinada una progresión geométrica sólo es necesario conocer el primer término a_1 y la razón, los demás se pueden calcular a partir de ellos. El segundo término se calcula

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

el tercer término se calcula

$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$

el cuarto término se calcula

$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

y, en general, el término enésimo se calcula mediante la expresión

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Por ejemplo, el término general de la progresión geométrica cuyos primeros términos son

$$3, 9, 27, 81, \ldots$$

es

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

ACTIVIDADES

3. Calcular el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son los siguientes:

a) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ b) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$ c) $2, -4, 16, -32, 64, \ldots$

También aquí recordamos la fórmula para sumar los n primeros términos de una progresión geométrica, que es

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$$

1.2. Límite de una sucesión

La sucesión de término general $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ tiene por primeros términos los siguientes:

$$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \ldots .$$

Si calculamos términos con valores altos de n en la sucesión anterior, observamos cómo los términos van aproximándose cada vez más al número 2, por ejemplo,

$$a_{100} = 1'98; \qquad a_{1000} = 1'998; \qquad a_{1000000} = 1'999998$$

Por esta razón decimos que el *límite* de la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es 2, cuando n tiende a ∞, y lo escribimos,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

En general,

el **límite de la sucesión** a_n, cuando n tiende a ∞, es el número L, si a_n está próximo a L siempre que n sea lo suficientemente grande. En cuyo caso, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Cuando una sucesión tiene límite decimos que es una sucesión **convergente**. Si no tiene límite, decimos que es una sucesión **divergente**.

Por ejemplo, la sucesión de término general $a_n = n^2$ no tiene límite, ya que a medida que n aumenta, los valores de a_n no se aproximan hacia ningún número, sino que aumentan indefinidamente. En este caso escribimos, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2) = +\infty$, aunque decimos que la sucesión es *divergente*.

También se puede tener una sucesión divergente, sin que tienda a infinito. Por ejemplo, la sucesión de término general $a_n = (-1)^n$, cuyos primeros términos son

$$-1, 1, -1, 1, -1, ...,$$

también es divergente, ya que no se aproxima hacia ningún número, sino que alterna sus valores entre -1 y 1.

De hecho se verifica la siguiente propiedad importante:

El límite de una sucesión, si existe, es único.

ACTIVIDADES

4. Indicar si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes intentando calcular sus límites mediante el cálculo de términos con valores grandes de n:

a) $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$ b) $b_n = 3n + 2$ c) $c_n = \dfrac{1}{n}$

En la sucesión de términos,

$$1, 3, 5, 7, 8, ...;$$

cada término es menor o igual que el siguiente, por esta razón se dice que es una sucesión **creciente**.

En la sucesión de términos

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...;$$

cada término es mayor o igual que el siguiente, por lo que se dice que es una sucesión **decreciente**.

En general, diremos que:

La sucesión a_n es *creciente*, si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n.
La sucesión a_n es *decreciente*, si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.

Se dice que una sucesión es **monótona**, si es creciente o decreciente.

ACTIVIDADES

5. Indicar si las siguientes sucesiones son o no monótonas, calculando para ello los primeros términos de cada una de ellas:

a) $a_n = 2n + 3$ b) $b_n = \dfrac{2}{n}$ c) $c_n = (-2)^n$ d) $d_n = \dfrac{n^2+1}{n}$

Todos los términos de la sucesión $a_n = 2n+1$, son mayores o iguales que 3, porque los primeros son

$$3, 5, 7, ...;$$

por lo que se dice que la sucesión está **acotada inferiormente** por el número 3, este número una *cota inferior* de a_n.

Los términos de la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, son menores o iguales que 1, ya que el denominador es siempre mayor que el numerador, por lo que se dice que la sucesión está **acotada superiormente** por el número 1, y a este número se le llama *cota superior* de la sucesión.

En general, diremos que:

> La sucesión a_n es *acotada superiormente*, si $a_n \leq K$, para todo n. Se dice que K es una *cota superior* de a_n.
>
> La sucesión a_n es *acotada inferiormente*, si $M \leq a_n$, para todo n. Se dice que M es una *cota inferior* de a_n.
>
> Se dice que una sucesión está *acotada*, si lo está superior e inferiormente.

Se tiene el siguiente resultado importante que relaciona monotonía, acotación y convergencia de una sucesión:

> Si una sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, entonces es convergente.
>
> De manera análoga, si una sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces también es convergente.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ es convergente, porque es monótona decreciente, ya que $a_n = \dfrac{1}{n+1} \geq \dfrac{1}{n+2} = a_{n+1}$, para todo n y además, es acotada inferiormente, ya que $\dfrac{1}{2} \leq a_n$, para todo n. Entonces, la sucesión es convergente, es decir, tiene límite. Aunque no sepamos cuál es.

ACTIVIDADES

6. Estudiar la acotación de las siguientes sucesiones, calculando algunos términos de la sucesión:

a) $a_n = \dfrac{n}{4n+1}$ b) $b_n = 1 + n^2$ c) $c_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ d) $d_n = \dfrac{-2}{n+1}$

Recuerda

- ✓ Una *sucesión de números reales* es un conjunto de infinitos números reales ordenados.

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$$

a_n es la fórmula que sirve para calcular cualquier término de la sucesión, se llama *término general*.

- ✓ Una *progresión aritmética* es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir del anterior, sumándole una cantidad fija que llamamos *diferencia*, d. Su término general se calcula con la fórmula

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

- ✓ Una *progresión geométrica* es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir del anterior, multiplicándolo por una cantidad fija que llamamos *razón*, r. Su término general se calcula con la fórmula

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

- ✓ El *límite de la sucesión* a_n, cuando n tiende a ∞, es el número L, si a_n está próximo a L siempre que n sea lo suficientemente grande. Se escribe,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Cuando una sucesión tiene límite, se dice que es *convergente*. Si no tiene límite, se dice que es *divergente*.

El límite de una sucesión, si existe, es único.

- ✓ Una sucesión en la que cada término es mayor o igual que el siguiente, es una sucesión *decreciente*. Es *creciente*, si cada término es menor o igual que el siguiente.

Una sucesión es *acotada inferiormente*, si hay algún número menor o igual que todos los elementos de la sucesión. Es *acotada superiormente*, si hay algún número mayor o igual que todos los de la sucesión.

- ✓ Una sucesión acotada superiormente y creciente, converge. Si está acotada inferiormente y es decreciente, también es convergente.

2. Cálculo de límites

El cálculo del límite de una sucesión se puede hacer calculando valores de términos con n grande, sin embargo, en la práctica este procedimiento puede resultar largo e inexacto. Vamos a ver ahora cómo se pueden calcular límites de sucesiones utilizando algunas propiedades que verifican.

2.1. Operaciones con límites. Indeterminaciones

El límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2n}{n+3}\right)$$

se puede calcular sumando los dos sumandos que aparecen en el término general de la sucesión,

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2n}{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+9}{n+3}\right)=5$$

ya que es 5 el número al que se aproximan los valores de a_n para valores de n suficientemente grandes.

Ahora bien, si calculamos los límites de los sumandos por separado,

$$\lim_{n\to\infty}(3)=3 \text{ (porque es una sucesión constante.)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)=2 \text{ (dando valores grandes a } n\text{.)}$$

Vemos que el resultado de la suma de estos dos límites coincide con el límite de la suma. Esto mismo ocurre con el resto de las operaciones aritméticas. En particular, se pueden realizar las siguientes operaciones entre límites:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, siendo A y B números (finitos), entonces:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.
- $\lim_{n\to\infty}(k\cdot a_n) = k\cdot A$, donde k es una constante cualquiera.
- $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = A\cdot B$.
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, si $B\neq 0$ y $b_n\neq 0$, para todo n.
- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = A^B$, si A y B no son ambos nulos.

Si sumamos o multiplicamos dos sucesiones que tienden a ∞, entonces el resultado también tiende a ∞, lo que significa que,

$$\infty+\infty=\infty \qquad \infty\cdot\infty=\infty$$

Ahora bien, si dividimos dos sucesiones que tienden a ∞, el resultado puede ser cualquier cosa. Por ejemplo, las sucesiones siguientes está formadas por cocientes en los que numerador y denominador tienden ambos a $+\infty$, sin embargo, los resultados de los límites de los cocientes, después de simplificar, son distintos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2}=2 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}(n)=+\infty$$

Por esta razón, decimos que $\frac{\infty}{\infty}$ es una **indeterminación**. Es decir, se trata de una operación entre límites que puede dar lugar a diferentes resultados. Cuando aparece una indeterminación, al calcular un límite, tendremos que hacer operaciones, hasta que ésta desaparezca.

Hay siete indeterminaciones, algunas de ellas aparecerán en este curso y algunas otras en el curso próximo. Son las siguientes:

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \infty-\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \infty\cdot 0 \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Es importante señalar que el hecho de que aparezcan indeterminaciones no está directamente relacionado con que aparezca el *infinito*. De hecho, puede haber operaciones (entre límites) en las que haya infinitos y que no sean indeterminadas. Además del ejemplo con el que hemos empezado a hablar de las indeterminaciones, incluimos a continuación unos ejemplos de operaciones en las que, si bien interviene ∞, no son indeterminadas:

$$\infty+\infty=\infty \qquad \infty+4=\infty \qquad \infty\cdot\infty=\infty \qquad \infty^{\infty}=\infty \qquad \infty^{-\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$5\cdot\infty=+\infty \qquad (-6)\cdot\infty=-\infty \qquad \frac{7}{\infty}=0 \qquad \infty^9=\infty \qquad \infty^{-2}=\frac{1}{\infty}=0$$

No conviene memorizar estas operaciones, ya que los resultados son bastante lógicos y se irán aprendiendo a medida que se utilicen.

ACTIVIDADES

7. Sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=3$; $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=0$; calcular los siguientes límites de sucesiones cuando sean determinados, e indicar la indeterminación correspondiente en otro caso:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^{d_n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{d_n}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{d_n}{a_n}\right)$

2.2. Reglas prácticas para el cálculo de límites

Calcular un límite de una sucesión, salvo que el límite sea determinado, consiste en intentar deshacer la indeterminación que aparezca. Vamos a ir analizando, mediante ejemplos, la manera de manipular las indeterminaciones.

• **Límite de un polinomio**

El límite de un polinomio es $\pm\infty$, dependiendo del signo del coeficiente de mayor grado. Por ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty}(3n^2+3n-1)=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(-4n^3+5n^2-3n-10)=-\infty$$

La razón es que cuando n toma valores grandes, el valor del primer sumando siempre es de un orden de magnitud mucho mayor que los de los demás y se impone a éstos. Por lo que sólo importa el signo de su coeficiente.

• **Límite de una constante entre un polinomio**
Empecemos con el límite siguiente, que ya ha aparecido antes,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Porque, si calculamos valores de $a_n=\dfrac{1}{n}$ para n grande, obtenemos

$$a_{10}=0'1 \qquad a_{100}=0'01 \qquad a_{1000}=0'001, \text{ etc.;}$$

que son valores cada vez más próximos a 0.

Exactamente lo mismo ocurrirá si ponemos cualquier otra constante y cualquier otro polinomio, por ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3n^2+n-2}=0.$$

Ya que el polinomio siempre tiende a $\pm\infty$.

ACTIVIDADES

8. Calcular los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n^3+4n^2-3)$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^2+\frac{3}{n^2+3}\right)$

• **Cociente de polinomios. Indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$**

Por ejemplo, queremos calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-5n+6}{n^2+2n+5}$$

Tenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, que se puede deshacer dividiendo numerador y denominador por la n de mayor grado.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-5n+6}{n^2+2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5n^2}{n^2}-\dfrac{5n}{n^2}+\dfrac{6}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2n}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\dfrac{5}{n}+\dfrac{6}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{5}{n^2}}=\frac{5-0+0}{1+0+0}=\frac{5}{1}=5$$

En general, se cumple

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{cx^m+dx^{m-1}+\dots}=\begin{cases}\dfrac{a}{c} & \text{si } n=m\\ 0 & \text{si } n<m\\ \pm\infty & \text{si } n>m\end{cases}$$

(En el caso $n > m$ el signo del ∞ depende del signo de $\frac{a}{c}$).

Este mismo procedimiento se puede aplicar incluso cuando no son polinomios el numerador y el denominador. Por ejemplo, para calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n}+2n^2}{3n^2-5n+1}.$$

Para deshacer aquí la indeterminación, dividimos numerador y denominador por n^2, aunque para dividir dentro de la raíz habrá que elevar al cuadrado y, por tanto, dividir por n^4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n}+2n^2}{3n^2-5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n^4}{n^4}+\frac{3n}{n^4}}+\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{5n}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^3}}+2}{3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{1+0}+2}{3-0+0} = \frac{3}{3} = 1$$

ACTIVIDADES

9. Calcular los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-3n}{2n^3+5n^2-3n+2}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{2n^3-3n+10}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{3n-3}$

- **Diferencia de expresiones irracionales. Indeterminación $\infty - \infty$**

Por ejemplo, queremos calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$$

Ahora tenemos una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, que se puede deshacer multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2-2}\right)}{\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2-2}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2-2}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}, \text{ dividimos por } n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{3}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}} = \frac{\infty+0}{\sqrt{2+0}+\sqrt{1-0}} = +\infty\end{aligned}$$

También es posible que aparezca la indeterminación $\infty - \infty$ en una diferencia de dos cocientes de polinomios que tiendan ambos (los cocientes) a ∞. En este caso, basta con restar las dos fracciones, de manera que aparezca un único cociente y proceder como en el caso de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

ACTIVIDADES

10. Calcular los límites con expresiones irracionales:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n-3}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2 - n} - n\right)$

Recuerda

✓ Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, siendo A y B números (finitos), entonces:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot A$, donde k es una constante cualquiera.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{A}{B}$, si $B \neq 0$ y $b_n \neq 0$, para todo n.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = A^B$, si A y B no son ambos nulos.

✓ *Indeterminación*: $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\infty - \infty$ $\dfrac{0}{0}$ $\infty \cdot 0$ 1^∞ 0^0 ∞^0

✓ Reglas prácticas para calcular límites:

- El límite de un polinomio es $\pm\infty$.
- El límite de una constante entre un polinomio es 0.
- El límite de un cociente de polinomios se calcula dividiendo numerador y denominador por la n de mayor grado.
- El límite de una diferencia de raíces se calcula multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión.

3. Número e

3.1. Definición

Consideremos la sucesión $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

El límite de la base,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$$

y el límite del exponente es ∞. Sin embargo, vamos a ver que 1^∞ no es igual a 1, como puediera parecer a simple vista.

Para ello calculemos algunos valores de a_n,

n	1	2	3	4	10	100	1000	10000	1000000
a_n	2	2'25	2'37037	2'4414	2'59374	2'70481	2'71692	2'71814	2.71828

En la tabla anterior, observamos que los valores se van aproximando hacia un número, menor que 3. Este número se denomina el **número e**, que se define precisamente como el límite de la sucesión anterior,

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

y su valor aproximado es

$$\boldsymbol{e = 2'718281828459\ldots}$$

Es un número de suma importancia en matemáticas, comparable a la importancia del número π. Se puede demostrar que es irracional, es decir, que no se puede expresar como una fracción entre números enteros.

También se puede obtener el número e como el límite de cualquier sucesión de la forma

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

3.2. Cálculo de límites con indeterminación 1^∞

Todas las sucesiones en las que aparece la indeterminación 1^∞ están relacionadas con el número e. La manera de calcularlas consiste en intentar escribir el límite de manera que aparezca como un límite de la forma anterior.

Veamos un ejemplo. Queremos calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(n) = \infty$, estamos ante una indeterminación del tipo 1^∞. Una manera de calcular este límite consiste en hacer transformaciones hasta expresarlo de la forma $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n}$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$. Este límite es también el número e, como hemos comentado antes.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n-2}-1\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n-2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n-2}{3}\right)}\right)^{\left(\frac{n-2}{3}\right)\cdot n\cdot\left(\frac{3}{n-2}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n-2}} = e^3
\end{aligned}$$

Otra forma de calcular los límites con indeterminación 1^∞ es utilizar directamente la fórmula siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1)\cdot b_n}$$

Esta fórmula se puede deducir utilizando argumentos similares a los usados en el ejemplo anterior.

Es importante destacar que el uso de la fórmula anterior o las operaciones descritas en el ejemplo, están condicionadas a que la indeterminación sea del tipo 1^∞. En otros casos de potencias, el límite puede resultar mucho más sencillo de calcular. Por ejemplo, el siguiente límite no es indeterminado:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n+3}\right)^n = \infty^\infty = \infty$$

ACTIVIDADES

11. Calcular los límites de las siguientes sucesiones en forma de potencia:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n^2+3}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3-6n}{2n^3-5}\right)^{3n}$

Recuerda

- ✓ El *número* e es el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

su valor aproximado es

$$e = 2'718281828459...$$

- ✓ También es el número e cualquier límite de la forma

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

- ✓ Para calcular límites de sucesiones en forma de potencia con indeterminación 1^∞, se puede convertir el límite en uno que tenga la forma que se ha descrito antes, o bien, se puede utilizar la fórmula siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1)\cdot b_n}$$

4. Logaritmos

4.1. Potencias

Suponemos que el alumno ya está familiarizado con el uso de las potencias. No obstante, vamos a incluir aquí un pequeño repaso de los conceptos fundamentales.

Por ejemplo,

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Una potencia se puede entender como una abreviatura de un producto de un número por sí mismo. En el ejemplo 4^3, 4 es la base de la potencia y 3 es el exponente.

Las potencias verifican las siguientes propiedades:

Si $a > 0$ y p, q son números cualesquiera, entonces:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$
- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
- $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

Además, si m, n son números enteros, una potencia se puede convertir en una raíz mediante la siguiente relación

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Por tanto, todas las propiedades que verifican las potencias también las cumplen las raíces.

4.2. Definición de logaritmo. Propiedades

Un **logaritmo** es la operación inversa de una potencia. Por ejemplo, si $5^2 = 25$, diremos que el logaritmo en base 5 de 25 es 2, es decir, el logaritmo de un número es el exponente que al que hay que elevar la base para que resulte tal número. Esto que parece un trabalenguas quizá quede más claro en la siguiente definición:

$$\boxed{\boldsymbol{a^p = b \Leftrightarrow \log_a b = p}}$$

donde $a > 0$.

Por ejemplo; $\log_5 25 = 2$, porque $5^2 = 25$; $\log_3 81 = 4$, porque, $3^4 = 81$; etc.

Debido a la relación entre los logaritmos y las potencias, todas las propiedades de éstas se traducen en propiedades de los logaritmos, que vamos a estudiar a continuación mediante ejemplos.

En primer lugar, observemos que sólo existen logaritmos de números positivos, por ejemplo, $\log_3(-3)$ no existe porque no hay ningún número al que se pueda elevar 3 para que resulte -3.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a 1 = 0}}$$

Por ejemplo, $\log_4 1 = 0$, porque $4^0 = 1$.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a a = 1}}$$

Por ejemplo, $\log_5 5 = 1$, porque $5^1 = 5$.

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}}$$

Por ejemplo,

$$\log_2(4 \cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16.$$

En efecto; por una parte $\log_2(4 \cdot 16) = \log_2 64 = 6$; y por otra, $\log_2 4 = 2$ y $\log_2 16 = 4$.

$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

Por ejemplo,

$$\log_3\left(\frac{243}{9}\right) = \log_3 243 - \log_3 9$$

Ya que, $\log_3\left(\dfrac{243}{9}\right) = \log_3 27 = 3$ y, por otra parte; $\log_3 243 = 5$ y $\log_3 9 = 2$.

$$\boldsymbol{\log_a x^p = p \cdot \log_a x}$$

Por ejemplo,

$$\log_2 8^3 = \log_2 8 \cdot \log_2 8 \cdot \log_2 8 = 3 \cdot \log_2 8$$

Esta última propiedad se puede aplicar también al caso de una raíz, por ejemplo,

$$\log_2 \sqrt{8} = \log_2 8^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 8 = \frac{3}{2}$$

ACTIVIDADES

12. Calcular el valor de los siguientes logaritmos haciendo uso de las propiedades adecuadas para simplificarlos:

a) $\log_2 \sqrt{32}$ b) $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right)$ c) $\log_5\left(\dfrac{1}{5} \cdot 5^{-8}\right)$ d) $\log_6 1$ e) $\log_7\left(\dfrac{14}{2}\right)$

4.3. Fórmula del cambio de base

Hasta ahora los ejemplos que hemos hecho siempre se han podido calcular sin ayuda de calculadora, porque eran exactos. Sin embargo, algunos logaritmos no se pueden calcular de forma exacta. Por ejemplo, $\log_2 3$. Es evidente que el número al que hay que elevar 2 para que dé 3, es algún número entre 1 y 2, ya que 3, está entre 2 y 4. Para calcular este logaritmo hay que utilizar una calculadora.

Sin embargo, la calculadora sólo posee dos teclas que permiten calcular logaritmos de dos bases concretas:

Por una parte está la tecla $\boxed{\log}$ que permite calcular logaritmos en base 10. Por ejemplo, para calcular $\log_{10} 7$, pulsamos 7 y a continuación $\boxed{\log}$ y obtenemos,

$$\log_{10} 7 = 0'84509804...$$

Los logaritmos en base 10, se llaman **logaritmos decimales**, a veces se denotan $\log 7$, sin especificar la base, aunque puede resultar una notación confusa y creemos recomendable utilizar $\log_{10}$.

La otra tecla, que suele encontrarse al lado de la anterior, es $\boxed{\ln}$. Esta tecla sirve para calcular logaritmos en los que la base es el número e. Estos logaritmos, que se llaman **logaritmos neperianos** o *logaritmos naturales* se denotan $\ln 7 = \log_e 7$. Por ejemplo, podemos comprobar con la calculadora que $\ln 7 = 1'945910149...$

Nota: En los libros de matemática superior se utiliza indistintamente $\ln(x)$ o $\log(x)$ para referirse a los logaritmos neperianos, por esta razón la utilización de la notación $\log x$ puede resultar confusa para referirse a los logaritmos decimales y es preferible usar $\log_{10} x$. No obstante, lo importante es no confundirse y se puede usar cualquier notación siempre y cuando sepamos de qué estamos hablando.

Entonces, tenemos dos teclas en nuestra calculadora, una para los logaritmos decimales y otra para los logaritmos neperianos (base el número e), pero, ¿qué podemos hacer para calcular $\log_2 3$? Pues necesitamos expresar este logaritmo en alguna de las dos bases de la calculadora.

Veamos cómo hacerlo. Queremos calcular $x = \log_2 3$ lo que equivale, en forma de potencia, a la expresión $2^x = 3$.

Entonces, tomando logaritmos neperianos, se verifica $\ln 2^x = \ln 3$ y, utilizando las propiedades de los logaritmos, se puede escribir $x \cdot \ln 2 = \ln 3$.

Por último, despejando x, obtenemos

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1'584962501$$

Hemos comprobado entonces, que

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Si hubiésemos utilizado logaritmos decimales, habríamos llegado a

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

En general, se verifica

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}}$$

Que es la fórmula que sirve para cambiar de base un logaritmo, con el objeto de poder calcularlo mediante la calculadora. Por supuesto, esta fórmula se puede usar también para cambiar a cualquier otra base, aunque evidentemente estas dos bases, 10 y e, son las bases a las que se suele cambiar, ya que son las únicas que aparecen en las calculadoras.

ACTIVIDADES

13. Calcular los siguientes logaritmos, utilizando la fórmula del cambio de base y la calculadora:
a) $\log_3 7$ b) $\log_{0'3} 4$ c) $\log_9 12'3$

14. Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones:
a) $3^x = 5$ b) $8^x = 5$ c) $10^x = 0'7$

Recuerda

✓ Propiedades de las potencias:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$
- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
- $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
- $(a^p)^q = a^{p\cdot q}$
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

✓ Un *logaritmo* es la operación inversa de una potencia.

$$a^p = b \Leftrightarrow \log_a b = p$$

donde $a > 0$.

✓ Propiedades de los logaritmos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$

✓ Fórmula del cambio de base:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

3 Ecuaciones e inecuaciones

ÍNDICE DE CONTENIDOS

La resolución de ecuaciones constituye el problema central de la parte de las matemáticas que denominamos Álgebra. En este unidad repasaremos las técnicas para resolver las ecuaciones de primer y segundo grado, ya estudiadas en cursos anteriores, y aprenderemos a resolver otro tipo de ecuaciones: exponenciales y logarítmicas. También veremos cómo se pueden resolver inecuaciones, que son otro tipo de problemas en los que, en lugar de una igualdad como ocurre en las ecuaciones, tenemos una desigualdad. Para acabar, repasaremos las técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales (de primer grado) y estudiaremos una técnica nueva, útil cuando el número de ecuaciones e incógnitas del sistema es superior a dos, el llamado método de Gauss.

1. Ecuaciones de primer y segundo grado

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparece una letra que representa un número que queremos calcular, llamada incógnita. Por ejemplo, en la ecuación

$$x + 3 = 4$$

la incógnita es x. Esta ecuación nos dice que x es un número que, sumado con 3, es igual a 4.

Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita.

1.1. Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** es cualquier ecuación que se puede reducir a la forma

$$ax = b$$

En otras palabras, es una ecuación en la que la incógnita aparece elevada a 1. Por ejemplo, son ecuaciones de primer grado las siguientes:

$$3x + 5 = 7; \qquad 3(x + 2) - 3 = 5x + 7; \qquad \frac{x}{2} + 3 = -2(x - 2)$$

Vamos a ir recordando mediante ejemplos cómo se pueden resolver las ecuaciones de primer grado:

- Por ejemplo, la ecuación

  $$2x - 4 = -3x + x + 10$$

  Agrupamos los términos en x en uno de los miembros y los que no llevan x en el otro,

  $$2x + 3x - x = 10 + 4,$$

  entonces,

  $$4x = 14$$

  La solución es un número que multiplicado por 4, dé 14, que se obtiene dividiendo 14 entre 4,

  $$x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

- Si la ecuación contiene paréntesis, quitaremos éstos en primer lugar, para tener una ecuación como la anterior. Por ejemplo,

  $$2(x - 2) - 3(x + 1) = 2 + 3(x - 1),$$

  quitamos los paréntesis,

  $$2x - 4 - 3x - 3 = 2 + 3x - 3,$$

separamos los términos en x y los independientes,

$$2x-3x-3x=2-3+4+3 \Leftrightarrow -4x=6,$$

ahora, podemos cambiar de signo a la ecuación para que la x quede positiva (aunque no es imprescindible) y despejamos el valor de x,

$$4x=-6 \Leftrightarrow x=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$$

- Si la ecuación contiene denominadores, éstos se eliminan utilizando el *mínimo común múltiplo*. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{x+2}{3}-\frac{x-2}{5}=3+\frac{2x-1}{30}$$

El mínimo común múltiplo de 3, 5 y 30 es 30. Dividimos 30 entre cada denominador y multiplicamos el resultado por el numerador. Cuando algún término no lleve denominador, consideramos que es 1.

$$10(x+2)-6(x-2)=90+2x-1,$$

y ya estamos en la situación del ejemplo anterior. Eliminamos los paréntesis, agrupamos términos y despejamos x,

$$10x+20-6x+12=90+2x-1 \Leftrightarrow 2x=57 \Leftrightarrow x=\frac{57}{2}$$

ACTIVIDADES

1. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $2x+1=5$ b) $2x+3=5-2x$ c) $3(2x-3)+4x=5(x+4)-9$

d) $5(x-2)=5x+9$ e) $5(x-2)=5x-10$ f) $\frac{x}{2}+3=5x$

g) $2(x-1)+\frac{x+1}{2}=\frac{2x-7}{4}$ h) $\frac{3x+5}{6}-\frac{5x+4}{9}=1-\frac{x}{18}$

Una de las aplicaciones inmediatas de las ecuaciones de primer grado es la de resolver problemas. La resolución de problemas mediante ecuaciones, y la resolución de problemas en general, son la parte más complicada de las matemáticas. No hay reglas que sirvan para todos los casos. El único secreto está en intentar resolver muchos, aun de esta forma siempre tropezaremos con alguno que, simplemente no salga.

Empecemos con un ejemplo de los clásicos: *Un padre tiene 37 años, y las edades de sus tres hijos suman 25 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que las edades de los hijos sumen como la edad del padre?*

Nos preguntan por los años que han de transcurrir para que ocurra alguna cosa. Esta va a ser la incógnita, $x=$ años que han de transcurrir.

El padre tiene ahora, 37 años. Dentro de x años tendrá

$$37 + x$$

Los hijos tienen ahora, entre los tres, 25 años. Dentro de x años tendrán

$$25 + 3x$$

ya que pasan x años para cada uno de ellos.

Entonces, queremos que las dos expresiones anteriores sean iguales. Ya tenemos la ecuación,

$$37 + x = 25 + 3x$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos que $x = 6$ años. En efecto, dentro de 6 años el padre tendrá $37 + 6 = 43$ años. Y la suma de las edades de los hijos será $25 + 3 \cdot 6 = 43$ años también.

Otro ejemplo: *En un hotel hay habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 80 camas. ¿Cuántas de las habitaciones son sencillas y cuántas son dobles?*

Llamemos x al número de habitaciones sencillas. Entonces debe haber $50 - x$ habitaciones dobles. Para calcular el número de camas habrá que sumar el número de habitaciones sencillas, ya que en cada una hay una cama; más dos veces el número de habitaciones dobles,

$$x + 2(50 - x) = 80$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos $x = 20$. Por tanto, hay 20 habitaciones sencillas y $50 - 20 = 30$ habitaciones dobles.

En los dos ejemplos que acabamos de ver se pone de manifiesto la importancia de elegir cuál va a ser la incógnita, es decir, el número que queremos conocer, el que nos preguntan. El resto de la resolución del problema consiste en releer el enunciado e ir traduciendo el texto al una ecuación por medio de x.

ACTIVIDADES

2. La suma de tres números enteros consecutivos es 66. Calcular los tres números.

3. Una persona ha invertido 1000 euros en dos tipos de acciones. Una parte de la inversión le ha reportado unos beneficios del 2 %, mientras que con la otra parte ha ganado un 3 %. Calcular qué parte de los 1000 euros ha invertido al 2 % y qué parte al 3 %, sabiendo que ha ganado 28 euros en total.

4. *Un camión sale de una ciudad a una velocidad de 100km/h. Una hora después sale un coche en la misma dirección a 120km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el coche en alcanzar al camión?*

Dado que la resolución de problemas mediante ecuaciones se ha estudiado ampliamente en cursos anteriores no le dedicaremos más espacio, ya que no es el objetivo fundamental de esta unidad. Sin embargo, si no se domina la técnica, es recomendable que el alumno repase estos conocimientos.

1.2. Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** es cualquier ecuación que se puede reducir a la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado completa, porque contiene todos los términos posibles. Si falta alguno, (bx o c ya que si faltase ax^2, no sería de segundo grado) entonces es una ecuación de segundo grado incompleta. Vamos a empezar resolviendo las ecuaciones incompletas.

Por ejemplo, queremos resolver la ecuación

$$2x^2 - 32 = 0$$

Despejamos x^2,

$$x^2 = \frac{32}{2} = 16$$

Entonces, x es un número que, elevado al cuadrado, es 16. Hay dos posibilidades,

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

En este caso, tenemos dos soluciones $x = +4$ y $x = -4$.

Otro ejemplo,

$$x^2 + 1 = 0$$

Este ejemplo ya ha apareció cuando estudiamos los números complejos. Si despejamos x como antes, llegamos a

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Ya sabemos que estos números sólo existen en el conjunto de los números complejos, en cuyo caso las soluciones son $x = \pm i$. Sin embargo, en esta unidad sólo consideraremos como válidas las soluciones reales. Por tanto, cuando obtengamos una raíz cuadrada de un número negativo, diremos que la ecuación no tiene solución.

Seguimos con las ecuaciones de segundo grado incompletas, pero ahora supongamos que falta el término independiente, es decir, el que no contiene x. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 3x = 0$$

Sacamos x factor común,

$$x(x-3) = 0$$

Entonces, razonamos de la siguiente manera: lo anterior es un producto que es igual a 0, por lo tanto, necesariamente uno de los dos factores ha de ser nulo,

o bien $x = 0$, o bien $x - 3 = 0$,

las soluciones son $x = 0$ y $x = 3$.

ACTIVIDADES

5. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:
a) $2x^2 - 50 = 0$ b) $x^2 = 4$ c) $2x^2 + 6 = 0$ d) $5x^2 = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:
a) $2x^2 - 3x = 0$ b) $x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 = 2x$ d) $-x^2 - 4x = 0$

Recordemos ahora cómo se resuelve una ecuación de segundo grado que contenga todos los términos, es decir,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En primer lugar, vamos a obtener la fórmula. No es preciso recordar de memoria el modo de obtener la fórmula, aunque sí puede resultar un buen ejercicio intentar comprenderla. Lo que resultará importante será recordar la fórmula y aprender a utilizarla.

Empezamos pasando el término independiente al miembro derecho de la ecuación,

$$ax^2 + bx = -c,$$

multiplicamos toda la ecuación por $4a$,

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac,$$

sumamos b^2 a la izquierda y la derecha, de esta forma los dos miembros seguirán siendo iguales,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Recordemos que el cuadrado de una suma es

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Si observamos el miembro izquierdo de la nuestra ecuación, vemos que se trata del desarrollo del cuadrado de una suma, en la que A es $2ax$, y B es b. Entonces, la ecuación se puede escribir de la forma

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Ahora, quitando el cuadrado del miembro izquierdo, obtenemos

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

despejando x,

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

pasamos ahora el factor $2a$ dividiendo a la derecha,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En definitiva, para resolver la ecuación de segundo grado

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}}$$

se utiliza la fórmula

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

Por ejemplo, queremos resolver la ecuación

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son

$$a = 1 \qquad b = 1 \qquad c = -6,$$

sustituimos en la fórmula,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

y separamos las soluciones,

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

ACTIVIDADES

7. Resolver las ecuaciones de segundo grado siguientes:
a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ c) $2x^2 + x + 5 = 0$

En la actividad anterior hemos visto las tres posibilidades que pueden darse a la hora de resolver una ecuación de segundo grado: obtener dos soluciones reales distintas, una solución real y ninguna solución. A las soluciones de una ecuación de segundo grado, y de una ecuación en general, también se les llama a veces **raíces**.

También hemos podido comprobar que el número de soluciones no depende más que del valor del número que aparece dentro de la raíz cuadrada. A este número se le llama **discriminante**, que vamos a denotar por Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una raíz real doble.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

A partir de las soluciones de una ecuación, se puede reconstruir la ecuación de la que provienen. Por ejemplo, si una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, entonces se puede escribir de la forma

$$(x-4)(x-5) = 0$$

Es evidente que esta ecuación tiene soluciones 4 y 5, ya que para que el producto sea nulo, debe serlo alguno de los dos factores $x - 4$ o $x - 5$, de donde se obtienen las soluciones.

Si multiplicamos la expresión anterior,

$$x^2 - 5x - 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$$

El coeficiente de la x es la suma de las dos soluciones cambiada de signo, y el término independiente es el producto de las dos soluciones. Entonces, en general, si

$S = x_1 + x_2$ es la suma de las soluciones y $P = x_1 \cdot x_2$ es el producto, la ecuación de segundo grado de la que provienen es

$$x^2 - Sx + P = 0$$

ACTIVIDADES

8. Indicar el número de soluciones de las siguientes ecuaciones sin resolverlas, utilizando el discriminante:
a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $x^2 + x + 1 = 0$ c) $x^2 - 10x + 25 = 0$

9. Escribir una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:
a) 2 y 3 b) 3 y -5 c) 4, doble, es decir $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$

Recuerda

✓ Una ecuación de primer grado es una ecuación que se puede reducir a la forma $ax = b$. Para resolver una ecuación de primer grado conviene hacer las siguientes transformaciones en este orden:

- Quitar los paréntesis.
- Quitar los denominadores y los nuevos paréntesis que pudieran aparecer.
- Agrupar los términos, los que llevan x en un miembro y los independientes en el otro.
- Sumar los términos en cada miembro y despejar x.

✓ Una ecuación de segundo grado es cualquier ecuación que se puede escribir de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Se resuelve utilizando la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aunque hay algunos casos en los que falta el término bx o el término c en los que se puede prescindir de la fórmula anterior.

✓ El número de soluciones de la ecuación de segundo grado depende del discriminante de la ecuación, que es el número $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una raíz real doble.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

✓ Si $S = x_1 + x_2$ es la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado y $P = x_1 \cdot x_2$ es el producto, la ecuación de de la que provienen es

$$x^2 - Sx + P = 0$$

2. Otras ecuaciones algebraicas

En este apartado vamos a estudiar otras ecuaciones algebraicas, es decir, otras ecuaciones en las que aparecen involucradas operaciones como sumas, productos, cocientes y raíces.

2.1. Ecuaciones bicuadradas

Una **ecuación bicuadrada** es una ecuación de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Es fácil darse cuenta de que una ecuación bicuadrada no es más que una ecuación de segundo grado, en la que se ha cambiado x por x^2.

La forma de resolverla es entonces convertirla en una ecuación de segundo grado mediante un cambio de variable que consiste en llamar $x^2 = t$, por lo que $x^4 = t^2$.

Por ejemplo, queremos resolver la ecuación bicuadrada

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Hacemos el cambio de variable $x^2 = t$, $x^4 = t^2$. Esto convierte la ecuación anterior en la ecuación de segundo grado

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

Resolvemos la ecuación mediante la fórmula correspondiente,

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

y separamos las dos soluciones $t_1 = 9 \qquad t_2 = 1$.

Sin embargo, lo que nosotros queremos calcular son las soluciones de la ecuación original, es decir, la x. Por esta razón ahora tenemos que deshacer el cambio de variable. Como $x^2 = t$, $x = \pm\sqrt{t}$. Aplicamos esto a las dos soluciones obtenidas para t,

$$\begin{array}{ll} t_1 = 9 & x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ t_2 = 1 & x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{array}$$

En este caso, se obtienen cuatro soluciones distintas: $-1, +1, -3, +3$. Sin embargo, es evidente que no siempre será así. Por ejemplo, si una de las soluciones de t es negativa, la solución correspondiente para x no existe, ya que hay que calcular su raíz cuadrada.

ACTIVIDADES

10. Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$ b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$ c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

2.2. Ecuaciones con radicales

Vamos a ver ahora cómo se pueden resolver algunos ejemplos de ecuaciones que contienen raíces cuadradas.

Por ejemplo, la ecuación

$$\sqrt{x-1} = x-7$$

Tenemos que conseguir que desaparezca la raíz para poder resolverla. Esto se consigue elevando al cuadrado en los dos miembros de la ecuación,

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (x-7)^2$$

En la parte de la izquierda se cancela la raíz con el cuadrado, y la parte de la derecha la desarrollamos con la fórmula del cuadrado de una diferencia $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$,

$$x-1 = x^2-14x+49$$

pasando todos los términos a la derecha,

$$0 = x^2-15x+50$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos las soluciones $x = 5$ y $x = 10$. Sin embargo, es posible que las dos no sean soluciones de la ecuación inicial, debido a que al elevar al cuadrado se han podido introducir soluciones extrañas. Para verificarlo, tenemos que sustituir las dos posibles soluciones en la ecuación inicial, para ver si la verifican:

$x = 5$: $\sqrt{5-1} = 5-7$, lo cual no es cierto, por tanto, $x = 5$ no es solución.

$x = 10$: $\sqrt{10-1} = 10-7$, que sí es cierto, por tanto, $x = 10$ es la solución de la ecuación.

En general, antes de elevar al cuadrado hay que aislar la raíz cuadrada. Por ejemplo, en la ecuación

$$\sqrt{x}+1 = x-3$$

Si elevamos al cuadrado directamente, como en el miembro izquierdo hay una suma, la raíz no desaparecería. Por tanto, primero aislamos la raíz en un miembro,

$$\sqrt{x} = x-4$$

y ya se puede elevar al cuadrado.

Veamos ahora un ejemplo de una ecuación con dos radicales,

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1} = 5$$

En este caso resulta conveniente, antes de elevar al cuadrado, aislar una de las raíces,

$$\sqrt{x+6} = 5-\sqrt{x+1}$$

ahora elevamos al cuadrado y utilizamos, en el miembro derecho, la fórmula del cuadrado de una diferencia, $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = \left(5-\sqrt{x+1}\right)^2$$

entonces,

$$x+6=25-2{\cdot}5{\cdot}\sqrt{x+1}+x+1$$

Después de elevar al cuadrado sigue quedando una raíz cuadrada, entonces estamos en la situación de los ejemplos anteriores. Por lo que debemos aislar nuevamente la raíz y volver a elevar al cuadrado, la pasamos al miembro izquierdo para que tenga signo positivo,

$$10\sqrt{x+1}=20$$

de donde,

$$\sqrt{x+1}=\frac{20}{10}=2$$

Elevamos al cuadrado por última vez, y obtenemos $x+1=4$, de donde, $x=3$.

Se puede verificar que, en efecto, esta es la solución de la ecuación.

ACTIVIDADES

11. Resolver las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $\sqrt{x}+1=x-5$ b) $\sqrt{x+3}=2$ c) $\sqrt{x+2}-x=0$

2.3. Ecuaciones de grado superior a dos

Ya sabemos resolver ecuaciones de primer grado y de segundo. También sabemos resolver un caso particular de ecuación de cuarto grado, la ecuación bicuadrada. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grado en general, hay fórmulas, del tipo de la utilizada para resolver la ecuación de segundo grado. No obstante, estas fórmulas para las ecuaciones de tercer y cuarto grado, son tan complejas que su utilidad es más bien escasa. A partir del quinto grado, no hay posibilidad de encontrar fórmulas con radicales que las resuelvan. En estos casos, en general, se utilizan técnicas de aproximación numérica para encontrar las soluciones. De todas formas, cuando las soluciones son números enteros, se pueden resolver de una manera elemental, utilizando la **regla de Ruffini** para la descomposición de polinomios, que recordaremos aquí.

Supongamos que tenemos una ecuación factorizada de la forma

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x-5)=0$$

Si multiplicamos esta expresión, obtenemos una ecuación de cuarto grado. Pero para resolverla, no es preciso multiplicarla, sino que se pueden calcular sus soluciones directamente, igualando a cero cada uno de los factores, de esta forma llegamos a la conclusión de que las soluciones son

$$x=1 \qquad x=2 \qquad x=-3 \qquad x=5$$

Dada una ecuación polinómica de grado n, si se puede factorizar de la forma

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=0$$

entonces su resolución, como acabamos de ver, es inmediata. De hecho, las soluciones son

$$x = x_1 \quad x = x_2 \quad \dots \quad x = x_n$$

En particular, esto es posible siempre que las raíces de la ecuación sean números enteros.

Para hacer esta descomposición vamos a utilizar la regla de Ruffini. Recordemos que ésta es una regla que sirve para dividir un polinomio entre otro que sea de la forma $(x - a)$. Por ejemplo, para dividir el polinomio $x^3 - 2x^2 + 6x + 5$ entre $(x - 2)$, escribimos los coeficientes del primer polinomio y el número 2 (por ser $(x - 2)$ abajo a la izquierda)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 6 & 5 \\ & & & & \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Ahora, el primer número se baja a la fila de abajo tal cual. Este número se multiplica por 2 y el resultado se suma al siguiente coeficiente. Se vuelve a t'multiplicar el resultado por 2 y sumar al coeficiente siguiente, así hasta el final:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 6 & 5 \\ & & & & \\ 2 & & 2 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & 6 & \boxed{17} \end{array}$$

El último resultado es el resto de la división, 17, el cociente está formado por el polinomio cuyos coeficientes obtenemos antes del 17, es decir, $x^2 + 6$ en este caso.

Recordemos cómo se puede utilizar la regla de Ruffini para factorizar un polinomio. Por ejemplo, queremos factorizar el polinomio y, de esta forma resolver la ecuación

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

Consideramos el polinomio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$, debido a un resultado conocido como **teorema del Resto**, sabemos que el valor numérico del polinomio para $x = a$, es decir, $P(a)$ es el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$. Se trata entonces de localizar los números a tales que $P(a) = 0$, es decir, tales que el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ sea cero. Estos números serán las raíces de la ecuación. Se sabe además, que estos números son siempre divisores del término independiente del polinomio. Por tanto, vamos probando con los distintos divisores de -6, que son

$$-1, +1, -2, +2, -3, +3, -6, +6$$

hasta que encontremos uno en el que el resto sea nulo. Dividimos usando la regla de Ruffini y, al cociente obtenido, le aplicamos la misma operación, así hasta descomponer completamente el polinomio.

En nuestro caso

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\
-1 & & -1 & 6 & -11 & 6 \\
\hline
 & 1 & -6 & 11 & -6 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & -5 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & -6 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & & \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

Entonces, el polinomio se puede descomponer

$$(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

Y las soluciones de la ecuación son precisamente las raíces que hemos localizado, es decir, los números que hemos ido poniendo a la izquierda,

$$x=-1 \qquad x=1 \qquad x=2 \qquad x=3$$

ACTIVIDADES

12. Resolver las siguientes ecuaciones factorizando, si es necesario:
a) $x^3-3x^2-6x+8=0$ b) $x^4-2x^3-x^2+2x=0$ c) $x^8-4x^6=0$

Recuerda

- ✓ Una *ecuación bicuadrada* es una ecuación de la forma $ax^4+bx^2+c=0$. Se resuelve mediante el cambio de variable $x^2=t$, que convierte la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado en t. Una vez resuelta, se deshace el cambio, para calcular el valor de x.
- ✓ Una ecuación que contenga una raíz cuadrada se puede resolver aislando la raíz en uno de los miembros y elevando al cuadrado. Una vez calculadas las soluciones hay que verificarlas necesariamente, ya que se han podido introducir soluciones extrañas al elevar al cuadrado.
- ✓ Una ecuación de grado superior a dos se puede resolver, si sus raíces son números enteros, mediante la regla de Ruffini. Si conseguimos escribir la ecuación de la forma

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=0$$

las soluciones son

$$x=x_1 \qquad x=x_2 \qquad \dots \qquad x=x_n$$

3. Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad en la que aparece alguna letra, que representa un número, llamada incógnita, que queremos calcular. Por ejemplo,

$$2x + 3 < 5x$$

Una inecuación es entonces, al menos en la forma, lo mismo que una ecuación, pero en la que se ha cambiado el “$=$"por alguno de los siguientes símbolos:

$<$ menor que, $>$ mayor que, $\leq$ menor o igual, $\geq$ mayor o igual.

Al igual que las ecuaciones, dependiendo de cuál es la x de mayor grado, las inecuaciones pueden ser de primer grado, de segundo, etc. Nosotros estudiaremos aquí las de primer y segundo grado.

3.1. Inecuaciones de primer grado

Antes de empezar a ver cómo se resuelven veamos qué significa una inecuación. En una ecuación, por ejemplo,

$$x + 2 = 3,$$

queremos calcular el valor de x, de tal forma que, si le sumamos 2, nos dé 3. Este número es $x = 1$.

En una inecuación, por ejemplo,

$$x + 2 > 3,$$

buscamos un número x tal que, sumado con 2, sea mayor que 3. En primer lugar, es fácil ver que no hay un único número que verifique esta relación. En efecto, valdría el número 2, el 4, el 5, etc. La solución de una inecuación no es un sólo número, sino todo un intervalo de números. En este caso, son todos los números mayores que 1, es decir, los x tales que

$$x > 1,$$

o lo que es lo mismo, los números del intervalo abierto $(1, +\infty)$. (Los intervalos han sido estudiados en la unidad correspondiente a números reales, sería recomendable repasarlos antes de seguir adelante.)

La manera de resolver una inecuación de primer grado va a ser muy parecida a la forma en la que resolvemos ecuaciones de segundo grado, sin embargo, con las desigualdades hay ciertas operaciones especiales que conviene tener en cuenta. Por ejemplo,

$$2 < 5$$

- Si sumamos un mismo número (positivo o negativo) a la izquierda y a la derecha de la desigualdad, ésta se mantiene. Por ejemplo,

$$2 + 3 < 5 + 3$$

- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de la desigualdad por un mismo número **positivo**, tampoco cambia la desigualdad. Por ejemplo,

$$2 \cdot 4 < 5 \cdot 4$$

- Pero, si multiplicamos o dividimos los dos miembros de la desigualdad por un mismo número **negativo**, entonces cambia el sentido de la desigualdad. Por ejemplo,

$$2 \cdot (-2) > 5 \cdot (-2)$$

Entonces, para resolver una inecuación de primer grado, podemos aplicar el mismo procedimiento que para resolver una ecuación de primer grado, salvo cuando haya que multiplicar por un número negativo, o cambiar de signo, en cuyo caso también habrá que cambiar el sentido de la desigualdad. Veamos un ejemplo, resolver la inecuación

$$2(x-1) \leq 5x-8,$$

quitamos los paréntesis,

$$2x-2 \leq 5x-8,$$

agrupamos los términos en x a la izquierda, por ejemplo, y los independientes a la derecha,

$$-3x \leq -6$$

Hasta aquí, todo se ha hecho como si se tratase de una ecuación. Pero ahora, para cambiar de signo la inecuación, necesariamente tenemos que cambiar el sentido de la desigualdad, porque al cambiar de signo, multiplicamos por un número negativo, -1,

$$3x \geq 6$$

por tanto, $x \geq 2$.
Entonces, la solución de la inecuación son los números del intervalo $[2, +\infty)$.

ACTIVIDADES

13. Resolver las siguientes inecuaciones, indicando la solución mediante un intervalo:

a) $3(x-3) \leq 2-7x$ b) $\frac{-x}{4} - 4 \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$ c) $2x - 10 < \frac{2x-6}{3}$

3.2. Inecuaciones de segundo grado

Empecemos con un ejemplo,

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Factorizamos el polinomio, utilizando la regla de Ruffini o bien, como es de segundo grado, resolviendo la ecuación para calcular sus raíces. En cualquier caso,

$$(x-1)(x-2) \geq 0$$

La solución de la inecuación son los x tales que $(x-1)$ por $(x-2)$ es mayor o igual que cero. Entonces, habrá que determinar el signo de cada uno de los factores. Es evidente que el factor $(x-1)$ cambia de signo en $x=1$, y el factor $(x-2)$ cambia de signo en $x=2$. (Cambian de signo donde se hacen cero).

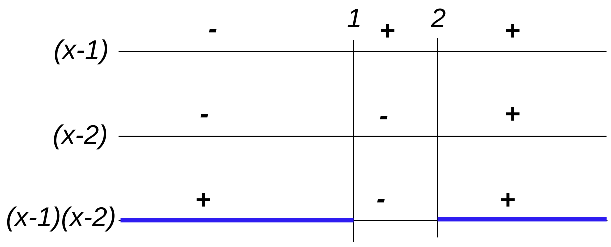


Figura 3.1: $(x-1)(x-2) \geq 0$

El estudio del signo está hecho en el esquema de la figura 3.1. Cada una de las tres líneas horizontales representa la recta real, en la que se han señalado los números 1 y 2, que es donde se puede producir cambio de signo.

En la primera línea están indicados los signos del factor $(x-1)$ en cada intervalo de la recta, que se determina sin más que sustituir un número de ese intervalo. Por ejemplo, si probamos con el número -2, $(-2-1) = -3$, negativo, así, todos los números a la izquierda del 1 son negativos.

En la segunda línea están indicados los signos del factor $(x-2)$ en cada intervalo de la recta.

Por fin, en la última línea están indicados los signos del producto $(x-1)(x-2)$ en cada intervalo. Estos últimos signos se han obtenido sin más que multiplicar los signos de las dos líneas anteriores.

Por tanto; a la izquierda de 1 y a la derecha de 2, el signo es positivo, y entre el 1 y el 2, el signo es negativo. La inecuación incial imponía la condición de que el producto $(x-1)(x-2) \geq 0$, es decir positivo. La solución está constituida por los intervalos en los que el producto es positivo, que en el esquema se han marcado con trazo más grueso, es decir,

$$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

(El símbolo $\cup$ es el símbolo de la unión, sirve para indicar que la solución es la reunión de los dos intervalos).

Los intervalos son cerrados porque la desigualdad es $\geq$, es decir, contiene al igual, por lo que los números 1 y 2 también forman parte de la solución.

El ejemplo anterior es el más habitual, ya que el polinomio se puede descomponer en dos factores, porque la solución de la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones. Sin embargo, puede ocurrir que esto no sea posible. Pero en este caso la solución es más sencilla. Por ejemplo, la inecuación

$$2x^2 + 1 > 0$$

El polinomio no se puede descomponer, porque la ecuación $2x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones, es decir, nunca se hace cero. Pero si nunca se hace cero, esto es porque o bien siempre es positivo o siempre es negativo. Es evidente que $2x^2 + 1$ siempre es positivo, para cualquier x. Por tanto, la solución son todos los números reales $\mathbb{R}$.

ACTIVIDADES

14. Resolver las siguientes inecuaciones de segundo grado:
a) $x^2 - 1 < 0$ b) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ c) $-x^2 - 1 < 0$ d) $-x^2 - 1 > 0$

Recuerda

- ✓ Una *inecuación* es como una ecuación pero cambiando la igualdad por una desigualdad. Las soluciones de una inecuación suelen estar constituidas por intervalos de números reales.
- ✓ Las inecuaciones de primer grado se resuelven exactamente igual que las ecuaciones, teniendo en cuenta que si hay que multiplicar por un número negativo, hay que cambiar el sentido de la desigualdad.
- ✓ Una inecuación de segundo grado se resuelve factorizando y analizando el signo de los factores, de manera que se verifique la desigualdad de la inecuación.

4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En este apartado vamos a estudiar un tipo de ecuaciones no algebraicas: ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En primer lugar, es conveniente repasar las propiedades de las potencias y de los logaritmos ya estudiadas.

4.1. Ecuaciones exponenciales

Una **ecuación exponencial** es una ecuación en la que aparecen potencias y la incógnita se encuentra en algún exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 8$$

El problema consiste en calcular el valor de x, de manera que 2 elevado a x sea 8. La solución en este caso es $x = 3$.

La ecuación puede ser más complicada, el objetivo en caso de que así sea es escribirla de la forma anterior. Una vez escrita de esta forma, la solución puede ser inmediata como antes, o quizá sea preciso utilizar logaritmos para calcular exactamente el exponente. Por ejemplo, en la ecuación

$$3^x = 7,$$

el número x no es entero, ya que: $3^1 = 3$, que no llega, y $3^2 = 9$, que se pasa. Se trata de algún número entre 1 y 2. Para calcularlo exactamente hacemos lo siguiente:

Tomamos logaritmos (neperianos por ejemplo)

$$\ln(3^x) = \ln(7)$$

Ahora aplicamos la propiedad de los logaritmos que nos permite sacar el exponente fuera del logaritmo, es decir,

$$\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$$

En nuestro caso,

$$x \cdot \ln(3) = \ln(7),$$

despejamos x y utilizamos la calculadora,

$$x = \frac{\ln(7)}{\ln(3)} = 1'7712$$

ACTIVIDADES

15. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x = 1$ b) $2^x = \frac{1}{2}$ c) $5^x = \frac{1}{25}$ d) $3^x = 81$ e) $7^x = 2$

Veamos un ejemplo de una ecuación más complicada, en la que hay que hacer algunas manipulaciones para llegar a las formas anteriores. Por ejemplo, queremos resolver la ecuación

$$3^{x-1} + 3^{x+1} = 30$$

Aplicando las propiedades de las potencias, podemos escribirla de la forma

$$\frac{3^x}{3} + 3^x \cdot 3 = 30$$

Se trata ahora, de despejar 3^x, aunque lo mejor quizá sea hacer un cambio de variable $X = 3^x$, con lo que la ecuación queda de la forma

$$\frac{X}{3} + 3X = 30$$

Resolvemos esta ecuación de primer grado,

$$X = 9$$

Entonces, $3^x = 9$, por tanto $x = 2$.

También puede ocurrir que la potencia a despejar esté dentro de un ecuación de segundo grado. Por ejemplo, la ecuación

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

En este caso, si hacemos el cambio de variable $2^x = X$, la ecuación anterior se convierte en la ecuación de segundo grado

$$X^2 - 9X + 8 = 0$$

(obsérvese que $X^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$).

Resolvemos la ecuación y obtenemos las soluciones $X = 8$ y $X = 1$. Entonces, deshaciendo el cambio de variable,

$$2^x = 8 \qquad 2^x = 1$$

Por tanto, $x = 3$ y $x = 0$ son las soluciones de la ecuación inicial.

ACTIVIDADES

16. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 7$ b) $3^{x+5} + 3^x = \dfrac{244}{3}$ c) $5^{2x} + 5^x - 2 = 0$

4.2. Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación en la que la incógnita aparece en una expresión con logaritmos es una **ecuación logarítmica**. Por ejemplo, la ecuación

$$\log_{10} x + \log_{10}(x-2) = \log_{10} 3$$

Para resolverlas hay que transformarlas, aplicando las propiedades de los logaritmos en ecuaciones que no contengan logaritmos.

Por ejemplo, para resolver la ecuación anterior vamos a hacer que ambos miembros de la ecuación queden como un único logaritmo, para después eliminarlos.

$$\log_{10}(x(x-2)) = \log_{10} 3$$

Por tanto, eliminando los logaritmos

$$x(x-2) = 3$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado y obtenemos como soluciones $x = -1$ y $x = 3$. Aunque sólo es válida $x = 3$, ya que los logaritmos de números negativos no existen.

En otras ocasiones conviene más reducir la expresión a una igualdad entre un logaritmo y un número. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$\log_5 x + 3 \cdot \log_5 x = 4$$

Transformamos la parte de la izquierda,

$$\log_5 x + \log_5(x^3) = 4; \quad \log_5(x^4) = 4$$

Por tanto, utilizando la definición de logaritmo, lo anterior es equivalente a

$$x^4 = 5^4$$

de donde $x = 5$. (¿Podría ser $x = -5$?)

Otra forma de resolver la ecuación anterior más sencilla:
Sumamos los logaritmos en base 5,

$$4 \cdot \log_5 x = 4$$

Entonces, $\log_5 x = \frac{4}{4} = 1$. Por tanto, $x = 5^1 = 5$.

ACTIVIDADES

17. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:
a) $\log_x 4 = 2$ b) $\log_{10} x - \log_{10}(x-1) = 1$ c) $2\ln x - 3\ln(x^4) + 4\ln\sqrt{x} = 1$

Recuerda

- ✓ Una *ecuación exponencial* es una ecuación con potencias, en la que la incógnita se encuentra en algún exponente. Se resuelven transformándolas en una expresión de la forma $a^x = b$.
- ✓ Una *ecuación logarítmica* es una ecuación en la que la incógnita aparece entre logaritmos. Se resuelven eliminando los logaritmos, utilizando sus propiedades.

5. Sistemas de ecuaciones lineales

Un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Se trata de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolverlo consiste en encontrar dos números x e y que verifiquen **simultáneamente** las dos ecuaciones.

En general, un **sistema de ecuaciones lineales** es un grupo de ecuaciones de primer grado, con un grupo de incógnitas que deben verificarse simultáneamente.

5.1. Métodos de reducción y sustitución

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden resolver de varias formas. En particular, los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas se pueden resolver mediante los métodos de reducción y sustitución, que ya se han estudiado en otros cursos. No obstante, los vamos a repasar aquí.

Método de sustitución.

Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en la otra. Por ejemplo, queremos resolver el sistema,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = 3 - x$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $x - (3 - x) = 1$ y resolvemos esta ecuación, que tiene por solución $x = 2$. Ahora sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones para calcular $y = 1$.

Existe una variante del método de sustitución que se llama a veces, *método de igualación*. Consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones para después igualarlas.

Método de reducción.

El método de reducción consiste en la eliminación (reducción) de una de las incógnitas sumando las ecuaciones, multiplicadas si fuera necesario por alguna constante.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la sumamos a la segunda, de esta forma se elimina la y y queda

$$5x = 5$$

con lo que $x = 1$.

Ahora sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones, obtenemos $y = 2$.

5.2. Método de Gauss

El método de sustitución resulta útil cuando el sistema es de dos ecuaciones con dos incógnitas, sin embargo, si aumentamos el número de ecuaciones y de incógnitas, no es práctico. Sin embargo, el método de reducción, utilizado convenientemente sí es útil para sistemas de más de dos ecuaciones. El **método de Gauss** consiste precisamente en una generalización del método de reducción que transforme el sistema inicial en un sistema más sencillo de resolver.

Por ejemplo, el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas siguiente es muy sencillo de resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad\; y + 2z = 8 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

Se dice que es un sistema triangular. La última ecuación ya es la solución de la incógnita $z = 3$. Con esta, sustituyendo en la segunda ecuación, calculamos $y = 2$. Con las dos incógnitas calculadas, sustituimos en la primera ecuación y obtenemos el valor $x = 1$.

El método de Gauss consiste en aplicar el método de reducción de tal manera que podamos transformar el sistema inicial en un sistema triangular.

Vamos a aplicar el método de Gauss al sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ -x + y + z = 2 \\ 2x \qquad - z = 0 \end{cases}$$

Empezamos eliminando la incógnita x de la segunda y la tercera ecuación. Para ello utilizamos la primera de las ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 & \\ \quad 2y + 3z = 8 & \text{(segunda+primera)} \\ \quad -2y - 5z = -12 & \text{(tercera-2.primera)} \end{cases}$$

Ahora eliminamos la y de la tercera ecuación, la primera y la segunda las dejamos tal como están,

$$\begin{cases} x + y + 2z = 6 & \\ \quad 2y + 3z = 8 & \\ \qquad -2z = -4 & \text{(tercera+segunda)} \end{cases}$$

Y ya tenemos un sistema triangular. Resolvemos la última ecuación y después vamos sustituyendo en la segunda y en la primera, con lo que obtenemos

$$x = 1 \qquad y = 1 \qquad z = 2$$

En algunas ocasiones, puede resultar útil cambiar de orden las ecuaciones.

ACTIVIDADES

18. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ x + y \qquad = 1 \\ \qquad y + z = 2 \end{cases}$

Recuerda

- ✓ Un *sistema de ecuaciones lineales* está compuesto por varias ecuaciones de primer grado y varias incógnitas, cuyas soluciones deben verificar las ecuaciones simultáneamente.
- ✓ Cuando los sistemas no tienen muchas ecuaciones (dos) se puede utilizar el método de sustitución y reducción.
- ✓ Cuando el sistema tiene muchas ecuaciones y muchas incógnitas conviene utilizar el método de Gauss. El método de Gauss es una generalización del método de reducción que transforma el sistema inicial en un sistema triangular, que es más sencillo de resolver que el sistema inicial.

4 Trigonometría

ÍNDICE DE CONTENIDOS

En cursos anteriores ya se han estudiado algunos conceptos de trigonometría. En este unidad vamos a repasar estos conceptos, y ampliar con algunos nuevos. En particular, estudiaremos nuevas herramientas que nos permitirán resolver problemas relacionados con triángulos cualesquiera, y no sólo con triángulos rectángulos. También veremos algunas relaciones trigonométricas nuevas con las que podremos resolver algunas ecuaciones trigonométricas, es decir, ecuaciones en las que aparecen involucradas las razones trigonométricas.

1. Ángulos

La trigonometría trata sobre las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. El concepto fundamental sobre el que se trabaja es el de **ángulo**. Dos semirrectas con un origen común dibujadas en un plano, dividen a éste en dos regiones. Cada una de estas regiones es un ángulo (figura 4.1).

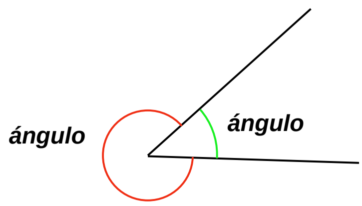


Figura 4.1: Ángulos

En un ángulo no importa la longitud de las semirrectas que lo componen, sino la abertura entre ellas. Para medir esta abertura, se utilizan diferentes sistemas de medida, los más importantes son: el sistema sexagesimal y los radianes.

Además de la medida, que estudiaremos a continuación, consideraremos que los ángulos tienen una orientación de acuerdo con el siguiente convenio, indicado además en la figura 4.2:

> Si el ángulo está medido en el sentido contrario al giro de las agujas del reloj, diremos que es un ángulo *positivo*.
> Si el ángulo está medido en el sentido de giro de las agujas del reloj, diremos que es un ángulo *negativo*.

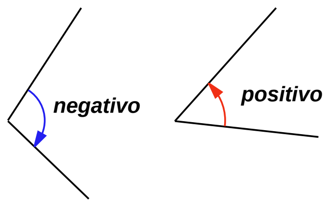


Figura 4.2: Ángulos orientados

1.1. Sistema sexagesimal

Un **ángulo recto** es el menor de los ángulos formados por dos rectas perpendiculares, como se señala en la figura 4.3.

Si dividimos el ángulo recto en 90 ángulos iguales, cada uno de estos ángulos es un grado (sexagesimal), y lo indicamos de la forma siguiente:

$$1 \text{ recto} = 90^0$$

Si dividimos un grado en 60 partes iguales, cada una de estas partes es un minuto (sexagesimal.) Los minutos los indicamos con una coma en la parte superior derecha

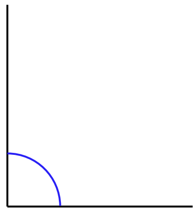


Figura 4.3: Ángulo recto

del número,

$$1^0 = 60'$$

Por último, si un minuto se divide en 60 partes iguales, cada una de ellas es un segundo (sexagesimal.) Los segundos los indicamos con una coma doble,

$$1' = 60''$$

Así, los ángulos medidos en el **sistema sexagesimal** se expresan de la forma $34^0\ 52'\ 32''$, que significa que el ángulo mide 34 grados, 52 minutos y 32 segundos.

Habitualmente situaremos los ángulos en unos ejes coordenados, como en la figura 4.4. Si empezamos a medir los ángulos desde la parte de la derecha del eje horizontal (ángulo de 0^0,) en sentido positivo, los ángulos de 90^0, 180^0, 270^0 y 360^0 son los que se han indicado en la figura.

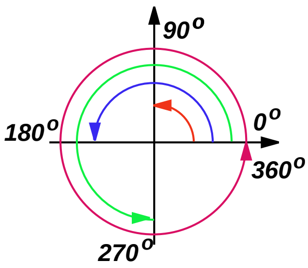


Figura 4.4: Ángulos en los ejes

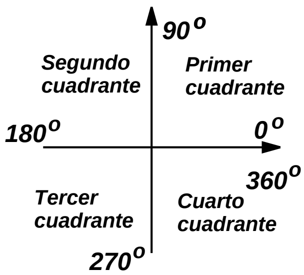


Figura 4.5: Cuadrantes

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones, que se denominan **cuadrantes**, ordenados según la figura 4.5.

ACTIVIDADES

1. Indicar en qué cuadrante se encuentra cada uno de los ángulos siguientes:
a) 30^0 b) $278^0\ 30'$ c) -35^0 d) $200^0\ 34'\ 38''$ e) 480^0
(Indicación: en el apartado e), en primer lugar hay que reducir el ángulo a uno menor que 360^0, esto se consigue dividiendo entre 360 y quedándose con el resto de la división.)

1.2. Radianes

Además del grado sexagesimal, en trigonometría se usa con frecuencia otra medida de ángulos, el **radián**.

Dibujemos una circunferencia de radio R, como en la figura 4.6. El ángulo central AOB mide 1 *radián*, si la longitud del arco de la circunferencia que va desde el punto A al punto B es igual al radio de la circunferencia R.

Podemos calcular la cantidad de radianes que hay en una vuelta completa de la circunferencia, sin más que dividir su longitud entre la longitud del radio. La longitud del radio de la circunferencia es

$$L = 2\pi R$$

Entonces, una vuelta completa tiene

$$1 \text{ vuelta} = \frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{radio}} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}$$

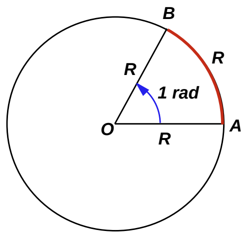


Figura 4.6: Radián

De aquí se deduce que el ángulo de 360^0 tiene 2π rad, y también que el ángulo de 180^0 es de π rad. Las equivalencias entre los ángulos que delimitan los cuadrantes en grados y radianes, vienen dadas en la siguiente tabla:

grados	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Conviene recordar estas equivalencias.

Para convertir cualquier otro ángulo, bien de grados a radianes, bien de radianes a grados, se puede utilizar la siguiente proporción

$$\boxed{\frac{\textbf{radianes}}{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\textbf{grados}}{\mathbf{180}}}$$

Por ejemplo, queremos convertir el ángulo de $\alpha = 280^0$ a radianes. Utilizamos la proporción anterior,

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{280}{180}$$

de donde,

$$\alpha = \frac{280\pi}{180} = \frac{14\pi}{9} \text{ rad}$$

Nota: Para referirse a los ángulos, se utilizan con mucha frecuencia las primeras letras del alfabeto griego: α, “alfa"; β, “beta"; γ, “gamma"; etc.

Supongamos ahora que queremos convertir el ángulo $\beta = \frac{3\pi}{4}$ rad a grados. Utilizando la misma proporción, $\frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} = \frac{\beta}{180}$, obtenemos,

$$\beta = 180 \cdot \frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} = 180 \cdot \frac{3}{4} = 135^0.$$

ACTIVIDADES

2. Convertir los siguientes ángulos en grados sexagesimales a radianes:
a) 45^0 b) 120^0 c) 30^0 d) 60^0 e) 300^0

3. Convertir los siguientes ángulos en radianes a grados sexagesimales:
a) 1 rad b) $\frac{\pi}{5}$ rad c) $\frac{5\pi}{3}$ rad d) 10π rad e) $\frac{360}{\pi}$ rad

Recuerda

✓ Un *ángulo* es cada una de las regiones en las que dividen al plano dos semirrectas con un origen común.

Un ángulo está medido en sentido *positivo*, si lo está en el sentido contrario al del giro de las agujas del reloj. Y en sentido *negativo*, si es en el sentido de giro de las agujas del reloj.

✓ El *sistema sexagesimal* es un sistema de medida de ángulos en el que la unidad es el grado sexagesimal. Un grado es el resultado de partir un ángulo recto en 90 partes iguales, de aquí,

$$1 \text{ recto} = 90^0 \qquad 1^0 = 60' \text{ (minutos)} \qquad 1' = 60'' \text{ (segundos)}$$

✓ Un *radián* es la medida de un ángulo central en una circunferencia, de tal forma que el arco que abarca el ángulo tenga la misma longitud que el radio de la circunferencia.

✓ Para convertir grados a radianes, o radianes a grados, se utiliza la proporción

$$\frac{\text{radianes}}{\pi} = \frac{\text{grados}}{180}$$

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Un ángulo agudo es un ángulo entre 0^0 y 90^0, es decir, un ángulo del primer cuadrante. Para definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo, utilizaremos un triángulo rectángulo.

2.1. Definición

Consideramos un triángulo rectángulo como el de la figura 4.7. En el que consideramos el ángulo agudo α. La longitud de la *hipotenusa* es a, la longitud del *cateto opuesto* al ángulo α es b y la longitud del *cateto adyacente* al ángulo α es c.

Se llaman **razones trigonométricas** del ángulo α a las *razones* (proporciones) entre los lados del triángulo, y son **seno** (sen), **coseno** $(\cos)$, **tangente** (tg), **cosecante** (cosec), **secante** $(\sec)$ y **cotangente** (cotg), que se definen como se indica a continuación:

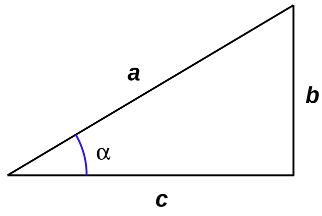


Figura 4.7: Triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

(Las más importantes son el seno, coseno y tangente).

Por ejemplo, en el triángulo de la figura 4.8, las razones trigonométricas del ángulo α son las siguientes:

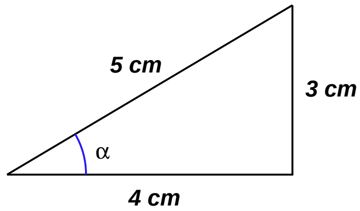


Figura 4.8: Triángulo de lados 3, 4 y 5 cm

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4}{3}$$

En la figura 4.9 tenemos dos triángulos rectángulos que comparten el ángulo α. Estos dos triángulos son **semejantes**, es decir, de sus tres ángulos son iguales y, por tanto, como sabemos, sus lados son proporcionales, es decir,

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

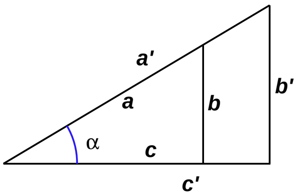


Figura 4.9: Triángulos semejantes

A primera vista, da la impresión de que el valor de las razones trigonométricas depende del tamaño del triángulo. Sin embargo, no es así, como podemos apreciar en la figura 4.9.

Por tanto, las razones trigonométricas se pueden calcular utilizando las medidas del triángulo grande o del triángulo pequeño, es decir, lo único que importa es el ángulo α

Debido a que las razones trigonométricas son independientes del triángulo con respecto del cual se calculen, sus valores están tabulados, y se pueden calcular mediante una calculadora científica. Para hacer cálculos mediante la calculadora, en primer lugar hay que asegurarse de que la calculadora esté puesta en grados o en radianes, dependiendo de cómo queramos hacer los cálculos. En la pantalla aparecerá la indicación DEG, si está en grados sexagesimales; o RAD, si está puesta en radianes. (El cambio de uno a otro sistema dependerá del tipo de calculadora, aunque lo más habitual es que se haga utilizando la tecla $\boxed{\text{MODE}}$ y algún número, según una leyenda que suele aparecer justo debajo de la pantalla.)

Las teclas que sirven para calcular seno, coseno y tangente; son $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$, respectivamente. Por ejemplo, para calcular el valor de $\operatorname{sen}(35^0)$, con la calculadora en el modo DEG, pulsamos

$$\boxed{35} \; \boxed{\text{sin}}$$

y el resultado que se obtiene (dependiendo del número de decimales que admita la calculadora) es

$$\operatorname{sen}(35^0) = 0'5735764364$$

Conocido el valor de una razón trigonométrica, también es posible calcular mediante la calculadora, el valor del ángulo. Por ejemplo, si $\cos\alpha = 0'24$, para calcular el valor del ángulo, utilizamos la función de la calculadora $\boxed{\cos^{-1}}$. Esta es la función inversa del coseno y será estudiada con más detalle más adelante, en la unidad correspondiente a funciones. Para utilizarla, pulsamos

$$\boxed{\text{0'24}} \; \boxed{\text{INV}} \; \overset{\cos^{-1}}{\boxed{\cos}}$$

el resultado que obtenemos,

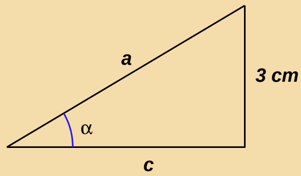
$$76'11345964$$

se puede convertir a grados, minutos, segundos, mediante la secuencia $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{{}^0\ {}'\ {}''}$, y se obtiene aproximadamente

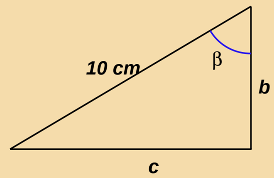
$$\alpha = 76^0\ 6'\ 48''$$

ACTIVIDADES

4. En el triángulo rectángulo de la figura siguiente, $\alpha = 38^0$. Calcular el valor de a y c.



5. En el triángulo rectángulo de la figura siguiente, $\beta = 65^0$. Calcular el valor de b y c.



2.2. Identidades trigonométricas

Las razones trigonométricas están relacionadas entre sí mediante algunas fórmulas que vamos a estudiar a continuación. Volvemos a considerar el triángulo rectángulo sobre el que hemos definido las razones trigonométricas, que representamos de nuevo en la figura 4.10.

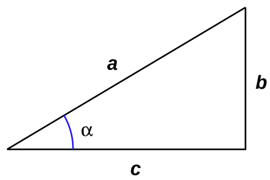


Figura 4.10: Triángulo rectángulo

Si dividimos $\operatorname{sen} \alpha$ entre $\cos \alpha$, y simplificamos $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b}{c} = \operatorname{tg} \alpha$, es decir, la tangente es igual al seno entre el coseno,

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}$$

Resulta evidente comprobar también las siguientes relaciones:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Vamos a obtener ahora otra relación importante, utilizando el teorema de Pitágoras. El **teorema de Pitágoras** afirma que, en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En nuestro triángulo, esto se traduce en la siguiente expresión:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Si dividimos esta expresión entre a^2, obtenemos

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Ahora bien, como $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{a}$ y $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$, la expresión anterior se puede escribir como

$$\boxed{\mathbf{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}}$$

Esta identidad recibe el nombre de **relación fundamental de la trigonometría**, y relaciona el valor del seno y el coseno de un mismo ángulo α.

Veamos un ejemplo de utilización de la relación fundamental. Por ejemplo, sabiendo que $\operatorname{sen}(30^0) = \dfrac{1}{2}$, vamos a calcular su coseno y su tangente.

En primer lugar, sustituimos en la relación fundamental,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2(30^0) = 1$$

despejamos $\cos^2(30^0)$,

$$\cos^2(30^0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Entonces,

$$\cos(30^0) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(En principio, al sacar la raíz cuadrada, deberíamos considerar la posibilidad de que $\cos(30^0)$ fuese positivo o negativo, pero tal como hemos definido las razones trigonométricas, como fracciones entre medidas de lados de un triángulo, debemos tomar el signo positivo. No obstante, para ángulos no agudos esto puede no ser así, como veremos después.)

Para calcular ahora el valor de la tangente, aplicamos la fórmula $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$,

$$\operatorname{tg}(30^0) = \frac{\operatorname{sen}(30^0)}{\cos(30^0)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A partir de la relación fundamental, se pueden obtener fácilmente otras relaciones entre las razones trigonométricas.

Si dividimos todos los términos de la relación fundamental entre $\cos^2\alpha$,

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Simplificando, obtenemos

$$\boxed{\mathbf{tg^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\,\alpha}}}$$

Si dividimos la relación fundamental entre $\operatorname{sen}^2\alpha$ y simplificamos, obtenemos la siguiente fórmula de menos utilidad que las anteriores:

$$\boxed{\mathbf{1 + cotg^2\,\alpha = \frac{1}{sen^2\,\alpha}}}$$

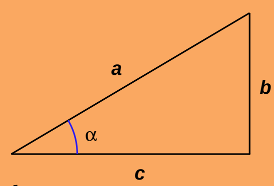
ACTIVIDADES

6. Sabiendo que $\cos(60^0) = \dfrac{1}{2}$, calcular el seno y la tangente del ángulo de 60^0.

7. Sabiendo que $\operatorname{tg}(45^0) = 1$, calcular el seno y el coseno del ángulo de 45^0.
(Indicación: utilizar la relación $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ para calcular el valor del coseno).

Recuerda

✓ Razones trigonométricas de un ángulo agudo:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

✓ Relaciones entre las razones trigonométricas:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

✓ Relación fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

✓ Relaciones que se obtienen a partir de la relación fundamental:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

3. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

3.1. La circunferencia goniométrica

Ahora vamos a extender la definición de las razones trigonométricas que ya conocemos para un ángulo agudo a un ángulo cualquiera. Para ello, situamos el triángulo rectángulo que usábamos antes dentro de una circunferencia centrada en el origen de coordenadas, como el la figura 4.11.

Dado que las razones trigonométricas no dependían de lo grande o lo pequeño que fuese el triángulo, tampoco dependerán de lo grande o pequeña que sea nuestra circunferencia. Por esta razón, elegimos un radio con el que resulta muy cómodo hacer operaciones, radio $= 1$. Lo que ahora es el radio, antes era la hipotenusa, de manera que cada vez que haya que dividir entre ésta, no habrá nada que hacer, ya que el resultado será el de dividir por 1. A esta circunferencia, a la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, que nos servirá para *medir* las razones trigonométricas, se le llama **circunferencia goniométrica**.

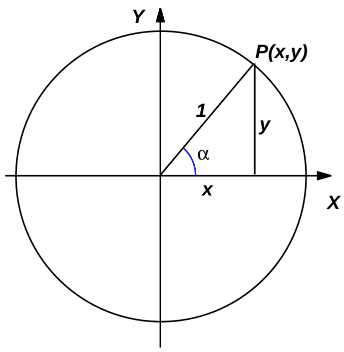


Figura 4.11: Circunferencia goniométrica

Ahora el ángulo α es un ángulo central de la circunferencia. La hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura, que ahora es un radio de la circunferencia, corta a ésta en el punto $P(x, y)$. Entonces, las razones trigonométricas del ángulo α se definen como

$$\operatorname{sen}\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

(Cosecante, secante y cotangente se pueden calcular utilizando sus relaciones con las anteriores.)

Esta idea nos permite dar sentido a las razones trigonométricas de un ángulo de un cuadrante cualquiera. Por ejemplo, si el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, su seno y coseno son los de la figura 4.12. Es decir, su seno es la ordenada y del punto P y el coseno, la abscisa x. Como el punto P está en el segundo cuadrante, el seno será positivo y el coseno será negativo.

Con dibujos análogos, se puede comprobar que el signo de las razones trigonométricas es el indicado en la siguiente tabla (se recomienda no memorizar la tabla,

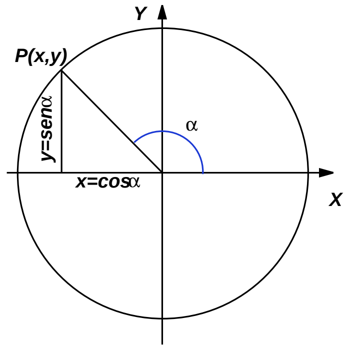


Figura 4.12: Ángulo del segundo cuadrante

cuando sea preciso averiguar un signo se puede hacer el dibujo correspondiente):

Signo de las razones trigonométricas:

	seno	coseno	tangente
1er cuadrante	+	+	+
2^{o} cuadrante	+	–	–
3er cuadrante	–	–	+
4^{o} cuadrante	–	+	–

ACTIVIDADES

8. Sabiendo que $\cos\alpha = \dfrac{-1}{2}$ y que α se encuentra en el tercer cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

9. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-1}{3}$ y que $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcular el resto de las razones trigonométricas.

A partir de la representación de las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica se puede deducir una propiedad importante del seno y del coseno, a saber, que sus valores siempre están comprendidos entre -1 y 1. Esto es debido a que tanto las ordenadas y las abscisas del punto $P(x,y)$ que va recorriendo la circunferencia siempre oscilan entre estos dos valores, por ser 1 el radio de la circunferencia. Por tanto, se verifica, para cualquier ángulo α,

$$\boldsymbol{-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1}$$

Los valores de las distintas razones trigonométricas en los ángulos de 0, 90, 180, 270 y 360 grados se indican en la tabla siguiente, que también se puede deducir a partir de la circunferencia goniométrica:

	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tg	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

(Recordemos que no se puede dividir entre 0, esta es la razón por la que la tangente de 90^0 y 270^0 no existe, $\nexists$).

3.2. Relación entre ángulos de distintos cuadrantes

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo siempre se pueden relacionar con las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante.

Por ejemplo, el ángulo de 135^0 se encuentra en el segundo cuadrante (figura 4.13). Hasta 180^0 le faltan 45^0, que se puede representar en el primer cuadrante.

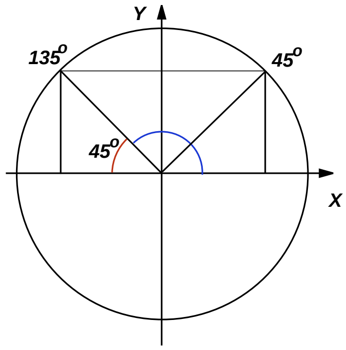


Figura 4.13: Ángulos suplementarios

En la figura se puede observar que el valor del seno de los dos ángulos coincide y el valor del coseno es igual, aunque de signo distinto. Por tanto,

$$\operatorname{sen}(135^0) = \operatorname{sen}(45^0) \qquad \cos(135^0) = -\cos(45^0) \qquad \operatorname{tg}(135^0) = -\operatorname{tg}(45^0)$$

(Dos ángulos, que como 135^0 y 45^0, sumen 180^0, se llaman **ángulos suplementarios**).

Si estamos en el tercer cuandrante, por ejemplo, el ángulo de 200^0 (figura 4.14), prolongando el radio, hasta el primer cuadrante; obtenemos el ángulo de 20^0, que es precisamente la diferencia entre 180^0 y 200^0.

Entonces, a partir de la figura, se puede deducir que tanto seno, como coseno, tienen los mismos valores aunque signos distintos. Por tanto,

$$\operatorname{sen}(200^0) = -\operatorname{sen}(20^0) \qquad \cos(200^0) = -\cos(20^0) \qquad \operatorname{tg}(200^0) = \operatorname{tg}(20^0)$$

Si el ángulo está en el cuarto cuadrante, por ejemplo el ángulo de 300^0, como en la figura 4.15, prolongando el seno del ángulo de 300^0 hasta el primer cuadrante, tenemos el ángulo de 60^0.

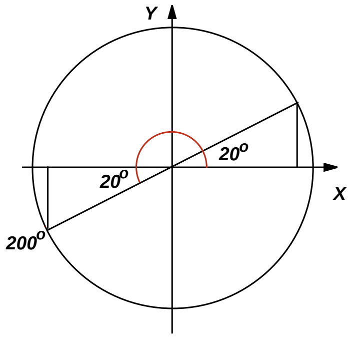


Figura 4.14: Ángulo del tercer y del primer cuadrante

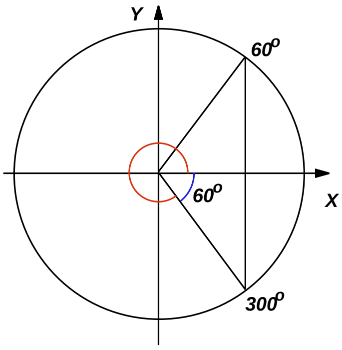


Figura 4.15: Ángulo del cuarto y del primer cuadrante

En la figura apreciamos que el seno de los dos ángulos es igual pero de signo contrario, y el coseno es exactamente el mismo. Entonces,

$$\operatorname{sen}(300^0) = -\operatorname{sen}(60^0) \qquad \cos(300^0) = \cos(60^0) \qquad \operatorname{tg}(300^0) = -\operatorname{tg}(60^0)$$

Por último, también entre dos ángulos del primer cuadrante se puede encontrar una relación, que ya ha aparecido antes. Se trata de dos ángulos que sumen 90^0, que se llaman **ángulos complementarios**. Por ejemplo, en la figura 4.16 hemos dibujado los ángulos de 30^0 y de 60^0, que son complementarios.

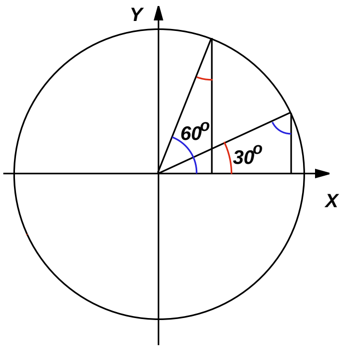


Figura 4.16: Ángulos complementarios

En la figura se observa que los valores del seno y del coseno del ángulo de 30^0 coinciden con los valores del coseno y del seno, respectivamente, del ángulo de 60^0.

Entonces,

$$\mathrm{sen}(30^0) = \cos(60^0) \qquad \cos(30^0) = \mathrm{sen}(60^0) \qquad \mathrm{tg}(30^0) = \mathrm{cotg}(60^0)$$

Tampoco es preciso memorizar estas relaciones, cada vez que se necesiten se pueden representar y deducir fácilmente.

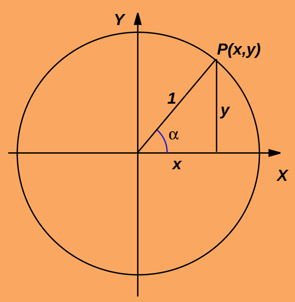
Si el ángulo es superior a 360^0, en primer lugar, habrá que dividir entre 360^0 y quedarse con el resto, después se puede relacionar con un ángulo del primer cuadrante, utilizando alguno de los gráficos anteriores.

ACTIVIDADES

10. Suponiendo que α es un ángulo del primer cuadrante, escribir en función de alguna razón trigonométrica del ángulo α las razones que se indican a continuación:
a) $\mathrm{sen}(\pi - \alpha)$ b) $\cos(\alpha + \pi)$ c) $\mathrm{tg}(-\alpha)$ d) $\mathrm{sen}(2\pi - \alpha)$

Recuerda

- Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera se pueden definir utilizando la circunferencia goniométrica, centrada en el origen, de radio 1, de la forma siguiente:



$$\mathrm{sen}\,\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$$

- A partir de esta definición se pueden deducir los diferentes signos de las razones trigonométricas de un ángulo, dependiendo del cuadrante en el que se encuentre. También, se deduce que

$$-1 \leq \mathrm{sen}\,\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

- Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera siempre se pueden reducir a las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante.

4. Triángulos

Estudiaremos en este apartado dos fórmulas que permiten resolver un triángulo cualquiera. Es decir, conocidos ciertos elementos del triángulo (lados o ángulos), calcular los restantes. Estas fórmulas son el teorema de los senos y el teorema del coseno.

Las fórmulas estarán referidas a los lados y los ángulos de un triángulo no rectángulo cualquiera, nombrados según el siguiente convenio: los ángulos con las letras mayúsculas A, B y C; los ángulos con las letras minúsculas a, b y c; de manera que un ángulo y un lado opuestos tengan la misma letra, como en la figura 4.17.

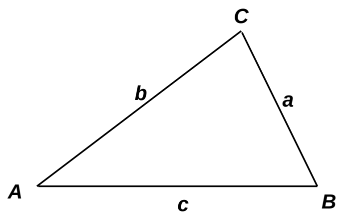


Figura 4.17: Un triángulo no rectángulo

4.1. Teorema de los senos

Si observamos el triángulo de la figura 4.17, podemos observar un hecho que salta a la vista. El ángulo más pequeño, el A está enfrente del lado más pequeño, el a; y el ángulo más grande, el C, está enfrente del lado más largo, el c. Parece que hubiera alguna relación directa entre la medida del ángulo y la medida del lado. Pudiera pensarse que los ángulos y los lados del triángulo fueran estuvieran en proporción directa. Sin embargo, la realidad es que sí hay una relación, aunque a través de los valores de los senos de los ángulos. De hecho se tiene el siguiente resultado, que se denomina **teorema de los senos**:

> En un triángulo cualquiera de ángulos A, B y C, con lados opuestos a, b y c, se verifica
>
> $$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

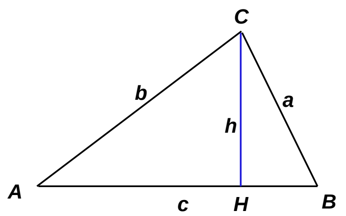


Figura 4.18: Teorema de los senos

Para demostrar el teorema, consideramos el triángulo de la figura 4.18. Se trata del triángulo de la figura anterior, al que hemos añadido su altura sobre el lado c. La altura divide al triángulo en dos triángulos rectángulos: BHC y AHC.

En el triángulo BHC, se tiene que

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \operatorname{sen} B$$

En el triángulo AHC, se tiene que

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \operatorname{sen} A$$

Igualando las dos expresiones de la altura h obtenidas antes,

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$$

de donde se deduce

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

La otra igualdad de la proporción se puede deducir de modo análogo, considerando la altura del triángulo sobre otro de los lados. También es posible demostrar el teorema para el caso en el que alguno de los ángulos sea mayor de 90^0.

A pesar de que resulta un interesante ejercicio el intentar comprender la demostración del teorema, para nosotros, lo importante ahora es aprender a utilizarlo.

Por ejemplo, dado el triángulo de la figura 4.19, vamos a calcular la longitud de los lados a y c.

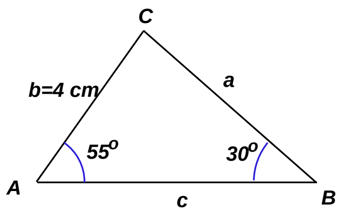


Figura 4.19: Calcular a y c

Vamos a utilizar el teorema de los senos, en particular, empezaremos por utilizar la parte

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Sustituimos en la expresión anterior los datos del problema y despejamos el valor de a,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 55^0} = \frac{b}{\operatorname{sen} 30^0} \Rightarrow a = \frac{4 \cdot \operatorname{sen} 55^0}{\operatorname{sen} 30^0} = 6'55 \text{ cm}$$

Para calcular el valor de c podemos utilizar

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}; \quad \text{o bien} \quad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Lo hacemos con la primera expresión, para lo cual necesitamos saber cuánto mide el ángulo C, pero esto es sencillo, ya que sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera siempre es 180^0. Por tanto, $C = 180^0 - 55^0 - 30^0 = 95^0$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 55^0} = \frac{c}{\operatorname{sen} 95^0} \Rightarrow c = \frac{6'55 \cdot \operatorname{sen} 95^0}{\operatorname{sen} 55^0} = 7'97 \text{ cm}$$

ACTIVIDADES

11. Calcular el valor del ángulo B y del lado c de un triángulo en el que $a = 9$ cm, $b = 6$ cm y $A = 60^0$.

4.2. Teorema del coseno

En un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es a y los catetos son b y c, se verifica el teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Sin embargo, si el triángulo no es rectángulo esto no tiene por qué cumplirse. Pero se verifica una generalización del teorema de Pitágoras que se denomina **teorema del coseno**:

> En un triángulo cualquiera de ángulos A, B y C, con lados opuestos a, b y c, se verifica
>
> $$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

Dado que la asignación de letras a los lados del triángulo es completamente arbitraria, también se verifican las dos fórmulas siguientes, que son equivalentes a la anterior:

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C}$$

El teorema del coseno también se puede demostrar utilizando argumentos geométricos, entre ellos, el teorema de Pitágoras. Sin embargo, en este caso vamos a ir directamente a ver cómo se puede aplicar la fórmula.

Por ejemplo, a partir de los datos del triángulo de la figura 4.20, queremos calcular la longitud del lado a.

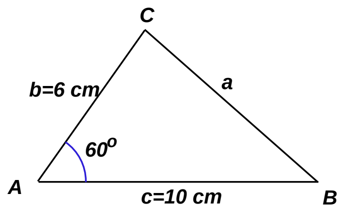


Figura 4.20: Calcular a

Utilizamos el teorema del coseno, con la fórmula que hemos visto en primer lugar, la que empieza por a^2, por razones evidentes. Sustituimos entonces en la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$a^2 = 36^2 + 100^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60^0 = 76$$

Entonces,

$$a = \sqrt{76} = 8'72 \text{ cm}$$

Es importante destacar que este ejemplo no se podría haber hecho utilizando el teorema de los senos, ya que para ello hubiera sido preciso que tuviésemos al menos el valor de un ángulo y el de su lado opuesto.

4.3. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo consiste en calcular el valor de todos sus elementos: ángulos y lados. Para ello acabamos de estudiar dos herramientas: teorema de los senos y teorema del coseno. ¿Cuándo hay que utilizar uno u otro?

El teorema de los senos se puede utilizar siempre que entre los datos se encuentren al menos un ángulo y el lado opuesto, además de algún otro elemento del triángulo.

El teorema del coseno se puede utilizar cuando los datos que tenemos son un ángulo y los dos lados que lo forman. También se puede utilizar cuando disponemos de las medidas de los tres lados, aunque no tengamos ningún ángulo.

Vamos a ver algún ejemplo más:

Tres ciudades A, B y C se encuentran unidas mediante tres carreteras rectas. Las dos carreteras que parten de A hacia las otras dos ciudades forman un ángulo de 120^0. La distancia entre A y B es de 50 kilómetros y la distancia de A a C es de 30 kilómetros. Queremos calcular la distancia de la ciudad B a la ciudad C.

En primer lugar representamos gráficamente los datos del problema.

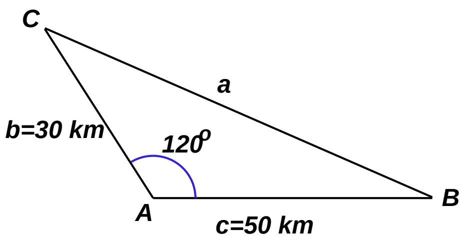


Figura 4.21: Tres ciudades

En la figura 4.21 vemos que la incógnita del problema es el lado a. Entonces, utilizamos el teorema del coseno. Sustituimos en la expresión

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos A$$

$$a^2 = 30^2 + 50^2 - 2{\cdot}30{\cdot}50\cos 120^0 = 4900$$

Entonces,

$$a = \sqrt{4900} = 70 \text{ km}$$

Si ahora quisiéramos calcular el valor de alguno de los otros dos ángulos, podríamos utilizar el teorema de los senos, porque ya tenemos el valor del ángulo A y del lado a.

Otro ejemplo:

Los tres lados de un triángulo miden $a = 3$ cm, $b = 6$ cm y $c = 4$ cm. Calcular el valor de sus ángulos.

También en este caso tenemos que empezar utilizando el teorema del coseno en cualquiera de sus formas. Por ejemplo,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos A$$

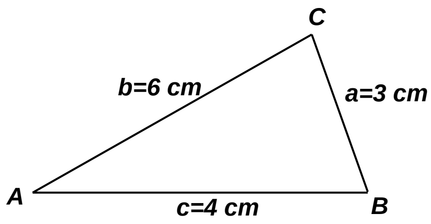


Figura 4.22: Calcular los ángulos

Sustituimos los datos del problema (figura 4.22) y despejamos $\cos A$,

$$3^2 = 6^2 + 4^2 - 2{\cdot}6{\cdot}4{\cdot} \cos A \Leftrightarrow 9 = 36 + 16 - 48 \cos A$$

pasando $\cos A$ al miembro izquierdo,

$$48 \cos A = 43$$

de donde,

$$\cos A = \frac{43}{48} = 0'89583$$

Utilizando la calculadora, obtenemos que

$$A = 26^0\ 23'\ 4''$$

ACTIVIDADES

12. Calcular el valor de los dos ángulos que faltan en el ejemplo anterior. Es decir, sabiendo que $a = 3$ cm, $b = 6$ cm y $c = 4$ cm, y $A = 26^0\ 23'\ 4''$, calcular B y C.

Recuerda

- ✓ *Teorema de los senos:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

- ✓ *Teorema del coseno:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot} \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot} \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2{\cdot}a{\cdot}b{\cdot} \cos C$$

- ✓ El teorema de los senos se puede utilizar para resolver un triángulo en el que se conozcan dos ángulos y algún lado, o bien, dos lados y el ángulo opuesto de uno de ellos.

  El teorema del coseno se puede utilizar para resolver un triángulo en el que se conozca el valor de un ángulo y el de los dos lados que lo forman, o bien, los tres lados del triángulo.

5. Relaciones trigonométricas

Vamos a estudiar en este último apartado algunas relaciones trigonométricas, además de la relación fundamental, ya estudiada antes. También veremos cómo se pueden resolver algunas ecuaciones en las que aparecen razones trigonométricas.

5.1. Seno y coseno de una suma

Vamos a deducir una fórmula para el seno de una suma de dos ángulos, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, en función del seno y coseno de los ángulos α y β. La deducción no es fácil, sobre todo en una primera lectura, pero puede resultar un buen ejercicio, aunque difícil, intentar comprenderla. A pesar de todo, para el desarrollo posterior, no es imprescindible su comprensión.

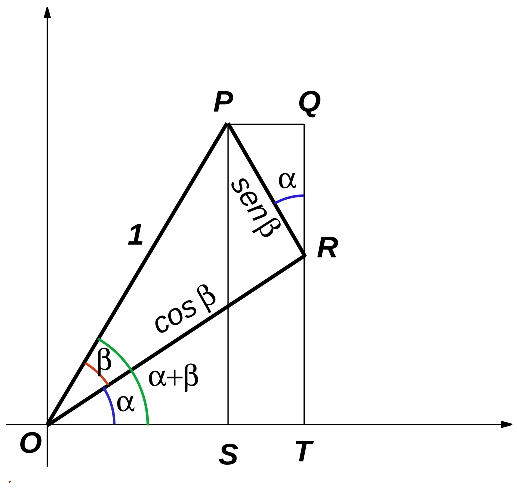


Figura 4.23: Seno de una suma

Vamos a utilizar la figura 4.23. En esta figura hemos dibujado un triángulo rectángulo, el OPR en el que la hipotenusa mide 1. De esta forma, el cateto opuesto y el adyacente del ángulo β son, respectivamente, $\operatorname{sen}\beta$ y $\cos\beta$.

Si consideramos el triángulo rectángulo OPS, tenemos que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = PS$ Pero

$$PS = TQ = TR + RQ$$

Según el triángulo ORT,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{TR}{\cos\beta} \Rightarrow TR = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

Según el triángulo PQR,

$$\cos\alpha = \frac{RQ}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow RQ = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Entonces,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = TR + RQ = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Con lo que, si el lector ha tenido la paciencia de llegar hasta este punto, habrá comprobado que hemos obtenido la fórmula del **seno de una suma**:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Con argumentos similares, se puede comprobar que el **coseno de una suma**:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

A partir de estas dos fórmulas, se pueden obtener multitud de relaciones trigonométricas, mediante manipulaciones algebraicas, algunas de las cuales vamos a proponer a continuación como actividades.

ACTIVIDADES

13. Utilizando la fórmula del seno de una suma, calcular el seno de una diferencia, es decir, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

14. Utilizando la fórmula del coseno de una suma, calcular el coseno de una diferencia, es decir, $\cos(\alpha-\beta)$.

15. Utilizando las fórmulas del seno y del coseno de una suma, calcular la tangente de una suma, es decir, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.
(Indicación: utilizar el hecho de que $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ y dividir el numerador y el denominador de la expresión que se obtiene por el producto $\cos\alpha\cos\beta$).

Otras dos fórmulas importantes son el seno y el coseno del ángulo doble:
El seno del ángulo doble se puede obtener a partir de la fórmula del seno de una suma, sin más que aplicar esta fórmula a $\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)$, e ir cambiando β por α.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Por tanto,

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

ACTIVIDADES

16. Comprobar que la fórmula del coseno del ángulo doble es

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

5.2. Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en la que aparecen razones trigonométricas.

Veamos algunos ejemplos:

Queremos resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x = 1$$

Se trata de encontrar todos los ángulos cuyo seno es 1. Sabemos que el ángulo de 90^0 verifica esta condición. Y también lo harán los ángulos que se obtengan cada vez que a este ángulo le sumemos 360^0, es decir, cada vez que demos una vuelta completa a la circunferencia. Entonces, todas las soluciones son de la forma

$$x = 90^0 + 360k$$

donde k es un número entero de vueltas.

ACTIVIDADES

17. Resolver la ecuación trigonométrica $\cos x = -1$.

Las ecuaciones trigonométricas pueden ser algo más complicadas. Por ejemplo, pueden involucrar más de una razón trigonométrica. En este caso lo que hay que hacer es intentar reducirla a una única razón, para poder llegar a alguna ecuación como las anteriores.

Por ejemplo, queremos resolver la ecuación

$$3 - 2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x = 0$$

sabiendo que x es un ángulo tal que $0^0 \leq x \leq 90^0$.

Utilizamos la relación fundamental de la trigonometría para transformar $\operatorname{sen}^2 x$. Como

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación,

$$3 - 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$$

Hacemos operaciones y llegamos a la ecuación

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

que no es más que una ecuación de segundo grado en $\cos x$. Resolvemos esta ecuación y obtenemos

$$\cos x = \frac{1}{2} \qquad \cos x = 1$$

que son dos ecuaciones sencillas, como las que hemos empezado estudiando.

Sus soluciones son (comprobarlo)

$$x = 60^0 \qquad x = 0^0$$

debido a que nos indicaban que las soluciones sólo podían estar comprendidas entre 0^0 y 90^0, incluidos estos ángulos.

ACTIVIDADES

18. Resolver la ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$$

Recuerda

- *El seno y el coseno de una suma:*

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

- *El seno y el coseno del ángulo doble:*

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

- Una *ecuación trigonométrica* es una ecuación en la que la incógnita aparece involucrada con razones trigonométricas. Se resuelven intentando reducirlas de manera que sólo aparezca una razón trigonométrica: seno o coseno igual a algún valor.

5 Geometría: puntos, vectores y rectas

ÍNDICE DE CONTENIDOS

En esta unidad comenzaremos el estudio de la geometría analítica plana. La Geometría se puede estudiar desde muchos puntos de vista, el punto de vista de la Geometría Analítica se diferencia de otras formas en que, para estudiar los diferentes elementos geométricos, se introducen coordenadas. Esto permite transformar los problemas geométricos en problemas algebraicos. Por otra parte, los elementos que estudiaremos aquí serán los puntos, vectores y rectas. Con ellos aprenderemos a resolver problemas de incidencia, paralelismo y distancias. Este importante concepto, el de distancia, será utilizado en la unidad siguiente para estudiar otros objetos geométricos más complejos: las cónicas.

1. Puntos y vectores

1.1. Puntos. Distancia entre dos puntos

Ya sabemos representar puntos en unos ejes de coordenadas, se ha utilizado en cursos anteriores y en algunas unidades precedentes. Representaremos los puntos mediante letras mayúsculas, por ejemplo; $A(2,2)$, $B(-3,2)$, $C(3,-2)$ (ver figura 5.1).

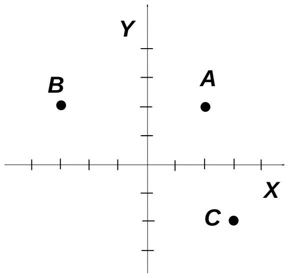


Figura 5.1: Puntos $A(2,2)$, $B(-3,2)$, $C(3,-2)$

Utilizando el teorema de Pitágoras, se puede determinar la **distancia entre dos puntos** en el plano, a partir de sus coordenadas de la siguiente forma:

Si $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ (figura 5.2) son dos puntos del plano, su distancia se puede calcular mediante la fórmula

$$\boldsymbol{d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

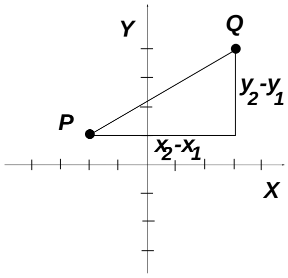


Figura 5.2: Distancia entre los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$

En la figura vemos que la distancia entre los dos puntos es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden (x_2-x_1) e (y_2-y_1).

Por ejemplo, si queremos calcular la distancia entre los puntos $P(2,3)$ y $Q(-2,1)$, aplicando la fórmula anterior,

$$d(P,Q) = \sqrt{(-2-2)^2+(1-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$$

Tal y como está definida la fórmula de distancia, el resultado sería el mismo si calculásemos la distancia $d(Q,P)$.

1.2. Vectores en el plano

Además de los puntos, para estudiar la geometría analítica en el plano, utilizaremos otro elemento; el vector.

Un **vector** $\vec{u}$ en el plano es un segmento orientado que viene caracterizado por las siguientes propiedades:

- **Módulo**. Es la longitud del segmento. Se denota por $|\vec{u}|$.
- **Dirección**. Es la indicada por la recta en la que se apoya el vector (figura 5.3).
- **Sentido**. El indicado por la flecha. Cada dirección tiene dos sentidos. Por esta razón decimos que un vector es un segmento orientado, porque tiene un sentido.

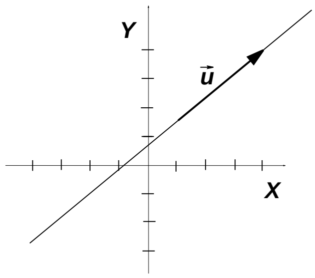


Figura 5.3: Vector $\vec{u}$

Representaremos los vectores mediante letras minúsculas con una flecha encima; $\vec{a}$, $\vec{b}$, etc.

Las únicas características que vamos a considerar son las expuestas más arriba. Esto significa que, para que dos vectores sean iguales, es preciso que sean iguales sus módulos, direcciones y sentidos. No importa, el lugar en el que estén situados, siempre que compartan estos tres atributos. Por ejemplo, en la figura 5.4 hemos dibujado el vector $\vec{v}$ en diferentes posiciones, pero en todos los casos es el mismo vector.

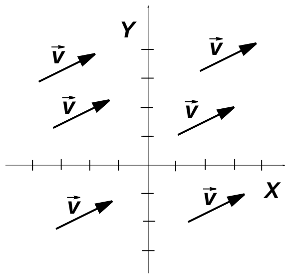


Figura 5.4: Vector $\vec{v}$

Debido a que no importa en qué lugar situamos el vector en el plano, sino solamente su módulo, dirección y sentido, se les llama **vectores libres**.

Un vector también se puede determinar mediante un par ordenado de números, que son sus coordenadas. Aunque el significado de las coordenadas de un vector es distinto de las coordenadas de un punto.

Un vector se puede interpretar como un movimiento que nos traslada desde un punto A a un punto B, como se muestra en la figura 5.5. Entonces, las coordenadas del vector $\vec{v}$ son la diferencia de las coordenadas de los puntos B y A. Es decir, si el

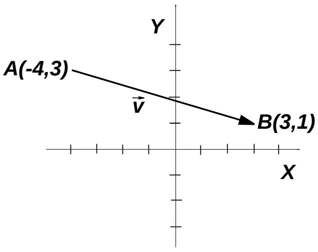


Figura 5.5: Vector $\vec{v} = \vec{AB}$

vector $\vec{v}$ tiene de extremos los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ sus coordenadas son

$$\boldsymbol{\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

En el caso del vector de la figura 5.5, estas coordenadas son

$$\vec{v} = (7, -2)$$

Las dos coordenadas de un vector se pueden interpretar como las unidades que hay que caminar para ir desde el origen al extremo del vector: la primera coordenada, las unidades que hay que caminar en dirección horizontal; la segunda coordenada, las unidades que hay que caminar en dirección vertical; cada una con sus respectivos signos, como se muestra en la figura 5.6.

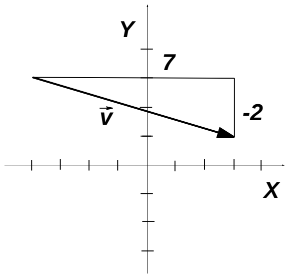


Figura 5.6: Vector $\vec{v} = (7, -2)$

A partir de las coordenadas de un vector, se puede calcular fácilmente su módulo, ya que el módulo pasa a ser la distancia entre los dos puntos que une ese vector. Por tanto, dado el vector de coordenadas $\vec{v}(v_1, v_2)$, su módulo se puede calcular mediante

$$\boldsymbol{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

ACTIVIDADES

1. Se llama **vector de posición** de un punto A al vector que une el origen de coordenadas $O(0,0)$ con el punto A. Calcular los vectores de posición los puntos $A(-1,2)$ y $B(3,3)$. Representarlos gráficamente.

2. Calcular el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo $P(-1,3)$ y $Q(3,4)$.

Recuerda

✓ Dados dos puntos en el plano, $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$, su *distancia* se calcula mediante la fórmula

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

✓ Un *vector* $\vec{u}$ en el plano es un segmento orientado que viene caracterizado por las siguientes propiedades:

- *Módulo*. Es la longitud del segmento. Se denota por $|\vec{u}|$.
- *Dirección*. Es la de la recta en la que se apoya el vector.
- *Sentido*. El indicado por la flecha.

✓ Las coordenadas del vector que $\vec{v}$ que une los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ se calculan restando las coordenadas de los puntos, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

✓ El *módulo* del vector de coordenadas $\vec{v}(v_1,v_2)$ es $|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$.

2. Operaciones con vectores

2.1. Suma de vectores

Dados dos vectores de coordenadas $\vec{u}(u_1,u_2)$ y $\vec{v}(v_1,v_2)$, su suma es el vector de coordenadas

$$\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)}$$

Sumar dos vectores es sumar las primeras y las segundas coordenadas de los vectores iniciales por separado.

Geométricamente, la suma se puede hacer como se muestra en la figura 5.7. Se trata de hacer que los vectores tengan el mismo origen, y dibujar la diagonal del paralelogramo que forman. Esta forma de sumar vectores se llama **regla del paralelogramo**.

En la figura 5.8 se describe otra forma equivalente de sumar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Consiste en poner el vector $\vec{v}$ a continuación del vector $\vec{u}$. La suma $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector que va desde el origen del $\vec{u}$ hasta el extremo del vector $\vec{v}$.

Algebraicamente, se trata de hacer dos sumas simultáneamente. Por esta razón, todas las propiedades que cumple la suma de números reales, también las cumple la

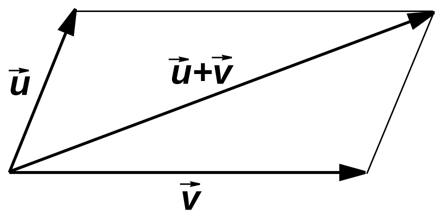


Figura 5.7: Regla del paralelogramo

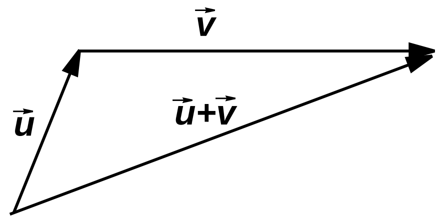


Figura 5.8: Suma de vectores

suma de vectores. En concreto, la suma de vectores verifica las siguientes propiedades:

Asociativa. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$. Es decir, para sumar tres vectores, se pueden asociar dos de ellos y depués sumar el tercero, y el resultado es el mismo sean cuales sean los que se asocien.

Conmutativa. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$. Lo que significa que no importa el orden en el que se sumen dos vectores, el resultado es el mismo.

Existencia de elemento neutro. Existe un vector, el **vector nulo**, de coordenadas $\vec{0}(0,0)$, tal que, $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = u$, para cualquier vector $\vec{u}$.

Existencia de elemento opuesto. Dado un vector cualquiera $\vec{u}$, existe otro $(-\vec{u})$, con el mismo módulo y dirección, pero distinto sentido que el primero, tal que, $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$.

2.2. Producto por un escalar

Veamos otra operación en la que aparecen involucrados los vectores, el producto de un vector por un **escalar**. Con escalar nos referimos simplemente a un número real. Esta es habitualmente la denominación que se da a los números, para distinguirlos de los vectores, cuando se habla de las dos cosas. Los representaremos por letras minúsculas: $a, b, c, ...$

Si a es un número real y $\vec{u}(u_1, u_2)$ es un vector, se define el producto del escalar a por el vector $\vec{u}$, de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{a \cdot \vec{u} = a \cdot (u_1, u_2) = (au_1, au_2)}$$

Por ejemplo, para multiplicar el vector $\vec{u}(2,4)$ por el número 3, sólo hay que multiplicar por 3 cada una de las dos coordenadas del vector,

$$3\vec{u} = 3(2,4) = (6,12)$$

Geométricamente, si multiplicamos un vector $\vec{u}$ por 2, por ejemplo, el resultado es otro vector, con la misma dirección, el mismo sentido, pero módulo 2 veces mayor que el vector original. Si el escalar es negativo, entonces cambia el sentido del vector. En la figura 5.9 se han dibujado varios ejemplos de productos de un vector por un escalar.

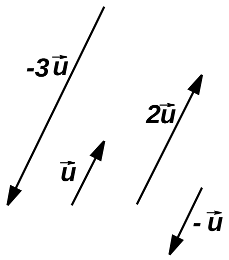


Figura 5.9: Producto por un escalar

El producto de un escalar por un vector cumple las siguientes propiedades,

- $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$
- $(a+b)\vec{u} = a\vec{u}+b\vec{u}$
- $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

ACTIVIDADES

3. Dados los vectores $\vec{u}(2,3)$, $\vec{v}(-1,2)$ y $\vec{w}(-3,-2)$. Efectuar las siguientes operaciones entre ellos:
a) $3\vec{u}-\vec{v}$ b) $\vec{u}-2(\vec{u}+2\vec{w})$ c) $3\vec{w}-\vec{u}+2\vec{v}$

La suma de vectores y el producto por escalares nos permiten definir una importante relación geométrica y algebraica entre vectores.

Supongamos que tenemos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Si cada uno de ellos lo multiplicamos por un escalar, y después los sumamos, obtenemos un tercer vector, por ejemplo,

$$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$$

Decimos que $\vec{w}$ es una **combinación lineal** de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. También es posible decir que $\vec{w}$ *depende linealmente* de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Pensemos en dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Si $\vec{u}$ se puede escribir como combinación lineal de $\vec{v}$, entonces, existe algún número real k tal que

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Decimos entonces que estos dos vectores son **linealmente dependientes**. Pero entonces, por lo que hemos visto en el producto por escalares, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores con la misma dirección, es decir, paralelos.

Si no hay posibilidad de escribir uno de los vectores como combinación lineal del otro, decimos que son **linealmente independientes**, y por tanto, no son paralelos.

En resumen (figura 5.10),

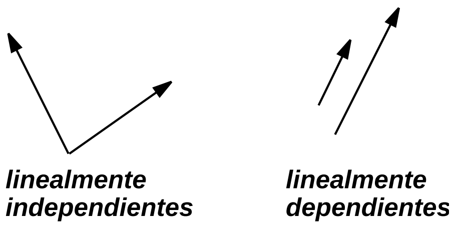


Figura 5.10: Dependencia e independencia lineal

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *linealmente dependientes* y *paralelos* si, y sólo si, uno de ellos se puede escribir como combinación lineal del otro, es decir, existe k tal que

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

ACTIVIDADES

4. Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u}(2,3)$ y $\vec{v}(4,6)$ b) $\vec{a}(0,1)$ y $\vec{b}(1,3)$ c) $\vec{c}(1,-3)$ y $\vec{d}\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

También a partir de las operaciones anteriores entre vectores se puede resolver un problema geométrico entre puntos, el del cálculo del *punto medio* de un segmento. Lo vamos a resolver para un ejemplo. Dados los puntos de coordenadas $A(-1,2)$ y $B(3,4)$, queremos calcular las coordenadas del punto medio M del segmento que une A y B.

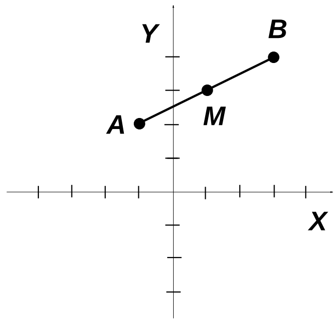


Figura 5.11: Punto medio

En la figura 5.11 hemos representado los puntos A, B y el punto M, cuyas coordenadas queremos calcular. Si consideramos los vectores $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AB}$, vemos en el dibujo que son tienen el mismo sentido y uno es el doble que el otro, exactamente se verifica que

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$$

Pero como las coordenadas de cada vector se calculan restando las del extremo menos las del origen, la relación entre las coordenadas del punto son $B - A = 2(M - A)$, de donde,

$$M = \frac{1}{2}(A + B)$$

Por tanto, para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento, se suman las coordenadas de los extremos y se dividen entre dos, es decir, son las medias aritméticas de las coordenadas de los puntos.

$$M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (1, 3)$$

Más que aprender el resultado de memoria lo importante es aprender el procedimiento para aplicarlo en otras situaciones.

ACTIVIDADES

5. Calcular las coordenadas del punto P que se encuentra en el segmento que une $A(2, 2)$ y $B(5, 9)$ a doble distancia de A que de B (entre los dos puntos.)

2.3. Producto escalar

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se define el **producto escalar** entre ellos como el número

$$\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \cos\alpha}$$

donde $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ son los módulos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y α es el ángulo que forman (no importa que sea positivo o negativo, ya que $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.)

El producto escalar es un número, no un vector. Por eso se llama así.

Se puede comprobar que si los vectores vienen dados por sus coordenadas: $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$, entonces el producto escalar se puede calcular

$$\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

Veamos algunas consecuencias y aplicaciones del producto escalar:

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$, ya que el ángulo de un vector por sí mismo es nulo, por tanto su coseno es 1. A partir de esta propiedad, el módulo de un vector se puede escribir de la forma
$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$
- Podemos utilizar el producto escalar precisamente para calcular el ángulo que forman dos vectores. Por ejemplo, queremos calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{u}(1, 0)$ y $\vec{v}(2, 2)$. De la expresión del producto escalar, despejamos el coseno del ángulo,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Entonces, utilizando las coordenadas de los vectores,

$$\cos\alpha = \frac{1{\cdot}2 + 0{\cdot}2}{\sqrt{1^2+0^2}\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

de donde se puede deducir que $\alpha = 45^0$.

- Si dos vectores son perpendiculares, entonces el ángulo que forman es de 90^0, como $\cos 90^0 = 0$, el producto escalar será nulo. Con lo que podemos utilizar el producto escalar para determinar si dos vectores son perpendiculares, es decir,

$$\boldsymbol{\vec{u}} \text{ y } \boldsymbol{\vec{v}} \text{ son perpendiculares si } \boldsymbol{\vec{u}{\cdot}\vec{v} = 0}$$

ACTIVIDADES

6. Calcular las coordenadas de un vector perpendicular al vector $\vec{u}(2,3)$.

Recuerda

✓ *Suma de vectores*. Dados $\vec{u}(u_1,u_2)$ $\vec{v}(v_1,v_2)$,

$$\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2)$$

✓ *Producto por un escalar*. Si $\vec{u}(u_1,u_2)$ y a es un escalar (número real,)

$$a{\cdot}\vec{u} = a{\cdot}(u_1,u_2) = (au_1, au_2)$$

✓ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *linealmente dependientes* y *paralelos* si y sólo si uno de ellos se puede escribir como combinación lineal del otro, es decir, existe k tal que

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

✓ *Producto escalar*.

$$\vec{u}{\cdot}\vec{v} = |\vec{u}|{\cdot}|\vec{v}|{\cdot}\cos\alpha$$

✓ El producto escalar a partir de las coordenadas. Si $\vec{u}(u_1,u_2)$ y $\vec{v}(v_1,v_2)$, entonces,

$$\vec{u}{\cdot}\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

✓ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *perpendiculares* si $\vec{u}{\cdot}\vec{v} = 0$.

3. Ecuaciones de la recta

Por dos puntos P y Q en el plano pasa una y sólo una recta r (figura 5.12). De manera que dos puntos son suficientes para determinar completamente una recta.

También queda determinada conociendo un punto P y un vector $\vec{v}$ que nos indique su dirección (figura 5.13), sería válido cualquier vector que una dos puntos cualesquiera de la recta. A este vector le llamaremos **vector de dirección** de la recta. Cuando pensamos en un vector de dirección de una recta sólo nos importa su dirección, no el módulo ni el sentido. De manera que una recta tiene infinitos vectores de dirección posibles.

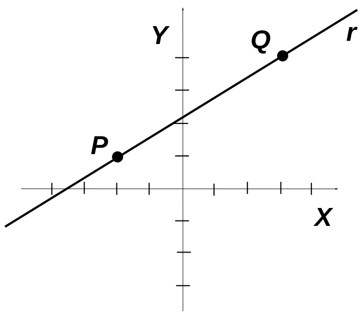


Figura 5.12: r determinada por dos puntos

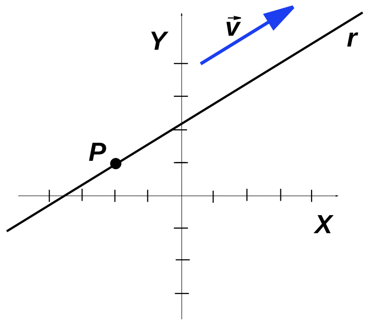


Figura 5.13: r determinada por punto y vector

A partir de estos datos, un punto y un vector, vamos a estudiar cómo se pueden determinar las ecuaciones de una recta.

3.1. Ecuaciones vectorial y paramétrica

Supongamos que la recta r pasa por el punto $P(p_1, p_2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v}(v_1, v_2)$. Sea $X(x, y)$ un punto cualquiera de la recta, es decir, un punto genérico. Queremos obtener una expresión que describa las coordenadas de cualquier punto X de la recta.

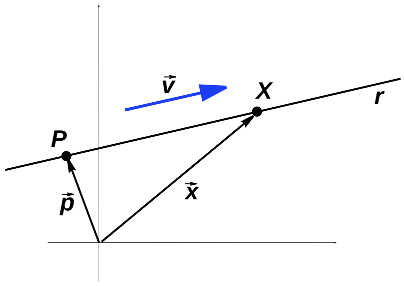


Figura 5.14: Recta

Sean $\vec{p}$ y $\vec{x}$ los vectores de posición de los puntos P y X, respectivamente. Según vemos en la gráfica de la figura 5.14, el vector $\vec{x}$ se puede obtener como la suma del vector $\vec{p}$ y el vector $\overrightarrow{PX}$, es decir,

$$\vec{x} = \vec{p} + \overrightarrow{PX}$$

En la misma figura observamos que el vector $\overrightarrow{PX}$ y el vector de dirección de la recta $\vec{v}$ son paralelos y, por tanto, linealmente dependientes. Entonces, existe un número real

t tal que

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{v}$$

Sustituyendo en la igualdad vectorial anterior, tenemos

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$$

Sustituyendo las coordenadas de cada vector, obtenemos finalmente la expresión

$$\boxed{\boldsymbol{(x,y) = (p_1,p_2) + t(v_1,v_2)}}$$

que se demonima **ecuación vectorial** de la recta.

Por ejemplo, la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P(1,2)$ y tiene como vector de dirección $\vec{v}(-1,2)$ es

$$(x,y) = (1,2) + t(-1,2)$$

Si damos valores a t obtenemos puntos de la recta. A medida que t va recorriendo los números reales vamos obteniendo todos los puntos de la recta. En este sentido, la ecuación vectorial se puede interpretar como la ecuación que describe el movimiento de una partícula a lo largo de una recta, para cada instante de tiempo t tenemos una posición de la partícula. Por ejemplo, para el instante $t = 0$, tenemos el punto $(x,y) = (1,2)$; para el instante $t = 2$, tenemos el punto $(x,y) = (-1,6)$; etc. Se dice que t es un **parámetro**, una variable que, para cada uno de sus valores, determina un punto de la recta.

A partir de la ecuación vectorial, si operamos en el miembro derecho de la ecuación,

$$(x,y) = (p_1,p_2) + t(v_1,v_2) = (p_1,p_2) + (tv_1,tv_2) = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2)$$

y ahora separamos las dos coordenadas de los vectores, obtenemos,

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = p_1 + tv_1} \\ \boldsymbol{y = p_2 + tv_2} \end{cases}}$$

A esta expresión se le denomina **ecuación paramétrica** (o ecuaciones paramétricas) de la recta. Su significado es el mismo que el de la ecuación vectorial, sólo que escrita de otra forma.

ACTIVIDADES

7. Calcular la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $P(1,3)$ y $Q(-2,5)$. Calcular previamente un vector de dirección de la recta. Calcular dos puntos de la recta que no sean P y Q.

8. Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(2,-1)$. Averiguar si los puntos $P(4,-1)$ y $Q(0,3)$ pertenecen a ella.

3.2. Ecuaciones continua y general

Partimos de la ecuación paramétrica de la recta,

$$\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases}$$

Vamos a eliminar el parámetro t, para ello despejamos t en las dos ecuaciones e igualamos las expresiones obtenidas.

De la primera ecuación, $t = \dfrac{x - p_1}{v_1}$. De la segunda ecuación, $t = \dfrac{x - p_2}{v_2}$.

Igualando las dos expresiones, obtenemos

$$\boxed{\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{x - p_2}{v_2}}$$

Esta es la llamada **ecuación continua** de la recta.

Si en la ecuación continua quitamos los denominadores y pasamos todos los términos a uno de los miembros, tenemos

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{x - p_2}{v_2} \Rightarrow v_2(x - p_1) = v_1(x - p_2) \Rightarrow v_2x - v_1y - v_2p_1 + v_1p_2 = 0$$

Llamando $a = v_2$, $b = -v_1$ y $c = -v_2p_1 + v_1p_2$, obtenemos una expresión de la forma

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

A esta ecuación le llamamos **ecuación general** (o implícita) de la recta. Esta es una de las ecuaciones más importantes de la recta, debido a que si los coeficientes a, b y c están simplificados (son primos entre sí) la ecuación es única, salvo quizá en el signo. Cosa que no ocurre con las ecuaciones anteriores, ya que su forma depende del punto y del vector de dirección elegidos.

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(2,1)$ con vector de dirección $\vec{v}(1,-2)$.

Escribimos en primer lugar la ecuación continua,

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-2}$$

Quitamos los denominadores y pasamos todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación,

$$-2x + 4 = y - 1 \Rightarrow -2x - y + 3 = 0$$

(cambiamos de signo a toda la ecuación para que el primer coeficiente sea positivo),

$$2x + y - 3 = 0$$

Para obtener puntos de la recta a partir de la ecuación general sólo hay que dar valores a una de las variables y despejar la otra. Por ejemplo, en la ecuación anterior si $x = 0$, entonces $y = 3$, luego el punto $A(0, 3)$ está en la recta.

Para verificar si un punto se encuentra en la recta, sólo hay que sustituir sus coordenadas en x e y y comprobar que se verifica la ecuación. Por ejemplo, se puede comprobar que el punto de coordenadas $B(2, -1)$ se encuentra en la recta de ecuación $2x + y - 3 = 0$, ya que

$$2 \cdot 2 + (-1) - 3 = 0$$

ACTIVIDADES

9. La recta r está determinada por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$. Calcular la ecuación general de r.

10. Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta de ecuación general $3x - y + 8 = 0$.

11. Describir cómo son las rectas de ecuaciones $x - 2 = 0$, $y - 3 = 0$.

3.3. Ecuaciones punto-pendiente y explícita

Volvamos a la ecuación continua de la recta,

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

Vamos a despejar la expresión $y - p_2$ de la ecuación, es decir, el numerador del miembro derecho, v_2 pasa multiplicando al otro miembro y tenemos

$$y - p_2 = \frac{v_2(x - p_1)}{v_1}$$

que también se puede escribir

$$y - p_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - p_1)$$

Si llamamos $m = \dfrac{v_2}{v_1}$, la ecuación anterior se puede escribir

$$\boldsymbol{y - p_2 = m(x - p_1)}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación punto-pendiente** de la recta. Recibe este nombre porque en ella se aprecia un punto, $P(p_1, p_2)$, y el número $m = \dfrac{v_2}{v_1}$, que se puede calcular a partir de las coordenadas del vector de dirección $\vec{v}(v_1, v_2)$, se llama **pendiente** de la recta.

La pendiente de una recta es uno de sus atributos más importantes, ya que es el número que mide su inclinación. Según podemos ver en la figura 5.15, en la que hemos representado un vector de coordenadas $\vec{v}(v_1, v_2)$, la pendiente es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo α del triángulo rectángulo que se forma en la figura.

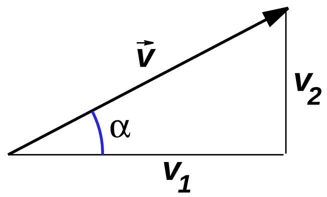


Figura 5.15: Pendiente

Es decir, la pendiente de la recta es la tangente del ángulo que forma el vector con la horizontal,

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Pensando en la recta, la pendiente es la tangente del ángulo que forma ésta con el eje X, medido en sentido positivo.

Mientras que una recta puede tener muchos vectores de dirección, pendientes sólo tiene una, si ésta se puede calcular. (¿En qué caso no se puede calcular?)

Por último, si en la ecuación punto-pendiente quitamos los paréntesis y despejamos y, obtenemos $y - p_2 = mx - mp_1 \Rightarrow y = mx - mp_1 + p_2$.

Haciendo $n = -mp_1 + p_2$, llegamos a la ecuación

$$\boldsymbol{y = mx + n}$$

que se llama **ecuación explícita** de la recta. En la ecuación explícita el número m sigue siendo la pendiente de la recta y el número n es la **ordenada en el origen** de la recta, es decir, el punto en el que la recta corta al eje Y. Ya que si hacemos $x = 0$, se obtiene $y = n$, por lo que la recta pasa por el punto $(0, n)$ que es un punto del eje Y, como vemos en la figura 5.16.

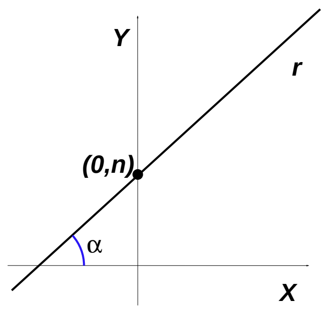


Figura 5.16: Recta $y = mx + n$

La ecuación explícita también se puede obtener a partir de la ecuación general, despejando y.

ACTIVIDADES

12. Calcular las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por los puntos $P(2, 3)$ y $Q(3, -3)$.

13. ¿Cuál es la pendiente de una recta horizontal? ¿Cuál es la pendiente de una recta vertical?

Recuerda

Sea r una recta que pasa por el punto $P(p_1, p_2)$ y tiene a $\vec{v}(v_1, v_2)$ como vector de dirección:

- ✓ La *ecuación vectorial* de la recta r es
$$(x, y) = (p_1, p_2) + t(v - 1, v_2)$$

- ✓ La *ecuación paramétrica* de la recta r es
$$\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases}$$

- ✓ La *ecuación continua* de la recta r es
$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{x - p_2}{v_2}$$

- ✓ La *ecuación general* o implícita de la recta r es
$$ax + by + c = 0$$
La ecuación general se puede obtener a partir de la continua, quitando los paréntesis y operando.

- ✓ La *ecuación punto-pendiente* de la recta es r es
$$y - p_2 = m(x - p_1)$$
donde $m = \dfrac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg} \alpha$ es la *pendiente* de la recta. La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje X, mide la inclinación de la recta.

- ✓ La *ecuación explícita* de la recta r es
$$y = mx + n$$
donde m es la pendiente y n es la ordenada en el origen, es decir, el punto en el que la recta corta al eje Y.

4. Posiciones y distancias

4.1. Posiciones relativas de dos rectas

Si dibujamos dos rectas r y s en el plano, sus posiciones relativas pueden ser: paralelas, secantes o coincidentes, como se muestra en la figura 5.17.

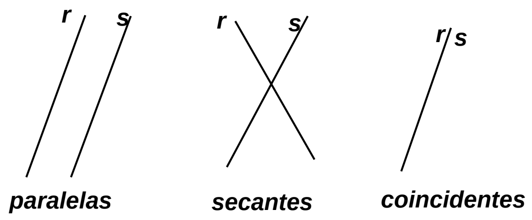


Figura 5.17: Posiciones relativas

Para determinar estas posiciones relativas, resolvemos el sistema de ecuaciones formado por sus ecuaciones generales. Si las rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. Si las rectas son secantes, el sistema tiene una única solución que es el punto de corte. Si las dos ecuaciones son iguales o proporcionales, entonces son coincidentes.

Por ejemplo, las rectas de ecuaciones $r: \ 2x+3y-2=0$ y $s: \ 2x+3y-3=0$ son paralelas, el sistema no se puede resolver, aplicando el método de reducción llegaríamos a una igualdad imposible. Observemos que los coeficientes de la x y de la y son iguales.

Las rectas de ecuaciones $r: \ x+y-2=0$ y $s: \ x-y=0$ son secantes. Resolviendo el sistema se puede comprobar que $x=1$ y $y=1$. Por tanto, se cortan el el punto $P(1,1)$.

Las rectas de ecuaciones $r: \ 2x+y+2=0$ y $s: \ 4x+2y+4=0$ son coincidentes, ya que si simplificamos la segunda (dividiendo entre 2,) obtenemos la primera.

ACTIVIDADES

14. Estudiar las posiciones relativas de las rectas

$$r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \end{cases} \quad \text{y } s: \ 3x+y-5=0$$

15. ¿Cómo son los vectores de dirección de dos rectas paralelas? ¿Cómo son las pendientes de dos rectas paralelas? Poner ejemplos.

16. Calcular la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(2,3)$ y es paralela a la recta $y=2x+1$.

4.2. Rectas perpendiculares. Vector normal

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores de dirección son perpendiculares (figura 5.18). Según vimos en la sección correspondiente al producto escalar. Si el vector de una de ellas es $\vec{v}(v_1, v_2)$ para obtener otro vector perpendicular, es decir, de tal forma que su producto escalar sea nulo, basta con cambiar de orden las coordenadas y a una de ellas de signo, por ejemplo, el vector $\vec{w}(v_2, -v_1)$.

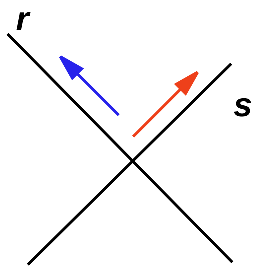


Figura 5.18: Rectas perpendiculares

¿Qué ocurre entonces con sus pendientes?

La pendiente de la recta de vector $\vec{v}$ es $m = \dfrac{v_2}{v_1}$. La pendiente de la recta de vector $\vec{w}$ es $m' = \dfrac{-v_1}{v_2}$. Se comprueba que las pendientes de dos rectas perpendiculares están relacionadas mediante

$$\boldsymbol{m' = \frac{-1}{m}}$$

Por otra parte, cuando obtuvimos la ecuación general de la recta,

$$ax + by + c = 0$$

los coeficientes de la x y de la y eran, respectivamente, $a = v_2$ y $b = -v_1$, pero

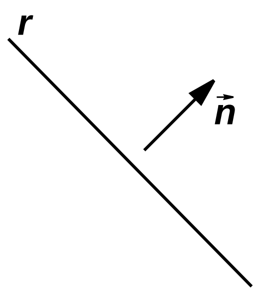


Figura 5.19: Vector normal a una recta

estas son las coordenadas de un vector perpendicular al vector de dirección, según acabamos de ver. Por lo tanto el vector $\vec{n}(a, b)$ es un vector perpendicular a la recta de ecuación $ax + by + c = 0$. A este vector se le llama **vector normal** de la recta (figura 5.19).

El vector normal a una recta se puede utilizar para calcular la ecuación de una recta perpendicular a la que nos dan por un punto determinado.

ACTIVIDADES

17. Calcular la ecuación general de la recta s perpendicular a $r:\ 3x - y + 1 = 0$ que pasa por el punto $A(2,1)$. Calcular las pendientes de ambas rectas.

4.3. Distancia entre puntos y rectas

Supongamos que queremos calcular la distancia entre el punto $P(p_1, p_2)$ y la recta de ecuación general $r:\ ax + by + c = 0$ (figura 5.20).

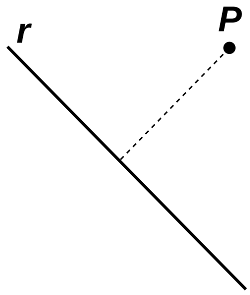


Figura 5.20: Distancia de un punto a una recta

Una manera de resolver el problema consiste en calcular la ecuación de la recta que pasa por P perpendicular a r, a continuación se calcula el punto de intersección de las dos rectas. Por último, se calcula la distancia de entre el punto P y el punto de intersección.

Afortunadamente existe una fórmula, que no vamos a demostrar, que permite resolver el problema de una manera rápida. Sirve para calcular la distancia cuando la recta viene dada en forma general:

La distancia entre el punto $P(p_1, p_2)$ y la recta $r:\ ax + by + c = 0$ es

$$\boldsymbol{d(P,r) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

El numerador se calcula sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación de la recta, y tomando el valor absoluto para que la distancia sea positiva. El denominador es el módulo del vector normal de la recta r.

Por ejemplo, para calcular la distancia entre el punto $P(1,4)$ y la recta $r:\ 2x + y - 7 = 0$, sustituimos en la fórmula anterior,

$$d(P,r) = \frac{|2{\cdot}1 + 4 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ACTIVIDADES

18. Calcular la distancia del origen a la recta de ecuación $r:\ 5x+y-3=0$.

Recuerda

- ✓ Dos rectas en el plano pueden ser: paralelas, secantes o coincidentes. Para determinar cuál de estas tres posibilidades se tiene, se resuelve el sistema de ecuaciones formado por las dos ecuaciones generales de las rectas.
- ✓ Si m y m' son las pendientes de dos rectas perpendiculares, entonces se cumple

$$m' = \frac{-1}{m}$$

- ✓ El *vector normal*, es decir, perpendicular a la recta de ecuación $ax+by+c=0$ es el de coordenadas $\vec{n}(a,b)$.
- ✓ La distancia del punto $P(p_1,p_2)$ a la recta $r:\ ax+by+c=0$ es

$$d(P,r) = \frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6 Lugares geométricos. Cónicas

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Esta es la última unidad con un contenido puramente geométrico. En ella vamos a estudiar las (curvas) *cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola*. Las cónicas son curvas que se pueden estudiar desde distintos puntos de vista. Aquí lo que haremos, será introducirlas como casos particulares de lo que denominaremos *Lugares Geométricos* en el plano. Un Lugar Geométrico es un conjunto de puntos en el plano que tienen alguna propiedad común que los caracteriza, mediante la cual, se puede llegar a obtener su ecuación.

1. Lugares geométricos

Pensemos en el conjunto de los puntos del plano cuya ordenada es igual a su abscisa. Si su ordenada es igual a su abscisa, entonces $y = x$. Por tanto, los puntos a los que nos referimos son los de la recta $y = x$. También nos podíamos haber referido a ellos simplemente como la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de 45^0 con el eje X.

Vemos pues, que la recta $y = x$ se puede describir de dos formas (y hay muchas más), pero nos interesa particularmente la primera forma en la que lo hemos hecho. En esta primera forma hemos caracterizado los puntos por una propiedad que todos ellos tienen en común: “su ordenada es igual que su abscisa". Cuando un objeto geométrico se describe de esta forma, se dice que es un **lugar geométrico**.

Un *lugar geométrico* es un conjunto de puntos que tienen una propiedad común.

Vamos a ver dos primeros ejemplos importantes de objetos geométricos en el plano que se pueden describir como lugares geométricos: la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.

1.1. Mediatriz de un segmento

Un segmento es un trozo de recta comprendido entre dos puntos. Si tenemos el segmento AB, la **mediatriz del segmento** AB es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de A y de B, como hemos dibujado en la figura 6.1.

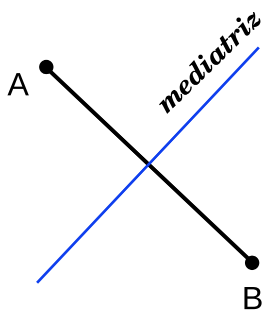


Figura 6.1: Mediatriz de un segmento

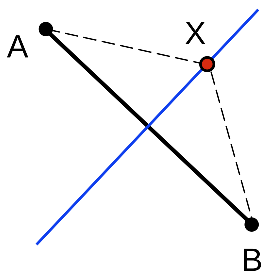


Figura 6.2: $\text{dist}(A, X) = \text{dist}(B, X)$

La anterior es una manera de precisar lo que es la mediatriz de un segmento, sin embargo, también se puede expresar como un lugar geométrico, ya que, cualquier punto X de la mediatriz siempre está a la misma distancia del punto A que del punto B, como se puede apreciar en la figura 6.2.

De esta forma, *la mediatriz del segmento AB se puede definir también como el lugar geométrico de los puntos X del plano que se encuentran a la misma distancia de A que de B*. En otras palabras, la mediatriz de un segmento está constituida por los puntos $X(x, y)$ tales que $d(A, X) = d(B, X)$. Y esto nos proporciona un procedimiento para calcular la ecuación de la mediatriz.

Por ejemplo, queremos calcular la mediatriz del segmento AB, donde $A(2, 3)$ y $B(-1, 5)$. Según acabamos de ver, la solución de nuestro problema la forman los puntos $X(x,y)$ tales que

$$d(A,X)=d(B,X).$$

Aplicando la fórmula de la distancia y sustituyendo las coordenadas de los puntos X, A y B, obtenemos la expresión

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}.$$

Elevamos al cuadrado en los dos miembros de la expresión, para que desaparezcan las raíces cuadradas, y desarrollamos los cuadrados que hay dentro,

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9=x^2+2x+1+y^2-10y+25.$$

Por último, pasamos todos los términos a un miembro de la ecuación, por ejemplo al segundo y nos queda

$$0=6x-4y+13.$$

Que es la ecuación de una recta, la mediatriz del segmento AB.

ACTIVIDADES

1. Calcular la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(3,0)$ y $B(1,4)$, mediante los dos procedimientos que se proponen a continuación:
a) Utilizando el hecho de que se trata de una recta perpendicular a AB que pasa por el punto medio del segmento.
b) Utilizando la definición de la mediatriz como lugar geométrico.

1.2. Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz de un ángulo** es otro objeto geométrico que se puede definir como un lugar geométrico. Sabemos que la bisectriz de un ángulo es una recta que, pasando por su vértice, divide al ángulo en dos ángulos iguales, como vemos en la figura 6.3.

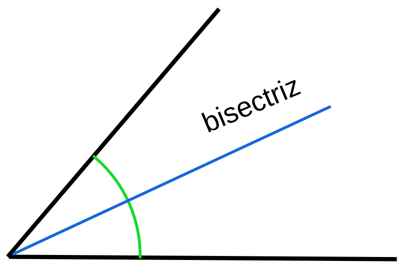


Figura 6.3: Bisectriz de un ángulo

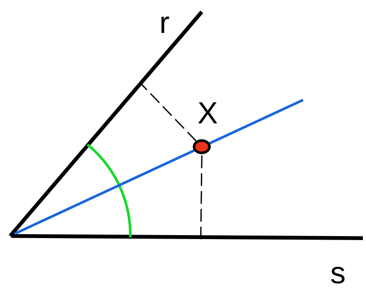


Figura 6.4: $d(X,r)=d(X,s)$

Pero, si la bisectriz divide al ángulo en dos iguales, cada punto X que se encuentre sobre la bisectriz estará a la misma distancia de las rectas que forman el ángulo, r y s (figura 6.4).

Esta observación nos permite definir la *bisectriz de un ángulo formado por dos rectas r y s como el lugar geométrico de los puntos X del plano tales que su distancia* *a la recta r es igual a su distancia a la recta s.* En otras palabras, la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y s está formada por los puntos $X(x, y)$ tales que

$$d(X, r) = d(X, s).$$

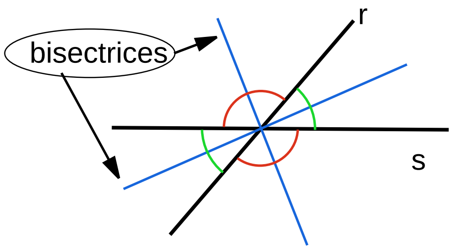


Figura 6.5: Dos bisectrices

Ahora bien, observando más detenidamente el problema se puede ver que, en realidad, dos rectas r y s determinan dos bisectrices (ver figura 6.5). En efecto, dos rectas r y s que se corten en un punto, producen cuatro ángulos que son iguales dos a dos (opuestos por el vértice), entonces cada uno de estos ángulos tiene una bisectriz. Todos los puntos de las dos bisectrices cumplen la propiedad de las distancias que hemos indicado más arriba, con lo cual, sería de esperar que, al resolver el problema aparezcan las ecuaciones de ambas bisectrices. Y así ocurre, al resolver el problema de calcular una bisectriz aparece la otra.

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la bisectriz (las bisectrices) del ángulo determinado por las rectas de ecuaciones:

$$r : 4x - 3y + 2 = 0 \quad \text{y} \quad s : 6x + 8y - 5 = 0$$

Sabemos que la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que

$$d(X, r) = d(X, s).$$

En la unidad anterior hemos aprendido a calcular la distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a una recta $r : ax + by + c = 0$, mediante la fórmula

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Entonces, tenemos que aplicar esta fórmula sustituyendo, en lugar de (x_0, y_0) las coordenadas del punto $X(x, y)$. (A este punto "incógnita" que utilizamos para resolver los problemas de lugares geométricos se le llama a veces *punto genérico*, debido a que no representa ningún punto concreto, sino a todos los puntos que constituyen la solución.)

Entonces, $d(X, r) = d(X, s)$ se transforma, sustituyendo, en la expresión siguiente:

$$\frac{|4x - 3y + 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|6x + 8y - 5|}{\sqrt{36 + 64}} \Rightarrow \frac{|4x - 3y + 2|}{5} = \frac{|6x + 8y - 5|}{10},$$

simplificamos los denominadores y obtenemos,

$$|4x - 3y + 2| = \frac{|6x + 8y - 5|}{2}$$

Y ahora tenemos que eliminar los valores absolutos para obtener las soluciones. Para ello hay que tener en cuenta que, si $|A| = |B|$, entonces $A = \pm B$.

Por tanto, la expresión anterior se convierte en dos expresiones,

$$4x - 3y + 2 = \pm\left(\frac{6x + 8y - 5}{2}\right)$$

Las separamos, hacemos operaciones y simplificamos:

$$4x - 3y + 2 = +\left(\frac{6x + 8y - 5}{2}\right) \Rightarrow 2x - 14y + 9 = 0;$$

$$4x - 3y + 2 = -\left(\frac{6x + 8y - 5}{2}\right) \Rightarrow 14x + 2y - 1 = 0.$$

La ecuaciones de las bisectrices son, por tanto,

$$2x - 14y + 9 = 0; \qquad 14x + 2y - 1 = 0.$$

ACTIVIDADES

2. Calcular las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que determinan los ejes coordenados, el eje X y el eje Y.

3. Calcular las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $r\ :\ 12x - 5y - 1 = 0$ y $s\ :\ 4x + 3y = 0$. Comprobar que las dos bisectrices son perpendiculares entre sí.

Recuerda

- ✓ Un *lugar geométrico* es un conjunto de puntos del plano que tienen una propiedad común que los caracteriza, a partir de la cual se puede calcular su ecuación.
- ✓ La *mediatriz* de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de los extremos del segmento.
- ✓ La *bisectriz* de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de las rectas que forman el ángulo.

2. Secciones cónicas

Quizá los ejemplos más importantes de objetos geométricos que se pueden definir como lugares geométricos en el plano sean las cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, que se estudiarán a continuación, y que son el objeto fundamental de esta unidad didáctica. Sin embargo, la definición clásica de las cónicas, que se debe a Apolonio de Perga (262-190 a.C.), se hizo mediante un procedimiento distinto al de los lugares geométricos. Se definieron como las intersecciones de un plano con una **superficie cónica**, de ahí el nombre de secciones cónicas, o simplemente cónicas, que reciben estas curvas.

En la figura 6.6 hemos representado una *superficie cónica (de revolución)*. Para generarla, hacemos girar (por esto se llama de revolución) una recta oblicua, que se llama *generatriz*, a un eje vertical (la recta y el eje se cortan en un punto.) La figura que obtenemos es la misma que obtendríamos uniendo dos conos circulares iguales por su vértice, de manera que sus ejes quedasen alineados. Al cono que queda arriba y al que queda abajo, les llamaremos “hojas”. Diremos que la superficie tiene dos hojas, en la figura, una de ellas se ha coloreado y la otra se ha dibujado transparente.

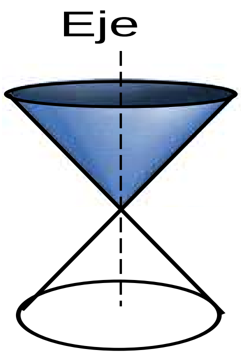


Figura 6.6: Superficie cónica

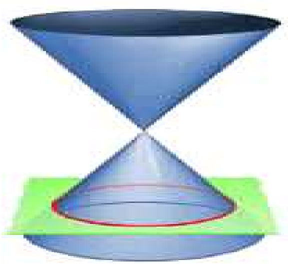
Para obtener las cónicas, vamos a cortar la superficie cónica con planos en diferentes posiciones. Dependiendo de la posición del plano con respecto de la superficie cónica, la sección obtenida (el corte) será una u otra curva. Las posibilidades más interesantes están en los dibujos de la figura 6.7, que pasamos a explicar a continuación:

- Si cortamos una de las hojas de la superficie cónica con un plano que sea perpendicular al eje de la superficie, la sección que se obtiene es una **circunferencia**.

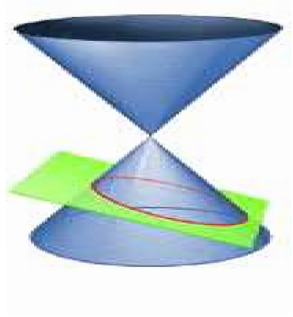
- Si el plano es oblicuo al eje y corta sólo a una de las hojas, de manera que la sección que se obtenga sea una curva cerrada, la sección que se obtiene es una **elipse**.

- Si el plano corta a las dos hojas de la superficie cónica, sin pasar por el vértice de unión de éstas, la sección que se obtiene, que tiene dos ramas, es una **hipérbola**.

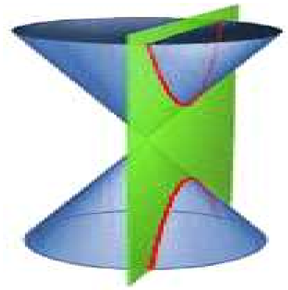
- Por último, si el plano es paralelo a la generatriz, sin pasar por el vértice, se obtiene una curva, que en este caso no llega a cerrarse nunca, que se llama **parábola**.



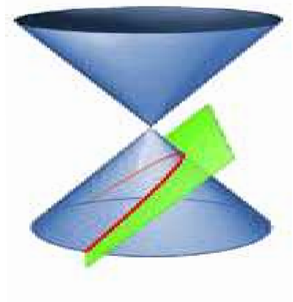
CIRCUNFERENCIA



ELIPSE



HIPÉRBOLA



PARÁBOLA

Figura 6.7: Secciones cónicas

ACTIVIDADES

4. Las curvas que se han descrito antes son las secciones cónicas más interesantes. Sin embargo, no son las únicas, también se pueden obtener otras poniendo el plano de manera adecuada. Describir qué posición debe tener un plano que corte a una superficie cónica, para que la sección obtenida sea cada una de las siguientes:
a) Un punto. b) Una recta. c) Dos rectas que se corten en un punto.

A pesar de la importancia de las curvas cónicas como secciones de una superficie cónica, para estudiar los elementos y propiedades de cada una de ellas en el plano, resulta más conveniente definirlas como lugares geométricos. Esto nos va a permitir obtener una ecuación para cada cónica. Es lo que haremos en el resto de la unidad didáctica.

Recuerda

✓ Las *secciones cónicas* son curvas planas que se obtienen al cortar, mediante un plano, una *superficie cónica de revolución*, según el siguiente esquema:

Plano	**Cónica**
perpendicular al eje	Circunferencia
oblicuo al eje (curva cerrada)	Elipse
cortando a las dos hojas	Hipérbola
oblicuo al eje (curva abierta)	Parábola

3. Circunferencia

3.1. Ecuación de la circunferencia

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano que equidistan (están a igual distancia) de un punto fijo $O(a, b)$, que es el centro de la circunferencia. La distancia entre cada punto X y el centro O, es un número constante r, que es el radio de la circunferencia (figura 6.8).

Vamos a calcular, a partir de la definición anterior, la ecuación de la circunferencia. Si $X(x, y)$ está en la circunferencia, entonces

$$d(X, O) = r$$

donde $O(a, b)$ es el centro de la circunferencia.
Aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos y obtenemos,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado, para que desaparezca la raíz cuadrada obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$\boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

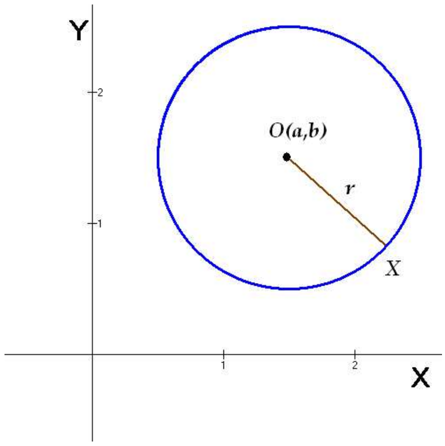


Figura 6.8: Circunferencia

Desarrollando los cuadrados y pasando todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación, se obtiene,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0,$$

que también es la ecuación de la circunferencia. Aunque es más fácil de recordar la primera expresión.
Así, para obtener la ecuación de una circunferencia hace falta conocer cuál es el centro y cuál es el radio.

Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia de centro $O(-1, 2)$ y radio 1 es,

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1,$$

o bien, desarrollando los cuadrados y agrupando los términos,

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0.$$

A partir de la ecuación de la circunferencia, también se puede calcular cuál es el centro y el radio de la misma. Si la ecuación está escrita en la forma

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, la obtención es muy sencilla. Sin embargo, si la ecuación está desarrollada, habrá que convertirla previamente a la forma anterior.

Por ejemplo, queremos calcular cuál es el centro y el radio de la circunferencia de ecuación

$$x^2+y^2-4x+6y+9=0$$

Primero agrupamos los términos en x, los términos en y y pasamos el término independiente a la derecha,

$$x^2-4x+y^2+6y=-9$$

Ahora, los dos primeros términos, x^2-4x son el comienzo del cuadrado de una diferencia, $(x-2)^2$ aunque falta el tercer sumando del desarrollo, que sería $2^2=4$; los dos siguientes, y^2+6y son el comienzo del cuadrado de una suma, $(y+3)^2$ aunque falta el tercer término del desarrollo, que sería $3^2=9$. Añadimos los términos que faltan, y sumamos los mismos términos en el miembro derecho de la ecuación, para que no varíe,

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=-9+4+9.$$

Escribimos los cuadrados y sumamos en la derecha,

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4$$

Por tanto, el centro de la circunferencia es $O(2,-3)$ y el radio es $r=2$.

Supongamos que al llegar a esta expresión obtenemos algo de la forma,

$$(x-1)^2+(y-8)^2=-10.$$

Esto significa que no es la ecuación de la circunferencia, dado que el número negativo -10 no se puede escribir como un número al cuadrado (no tiene raíz cuadrada). Si fuese 0, tampoco lo sería, salvo que admitamos que un punto es una circunferencia de radio 0, en este caso la ecuación sólo representaría un punto.

ACTIVIDADES

5. Calcular la ecuación de la circunferencia de centro $O(-2,0)$ y radio $r=2$.

6. Calcular la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas $O(0,0)$ y que pasa por el punto $P(1,1)$.

7. De las ecuaciones siguientes, unas representan circunferencias y otras no. Calcular el centro y radio de aquellas que lo sean:
a) $x^2+y^2=9$ b) $x^2+y^2-2x-4y=0$ c) $x^2+y^2-2x-8y+20=0$.

3.2. Circunferencias y rectas

Tenemos una circunferencia y una recta. ¿Cómo pueden estar situadas una con respecto de la otra, es decir, cuáles son sus posibles posiciones relativas? En las gráficas de la figura 6.9 hemos dibujado las tres posibilidades posibles.

Puede ocurrir que la recta sea *exterior* a la circunferencia, cuando no tengan ningún punto en común; puede que la recta sea *secante* a la circunferencia, cuando tienen dos puntos en común; y, por último, puede que tengan sólo un punto en común, en este caso, se dice que la recta es *tangente* a la circunferencia.

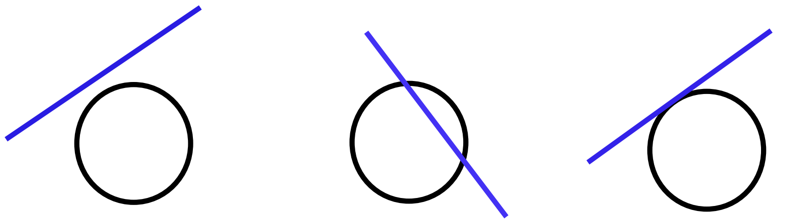


Figura 6.9: Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Conociendo las ecuaciones de la recta y de la circunferencia, sus posiciones relativas se pueden determinar de varias formas. Una de ellas consiste simplemente en resolver el sistema formado por las dos ecuaciones. Dado que habrá una ecuación de primer grado, la recta, y otra de segundo grado, la circunferencia. Se trata de un sistema de segundo grado, que puede tener dos, una o ninguna solución; posibilidades estas que corresponderían, respectivamente, a secante, tangente o exterior.

Por ejemplo, si queremos estudiar las posiciones relativas de la recta $r: y = x$, y la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 1$, resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

y obtenemos dos soluciones, que son los dos puntos de corte:
$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $Q\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Otra forma de estudiar las posiciones relativas de una recta y una circunferencia consiste en comparar el radio de la circunferencia y la distancia del centro de la circunferencia a la recta.

Si r es el radio y d es la distancia desde el centro de la circunferencia a la recta, tenemos que:
- Si $d = r$, la recta es tangente.
- Si $d > r$, entonces la recta está más lejos del centro que la propia circunferencia, por tanto, es exterior.
- Si $d < r$, entonces la recta está más cerca del centro que la propia circunferencia, por tanto, es secante.

ACTIVIDADES

8. Estudiar la posición relativa de recta y circunferencia en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} x-1=0 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+5=0 \\ \text{circunferencia de centro } O(-1,-3) \text{ y radio } r=3. \end{cases}$

Ya sabemos cómo se pueden determinar las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia. Para acabar este apartado vamos a resolver un problema distinto: dada una circunferencia y un punto perteneciente a ella, encontrar la recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto (figura 6.10).
Por ejemplo, el punto $P(3,4)$ pertenece a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=25$. Queremos calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto P.

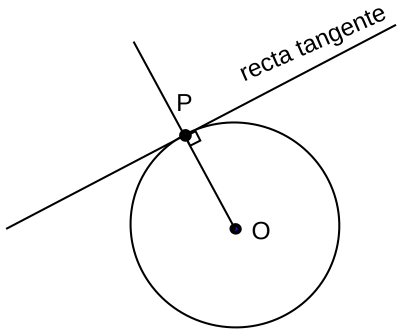


Figura 6.10: Recta tangente a una circunferencia

Como queremos calcular la ecuación de una recta, necesitamos un punto, que ya tenemos, y un vector de dirección o la pendiente de la recta. Según podemos apreciar en la figura 6.10, la recta tangente es perpendicular al radio de la circunferencia dibujado en ese punto. Por tanto, el vector de dirección de la recta será perpendicular al vector $\overrightarrow{OP}$, del centro al punto.

$\overrightarrow{OP}(3,4)$, (el centro de la circunferencia es $O(0,0)$) entonces un vector perpendicular puede ser $\vec{v}(4,-3)$. Ya que el producto escalar de $\overrightarrow{OP}(3,4)$ y $\vec{v}(4,-3)$ es nulo: $\overrightarrow{OP}\cdot\vec{v}=3\cdot 4+4\cdot(-3)=0$ y, como vimos en la unidad anterior, esto implica que los vectores son perpendiculares. En definitiva, tenemos que calcular la ecuación de la recta que pasa por $P(3,4)$ y tiene como vector de dirección $\vec{v}(4,-3)$. Usando la ecuación de la recta en forma continua y convirtiéndola a la forma general,

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{-3} \Rightarrow 3x+4y-25=0$$

ACTIVIDADES

9. Calcular la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2y=0$, que pasa por el punto de la circunferencia $P(1,1)$.

3.3. Potencia

Sea una circunferencia $\mathcal{C}$, con centro en el punto $O(a,b)$ y radio r. Consideremos también un punto $P(x_0,y_0)$ cualquiera del plano, es decir, no es necesario que esté sobre la circunferencia, ni en ningún lugar concreto. Vamos a definir un número, que llamaremos **potencia**, calculado a partir de la circunferencia y el punto, que servirá, entre otras cosas, para estudiar la posición del punto con respecto de la circunferencia.

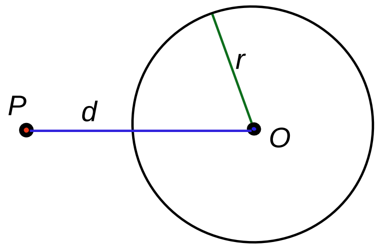


Figura 6.11: Potencia de P con respecto de $\mathcal{C}$

En la figura 6.11 hemos representado una circunferencia y un punto P exterior (aunque el concepto es válido para cualquier punto). Llamamos d a la distancia entre el punto P y el centro de la circunferencia. Entonces:

> Se llama *potencia del punto P con respecto de la circunferencia $\mathcal{C}$* al número $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2$

Es evidente que el valor de la potencia cambiará dependiendo de la situación del punto con respecto de la circunferencia:

Si P es exterior a la circunferencia, su distancia al centro es mayor que el radio. Por tanto, $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) > 0$.

Si P es interior a la circunferencia, su distancia al centro es menor que el radio. En consecuencia, $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) < 0$.

Por último, si P está sobre la circunferencia, su distancia al centro es precisamente el radio de la circunferencia. Por lo tanto, $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = 0$.

Se puede pensar que lo anterior no resulta demasiado útil, ya que, si para calcular la potencia necesitamos calcular la distancia del punto P al centro, bastaría con comparar este número con el radio para decidir la posición del punto, ¿para qué elevarlo al cuadrado y restarle el cuadrado del radio? Sin embargo, la potencia se puede calcular de una manera más directa, y es lo que hace que resulte una herramienta útil. Veamos de qué manera.

Para calcular la distancia entre el punto $P(x_0, y_0)$ y el centro $O(a, b)$ utilizamos la fórmula

$$d = d(O, P) = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}.$$

A continuación, elevamos d al cuadrado y le restamos el radio al cuadrado,

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

Pero esta expresión es exactamente la ecuación de la circunferencia (cuando todos los términos se han pasado a la derecha) cambiando x por x_0, y por y_0, es decir, las variables por las coordenadas del punto. Recordemos que la ecuación de la circunferencia era $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

¿Cómo calculamos entonces la potencia de un punto con respecto de una circunferencia? Pues sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación de la circunferencia.

Por ejemplo, dada la circunferencia $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0$ y el punto $P(1,2)$, la potencia del punto con respecto de la circunferencia es

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = 1^2 + 2^2 - 4{,}1 - 2 = -1 < 0.$$

Es seguro entonces que el punto P es interior a la circunferencia.

Pero hay más propiedades geométricas asociadas a la potencia. Dado el punto P y la circunferencia, dibujamos la recta que pasa por el punto P y por el centro de la circunferencia O. Esta recta corta a la circunferencia en dos puntos, A y B, como se puede apreciar en la figura 6.12. La potencia se puede escribir

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2 = (d-r)(d+r)$$

(Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados).

Pero en la figura se observa que $d - r = PA$ y $d + r = PB$. Entonces,

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = PA.PB$$

Hay que tener en cuenta que en esta fórmula PA y PB representan las distancias entre los puntos "orientadas". De manera que, si PA y PB, pensados como vectores, tienen el mismo sentido, el producto es positivo; y si tienen sentidos opuestos, el producto es negativo.

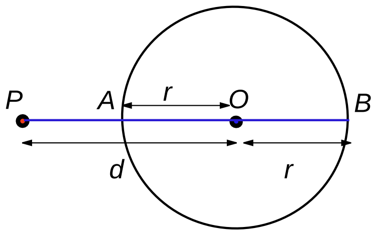


Figura 6.12: $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = PA.PB$

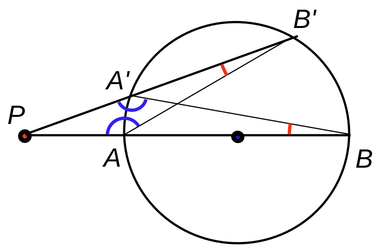


Figura 6.13: $PA.PB = PA'.PB'$

Lo más interesante es que esta fórmula se cumple para cualquier recta que pase por P y corte a la circunferencia en dos puntos, incluso aunque no pase por el centro. En efecto, si dibujamos cualquier otra secante que corte en los puntos A' y B', como en la figura , se cumple (¿por qué? ¿cómo son los triángulos $PA'B$ y $PB'A$?)

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB} \Rightarrow PA.PB = PA'.PB'$$

ACTIVIDADES

10. Sean las circunferencias
$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 1$ y $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$.
Calcular la potencia del origen de coordenadas, $P(0,0)$, con respecto de cada una de las dos circunferencias.

11. Calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano que tienen la misma potencia con respecto de las circunferencias $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 4 = 0$ y $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 6y = 0$.

En la actividad anterior ha aparecido un nuevo concepto, el de **eje radical** de dos circunferencias. En general, dadas dos circunferencias de ecuaciones $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ y $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$, el eje radical de las dos circunferencias, es el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su potencia con respecto de las dos circunferencias es la misma.

Tal y como hemos visto en la actividad, el resultado es una recta, y para calcular su ecuación no hay más que igualar las dos ecuaciones de las circunferencias y simplificar. Cuando existe, porque hay ocasiones en las que no (cuando las dos circunferencias son concéntricas, es decir, cuando tienen el mismo centro), es una recta perpendicular a la recta que une los dos centros de las circunferencias.

Cuando tenemos tres circunferencias, el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto de las tres circunferencias resulta ser un punto. A este punto, si existe, se le llama **centro radical**. Se puede demostrar que es el punto donde se cortan los tres ejes radicales que se obtienen de las circunferencias, dos a dos.

Recuerda

- ✓ Una *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo, que es el centro de la circunferencia. Si el centro es $O(a, b)$ y el radio es r, su ecuación es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- ✓ Una recta, con respecto de una circunferencia, puede ser: *exterior, secante o tangente.* Para determinar la posición se resuelve el sistema de segundo grado formado por las dos ecuaciones, la de la recta y la de la circunferencia.

- ✓ Se llama *potencia del punto P con respecto de la circunferencia $\mathcal{C}$* al número

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2$$

donde d es la distancia de P al centro de la circunferencia, y r es el radio de ésta.

- ✓ Se llama *eje radical* de dos circunferencias a la recta, lugar geométrico de los puntos del plano cuya potencia con respecto de las dos circunferencias es la misma. Cuando hay tres circunferencias, el lugar geométrico de los puntos que comparten la misma potencia con respecto de las tres es un punto, que se llama *centro radical.*

4. Elipse

La **elipse** también se puede definir como un lugar geométrico, además de ser una sección cónica, y utilizando la propiedad que la define, se puede deducir su ecuación.

4.1. Ecuación de la elipse

Empecemos con la definición.

Una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es constante. Estos puntos se llaman *focos* de la elipse.

Vamos a hacer un esbozo de cómo se puede deducir su ecuación a partir de la definición anterior. En primer lugar, situamos los focos sobre el eje X, $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, como se muestra en la figura 6.14. Esto se hace así para que la ecuación resulte más sencilla, si se pusieran en puntos arbitrarios, la ecuación tendría una expresión bastante complicada.

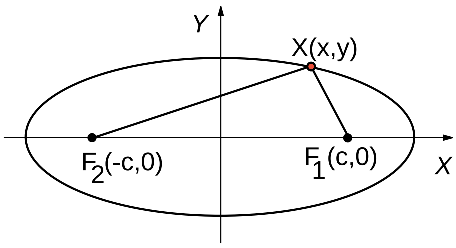


Figura 6.14: Elipse

Queremos encontrar los puntos $X(x, y)$ tales que

$$d(F_1, X) + d(F_2, X) = \text{constante}.$$

Resulta conveniente (para simplificar la expresión) elegir la constante $2a$. Entonces, aplicando la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Haciendo unos cálculos bastante laboriosos, que pasan por eliminar las raíces elevando dos veces al cuadrado, se llega a la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Por fin, llamando $b^2 = a^2 - c^2$, se llega a la expresión

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde $a^2 = b^2 + c^2$.

La expresión anterior se denomina *ecuación reducida* de la elipse (es la más sencilla posible).

Entonces, para calcular la ecuación de la elipse, hay que conocer el valor de los números a, b y c. Aunque, como están relacionados por la expresión $a^2 = b^2+c^2$, basta con conocer dos de ellos para poder calcular el tercero.

ACTIVIDADES

12. Calcular la ecuación de una elipse en la que $a = 5$ y los focos son los puntos $F_1(3,0)$ y $F_2(-3,0)$.

13. Calcular los focos de la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$.

14. Deducir la ecuación de la elipse con focos en los puntos $F_1(0,2)$ y $F_2(0,-2)$; y vértices en los puntos $A_1(0,3)$ y $A_2(0,-3)$.

4.2. Elementos de la elipse

Además de los focos, vamos a enumerar otros elementos y características de una elipse.

- El *centro* de la elipse es el origen de coordenadas, es decir, el punto $O(0,0)$.

- Hemos visto antes que los focos de la elipse son los puntos $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$. La distancia entre ellos, que es $2c$ se llama *distancia focal.* (Ver la figura 6.15).

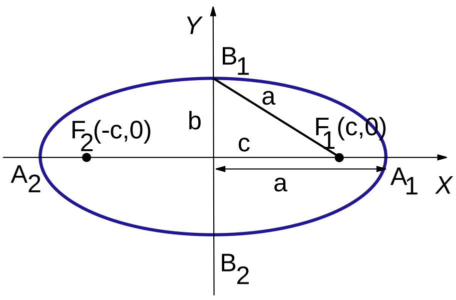


Figura 6.15: Elementos de la elipse

- Se llaman *vértices* a los puntos de corte de la elipse con los ejes coordenados. Los puntos de corte con el eje X, que se calculan haciendo $y = 0$ en la ecuación reducida, son $A_1(a,0)$ y $A_2(-a,0)$. Los puntos de corte con el eje Y, que se calculan haciendo $x = 0$ en la ecuación reducida, son $B_1(0,b)$ y $B_2(0,-b)$.

- La distancia entre los vértices A_1 y A_2 es $2a$, se llama **eje mayor**. Al número a se le llama *semieje mayor.* Análogamente, $2b$ es el *eje menor* y b es el *semieje menor.*

- La relación $a^2 = b^2 + c^2$ implica necesariamente que $a > b$. Por otra parte, esta relación es el *teorema de Pitágoras* aplicado al triángulo rectángulo de lados a, b y c de la figura 6.15.

- Si los focos de la elipse se sitúan sobre el eje Y, en lugar de hacerlo sobre el eje X, se puede deducir que la ecuación tiene la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Y se sigue verificando $a^2 = b^2 + c^2$. Aunque ahora el eje mayor sería el vertical y el menor el horizontal.

Además de los parámetros a, b y c; se utiliza otro que proporciona información sobre la forma de la elipse. Se llama **excentricidad**, y se define como la razón entre c y a,

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}$$

Como $0 < c < a$, la excentricidad siempre será un número comprendido entre 0 y 1.

Si la excentricidad es un número próximo a 0, entonces c es pequeño con respecto a la longitud de a, esto indica que los focos están muy juntos y, en consecuencia, la forma de la elipse será parecida a la de una circunferencia, como se muestra en la figura 6.16. Sin embargo, si la excentricidad es un número próximo a 1, entonces c es

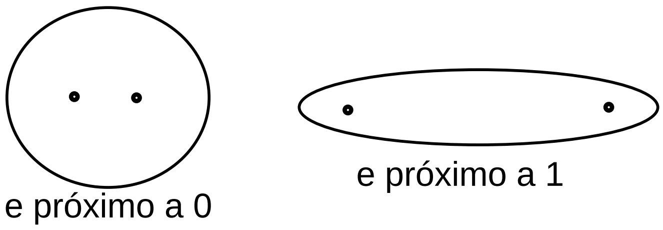


Figura 6.16: Excentricidad y forma de la elipse

grande con respecto a la longitud de a, lo que indicará que los focos están separados y, por tanto, la forma de la elipse será estirada.

ACTIVIDADES

15. Calcular la excentricidad de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

16. Sabiendo que el semieje mayor de una elipse es $a = 2$ y que su excentricidad es $e = 0'2$, calcular su ecuación.

Recuerda

- ✓ La *elipse* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es constante. Estos puntos se llaman *focos* de la elipse.
- ✓ Su ecuación reducida es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = b^2 + c^2$
- ✓ a es el semieje mayor, b es el semieje menor y $2c$ es la distancia focal.
- ✓ La excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a}$.

5. Hipérbola

5.1. Ecuación de la hipérbola

Empezamos definiendo la **hipérbola** como un lugar geométrico.

> Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos $X(x,y)$ del plano tales que la diferencia (en valor absoluto) de sus distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es constante. Estos puntos también se llaman *focos*.

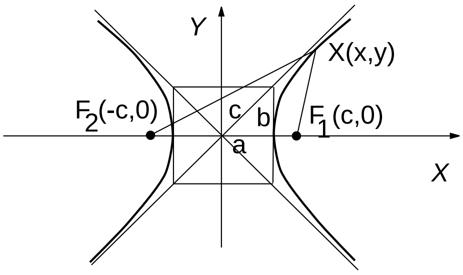


Figura 6.17: Hipérbola

La ecuación de la hipérbola se obtiene de modo similar a la ecuación de la elipse. Si situamos los focos sobre el eje X, $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$, como se muestra en la figura 6.17, el problema ahora es encontrar los puntos $X(x,y)$ tales que

$$|d(F_1,X) - d(F_2,X)| = \text{constante.}$$

Elegimos la misma constante $2a$. Entonces, aplicando la fórmula de la distancia, ahora tenemos,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

Después de eliminar las raíces elevando dos veces al cuadrado, se llega a la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

Por fin, llamando $b^2 = c^2 - a^2$, se llega a la expresión

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$.

La expresión anterior se denomina *ecuación reducida* de la hipérbola.

Entonces, al igual que ocurría con la elipse, para calcular la ecuación de la hipérbola, hay que conocer el valor de los números a, b y c. Aunque, como están relacionados por la expresión $c^2 = a^2 + b^2$ (¡cuidado, ahora es distinta!), basta con conocer dos de ellos para poder calcular el tercero.

ACTIVIDADES

17. Calcular la ecuación de una hipérbola en la que $b = 3$ y los focos son los puntos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$.

18. Determinar los focos de la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 = 144$.

5.2. Elementos de la hipérbola

Describimos también otros elementos de la hipérbola, análogos casi todos a los de la elipse.

- El *centro* de la hipérbola es el origen de coordenadas, es decir, el punto $O(0, 0)$. También aquí la distancia entre los focos, $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, se llama *distancia focal* y es $2c$. (Ver la figura 6.17).

- En la hipérbola sólo hay dos *vértices*, $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$. Pero no hay puntos de corte con el eje Y.

- La relación $c^2 = a^2 + b^2$ implica necesariamente que $c > a$. Por otra parte, esta relación es el *teorema de Pitágoras* aplicado al triángulo rectángulo de lados a, b y c de la figura 6.17. Aunque ahora la hipotenusa es c.

- Siguiendo con la misma figura, vemos que la gráfica de la hipérbola se encuentra entre dos rectas,

$$y = \frac{b}{a}x; \quad y = \frac{-b}{a}x;$$

que se llaman *asíntotas* de la hipérbola. Se puede demostrar que la gráfica de la hipérbola se aproxima cada vez más a estas rectas a medida que nos alejamos del centro.

- Si los focos de la hipérbola elipse se sitúan sobre el eje Y, en lugar de hacerlo sobre el eje X, se puede deducir que la ecuación tiene la forma

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Y se sigue verificando $c^2 = a^2 + b^2$. Además, esta hipérbola sigue teniendo las mismas asíntotas que la anterior, como se puede ver en la figura 6.18.

La **excentricidad** de la hipérbola se define como la de la elipse,

$$\boxed{\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}}$$

Aunque ahora, como $0 < a < c$, la excentricidad siempre es un número mayor que 1.

Si la excentricidad es un número próximo a 1, entonces c es parecido a la longitud de a, esto indica que los focos están muy pegados a los vértices y la forma de la elipse es estirada, como se muestra en la figura 6.19. Sin embargo, si la excentricidad es un número mucho mayor que 1, entonces a es pequeño con respecto a la longitud de c, lo que indica que los focos están separados de los vértices y, por tanto, la forma de la hipérbola será alargada, como se ve en la figura 6.19.

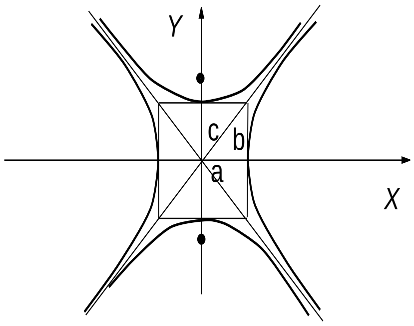


Figura 6.18: Dos hipérbolas con las mismas asíntotas

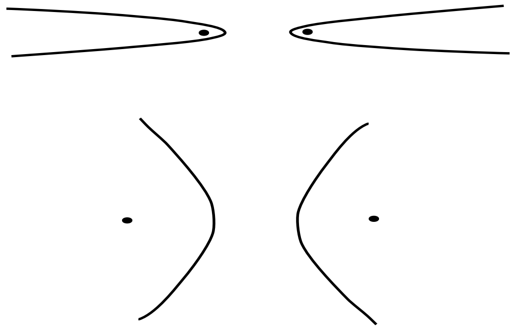


Figura 6.19: Excentricidad y forma de la hipérbola

ACTIVIDADES

19. Calcular los focos y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$.

20. Calcular la excentricidad de la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Recuerda

- ✓ La *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la diferencia de sus distancias (en valor absoluto) a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es constante. Estos puntos se llaman *focos* de la hipérbola.
- ✓ Su ecuación reducida es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } c^2 = a^2 + b^2$$

- ✓ Las *asíntotas* de la hipérbola son las rectas de ecuaciones

$$y = \frac{b}{a}x \qquad y = \frac{-b}{a}x$$

- ✓ La excentricidad de la hipérbola es $e = \dfrac{c}{a}$.

6. Parábola

La **parábola** también se puede definir como un lugar geométrico, de la forma siguiente:

Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano que equidistan de una recta r, llamada *directriz* y un punto F, que es el foco de la parábola.

Para obtener la ecuación, situamos el foco lo situamos en el punto de coordenadas $F\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ y la directriz es la recta $x = \frac{-c}{2}$, con $c > 0$, de manera que c sea la distancia entre el foco y la directriz, como se puede apreciar en la figura 6.20.

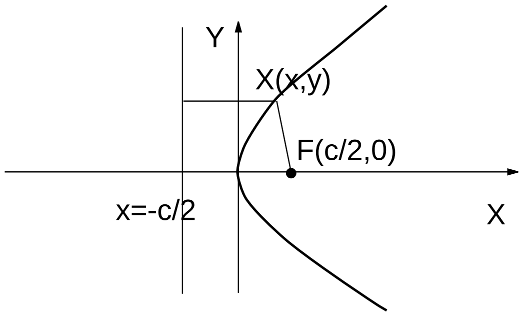


Figura 6.20: Parábola

Entonces, queremos encontrar la ecuación que cumplen los puntos $X(x, y)$ tales que $d(F, X) = d(X, r)$.
Utilizando las fórmulas de las distancias correspondientes, se obtiene

$$\sqrt{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{c}{2}$$

Si elevamos al cuadrado y simplificamos, obtenemos la *ecuación reducida de la parábola*

$$\boldsymbol{y^2 = 2cx}$$

Sin embargo, si se cambian las posiciones del foco y la directriz, se obtienen ecuaciones distintas. En las figuras 6.21, 6.22 y 6.23, ponemos las ecuaciones correspondientes a cada gráfica.

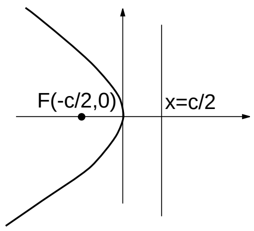


Figura 6.21: $y^2 = -2cx$

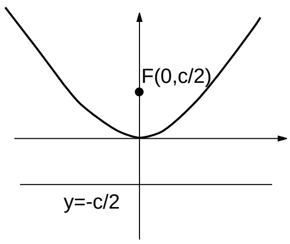


Figura 6.22: $x^2 = 2cy$

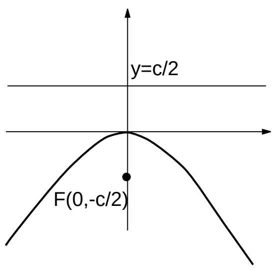


Figura 6.23: $x^2 = -2cy$

ACTIVIDADES

21. Calcular la ecuación de la parábola con foco $F(2,0)$ y directriz $x=-2$.

22. ¿Cuál es el foco y la directriz de la parábola de ecuación $x^2=4y$?

23. Calcular el foco y la directriz de la parábola de ecuación $y^2+10x=0$.

Recuerda

- ✓ Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos $X(x,y)$ del plano que equidistan de una recta r, llamada *directriz* y un punto F, que es el foco de la parábola.
- ✓ La ecuación reducida de la parábola, dependiendo de la situación del foco y de la directriz puede ser una de las siguientes:

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2=2cx$	$F(\frac{c}{2},0)$	$x=\frac{-c}{2}$
$y^2=-2cx$	$F(\frac{-c}{2},0)$	$x=\frac{c}{2}$
$x^2=2cy$	$F(0,\frac{c}{2})$	$y=\frac{-c}{2}$
$x^2=-2cy$	$F(0,\frac{-c}{2})$	$y=\frac{c}{2}$

7 Funciones

ÍNDICE DE CONTENIDOS

En esta unidad vamos a empezar estudiando el concepto de función, que es una de las principales herramientas matemáticas para describir el mundo real. A pesar de que actualmente disponemos de una definición formal muy precisa de lo que es una función matemática, esto no siempre ha sido así, de hecho los matemáticos han utilizado esta idea, como muchas otras, sin disponer de una definición, para estudiar problemas del mundo físico. Esto, el hecho de utilizar un objeto matemático prestando más atención a su utilidad que a su rigurosa definición, quizá sea una buena recomendación para quien empieza a adentrarse en este mundo. Científicos de la talla de Newton, Gauss, Kepler utilizaron las funciones para resolver problemas concretos, y los resolvieron, sin preocuparse de qué eran exactamente las funciones, después llegó la hora de formalizar la idea.

1. Funciones y gráficas

1.1. Funciones

El precio que tenemos que pagar por una llamada concreta desde una cabina telefónica depende de los minutos durante los cuales estemos hablando. El volumen de un cubo, medido en centímetros cúbicos, depende de la longitud, en centímetros, de la arista del cubo. El tiempo que tarda en hervir el agua puesta en un recipiente en un horno microondas a la máxima potencia, depende de la cantidad de agua. En todos estos ejemplos aparece de modo natural el concepto de **función**. En todos los casos, hay una variable, y (precio, volumen, tiempo), que depende de otra cantidad variable, x (minutos, longitud de la arista, cantidad de agua). Por esta razón decimos, incluso en el lenguaje cotidiano, que y está en *función* de x.

Vamos a detenernos en un ejemplo concreto. Supongamos que la altura de un rectángulo mide x centímetros y su base es el doble de la altura más 1 centímetro, es decir, la base es $2x + 1$ centímetros (ver la figura 7.1).

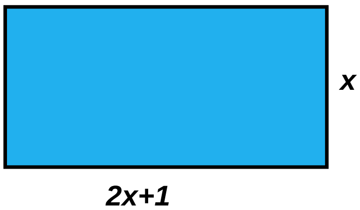


Figura 7.1: Rectángulo de base $(2x + 1)$ y altura x

Llamemos y al área, en cm^2, del rectángulo. Es evidente que el área y depende de la longitud de la base x, de manera que si conocemos cuánto mide la base, como el área de un rectángulo es el producto de la su base por su altura, podemos determinar, de manera única, cuánto mide el área. En la tabla siguiente se han calculado algunos valores del área para diferentes valores de la altura, en centímetros:

x (altura)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (área)	3	10	21	36	55	78	105	136	171	210

Por ejemplo, para calcular el valor de y correspondiente a $x = 6$, hacemos $y = 6(2{\cdot}6 + 1) = 6{\cdot}13 = 78$. En general, $y = x(2x + 1)$. Es importante observar que para cada valor de la altura, x, hay un único valor del área, y.

Podemos decir, de forma provisional que una *función* es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un único número real.

En el ejemplo que hemos visto antes, del área de un rectángulo, esta regla se puede escribir de la forma $y = x(2x + 1)$, como hemos visto, o bien, $f(x) = x(2x + 1)$ ($f(x)$ se lee "f de x".) La expresión $y = f(x)$ expresa la correspondencia entre x e y mediante f. Esto mismo se puede representar esquemáticamente de la forma,

$$x \overset{f}{\longmapsto} y.$$

Que nos indica que la función f transforma la x en la y.

Para tener una función hace falta entonces que haya una relación entre dos variables, de manera que a cada valor de una de ellas corresponda un único de la otra. No es preciso que esa regla se pueda expresar mediante una fórmula, tampoco es preciso que la regla se pueda aplicar a todos los números reales. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no se puede aplicar al número 1, ya que si hacemos $x = 1$, $f(1)$ no existe (porque no se puede dividir por cero.)

ACTIVIDADES

1. Expresar las reglas siguientes como funciones mediante su fórmula:
a) La regla que asigna a cada número real x su cuarta parte.
b) La regla que asigna a cada número real x su raíz cuadrada. ¿A qué números se puede aplicar esta regla o función?
c) La regla que asigna a cada número real x su triple más 5 unidades.

Las funciones que vamos a estudiar aquí son funciones que transforman números reales en números reales, por esta razón se llaman *funciones reales de variable real*, aunque hay otros tipos de funciones, por ejemplo, funciones que transforman vectores en vectores, o vectores en números.

Veamos entonces una definición precisa de lo que es una función real de variable real:

Una *función real de variable real* f es una regla que asigna a cada número real x perteneciente a un cierto conjunto D, un único número real $y = f(x)$. Formalmente lo podemos representar por

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = y \end{array}$$

donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$, es decir, un cierto conjunto de números reales que quizá no sean todos los números reales.

En lo sucesivo utilizaremos indistintamente la expresión $y = x^2 + 2x$, o bien $f(x) = x^2 + 2x$, para referirnos a las funciones.

El conjunto D se denomina **dominio de definición** de la función f, habitualmente lo representaremos por la expresión $\operatorname{dom}(f)$ y es el conjunto de números reales x para los cuales existe $f(x)$. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, sólo se puede aplicar a números reales distintos de 0, es decir, $f(0)$ no existe. Por esta razón decimos que su dominio de definición es $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ (es decir, todos los números reales menos el cero.)

Para que una función esté completamente determinada es preciso conocer siempre su dominio de definición. Determinar el dominio de una función a partir de su fórmula suele ser un problema sencillo, al menos para funciones elementales, como vamos a ver a continuación en algunos ejemplos:

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$. La función es un polinomio. Para calcular el valor de la función para cualquier x sólo hay que sumar, restar y multiplicar, y esto se puede hacer con cualquier número. Entonces, su dominio, y el de cualquier **función polinómica**, está compuesto por todos los números reales, $\text{dom}\,(f) = \mathbb{R}$.
- $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$. Ahora tenemos un cociente de dos polinomios, una **función racional**. La función existirá siempre que el denominador sea distinto de 0. Para que el denominador se anule, es necesario que,

  $$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

  Por tanto, el dominio entonces es $\text{dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, es decir, todos los números reales excepto el 3.
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Ahora tenemos una raíz cuadrada de un polinomio, es un ejemplo de lo que llamamos **función irracional**. Para que exista la raíz cuadrada de un número es preciso que éste sea mayor o igual que 0. Entonces, el dominio estará constituido por todos los números x tales que,

  $$x^2 - 4 \geq 0.$$

  Resolvemos la inecuación, como se vió en la unidad correspondiente, y obtenemos que su solución es $\text{dom}\,(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. (El -2 y el 2 están incluidos en el dominio.)
- $f(x) = \dfrac{5x+1}{\sqrt{x+2}}$. Esta es una mezcla de función racional e irracional. Por una parte, al haber un denominador, éste no puede ser 0; por otra, como hay una raíz cuadrada, el radicando (lo de dentro) no puede ser negativo. Entonces, el dominio serán todos los números x tales que,

  $$x + 2 > 0$$

  Resolvemos la inecuación, y obtenemos que su solución es $\text{dom}\,(f) = (-2, +\infty)$.

ACTIVIDADES

2. Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x + 6}$ b) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ c) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Consideremos ahora la función $f(x) = x^2 + 1$. El dominio de esta función es $\text{dom}\,(f) = \mathbb{R}$, debido a que es una función polinómica. Si tomamos un punto del dominio, por ejemplo, $x = 2$ y lo sustituimos en la función, obtenemos $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$. Se dice que este número, $f(2)$, es la **imagen** del 2 por la función f. Pero, ¿cómo serán todas las imágenes de la función f? ¿se podrá obtener cualquier número o sólo algunos? En otras palabras, si sustituimos todos los números del dominio de la función en ella, todos los números reales, ¿qué imágenes obtendremos?

Vamos a mirarlo detenidamente, sea cual sea el x que sustituyamos, x^2 siempre será positivo o cero. Si además le sumamos 1, el resultado obtenido será siempre mayor o igual que 1. Estas son las únicas imágenes que se pueden obtener, números mayores o iguales que 1. Es fácil convencerse de que números tales como 0, -2, -10, nunca se van a obtener como imagen de ningún número real mediante esta función. Pues bien, este conjunto, el de todos los $f(x)$, con x recorriendo el dominio de la función también se llama **imagen** de la función f, aunque también recibe a veces el nombre de *rango* o *recorrido* de la función, y se denota por $\operatorname{im}(f)$, en el caso de la función de nuestro ejemplo, $\operatorname{im}(f) = [1, +\infty)$.

A diferencia del dominio de definición, que se puede calcular fácilmente en la mayoría de los casos, la imagen no se puede calcular con la misma facilidad, al menos, a partir de la fórmula. Por ejemplo, la imagen de la función $f(x) = 2x^6 - 8x^3 - 10x^2 + 2x + 5$, sólo se podría determinar con exactitud si dispusiéramos de su gráfica, que es lo que vamos a estudiar a continuación.

ACTIVIDADES

3. Razonar cuál es la imagen de las siguientes funciones, sustituyendo algunos números del dominio de la función y teniendo en cuenta cuál es la forma de la función:
a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = x$.

1.2. Gráfica de una función

No es esta la primera vez que el alumno sabe de las funciones y de sus gráficas. No obstante, vamos a recordar la idea de la gráfica de una función.

Tenemos una función, por ejemplo, la función $f(x) = x^2$. A la hora de dibujar su gráfica, resulta más conveniente escribirla de la forma $y = x^2$. Damos valores a x y obtenemos valores para la y. De esta forma construimos lo que se llama **tabla de valores** de la función. (Ya hemos visto un ejemplo antes.) A continuación, hemos calculado algunos de los valores para la función $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Cada par (x, y) se representa en unos ejes de coordenadas como un punto. Con la tabla anterior, tenemos los puntos $(-3, 9)$; $(-2, 4)$; $(-1, 1)$; $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(2, 4)$ y $(3, 9)$. Dibujamos estos puntos y obtenemos la gráfica de la figura 7.2. En realidad la gráfica se obtendría así, pero representando muchos más puntos.

En definitiva, la **gráfica de una función** f es el conjunto de punto (x, y) tales que $y = f(x)$.

Para obtener la gráfica de una función, hacemos una tabla de valores, representamos los puntos, y éstos los unimos mediante una línea, completando así aquellos puntos que no aparecen en la tabla. En la práctica la cosa no es tan sencilla, la tabla

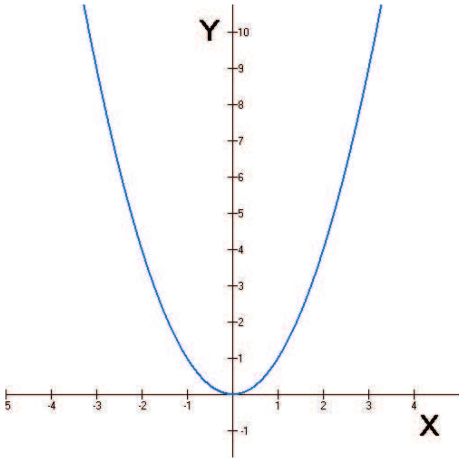


Figura 7.2: Gráfica de $y = x^2$

de valores puede no contener información suficiente para hacerse una idea precisa de cómo es la gráfica. Para dibujar la gráfica exacta de una función hay que estudiar bastantes más cosas, que iremos viendo poco a poco en esta y las unidades siguientes.

Sin embargo, con lo que sabemos hasta el momento aparecen algunas cuestiones interesantes. Una de las primeras es, ¿cualquier dibujo en el plano, cualquier curva que dibujemos sobre unos ejes representará siempre una función? La respuesta es negativa. No todas las curvas son funciones. Ya que, según se indicó en la definición de función, para cada x del dominio habrá un **único** y. Por ejemplo, si en una función hacemos $x = 1$, no es posible obtener dos valores para y distintos, $y = 3$ e $y = 4$. Esto hace que en la gráfica nunca pueden aparecer puntos que estén sobre la misma vertical, unos sobre otros. En las gráficas de las figuras 7.3 y 7.4 se expresa lo que queremos decir. La curva que hemos dibujado en la figura 7.4 no es una función porque hay algunos puntos x para los cuales hay más de un valor de y posible, esto hace que no sea una función. Sin embargo, en la gráfica de la figura 7.3 cada x tiene un único y.

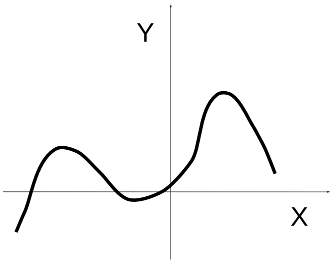


Figura 7.3: Curva que **sí** es una función

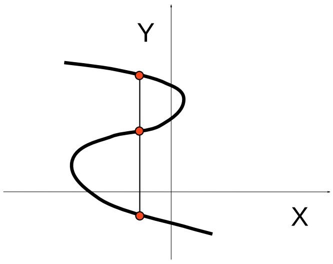
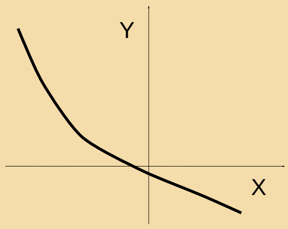


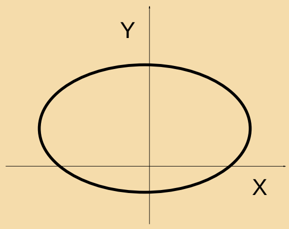
Figura 7.4: Curva que **no** es una función

ACTIVIDADES

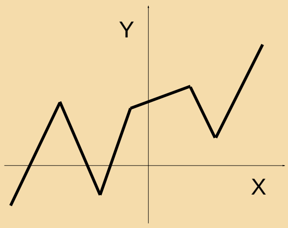
4. En las gráficas de las siguientes figuras, indicar cuál es función y cuál no:



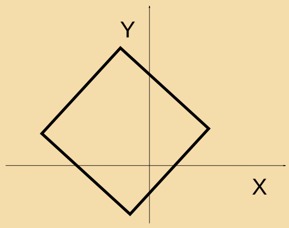
a)



b)



c)



d)

La gráfica de una función permite apreciar de un vistazo cuál es su dominio y su imagen.

Para que un punto x se encuentre en el dominio, es necesario que exista $f(x)$. Entonces, para que un punto del eje X esté en el dominio, hace falta que, por encima de él, o por debajo, haya gráfica de la función. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 7.5 hemos representado una función y señalado varios puntos sobre el eje X.

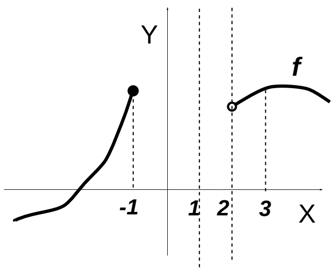


Figura 7.5: El dominio en la gráfica

Los puntos -1 y 3 están en el dominio de definición, porque existe $f(-1)$ y $f(3)$, esto lo apreciamos en la figura dibujando una recta vertical y viendo que interseca a la gráfica de la función (la gráfica tiene dos trozos distintos, esto puede ocurrir perfectamente). Sin embargo, los puntos 1 y 2 no pertenecen al dominio, ya que dibujando rectas verticales por estos puntos, estas rectas no llegan a tocar a la gráfica de la función. (Para indicar que la gráfica llega hasta un punto concreto, dibujaremos ese extremo con un punto relleno, como el punto -1 en la figura 7.5. Para indicar que no llega, dibujaremos un punto hueco, como es el caso del punto 2 de la misma figura).

Por lo dicho antes, el dominio de la función de la figura 7.5 es

$$\text{dom}\,(f) = (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$$

Para que un punto y se encuentre en la imagen de la función f, es necesario que haya algún x tal que $f(x) = y$. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 7.6 vemos que los puntos -2,1 y 3 están en la imagen de la función, porque dibujando ahora una recta horizontal se llega a alcanzar la gráfica de la función. Sin embargo, los puntos -3 y -1,

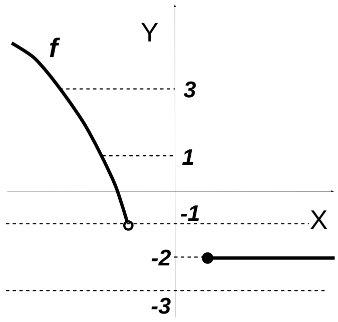


Figura 7.6: La imagen en la gráfica

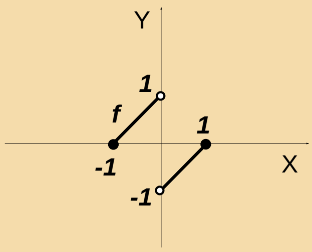
que también se han señalado, no están en la imagen, porque la gráfica de la función no llega a esas alturas, ya que dibujando una recta horizontal por estos puntos, no se toca a la gráfica. Entonces, la imagen de la función de la gráfica está compuesta por los siguientes puntos,

$$\text{im}\,(f) = \{-2\} \cup (-1, +\infty)$$

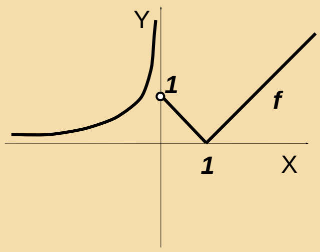
(El -2 es un punto “aislado” de la imagen, por esta razón se escribe entre llaves).

ACTIVIDADES

5. Para las siguientes funciones, indicar cuál es el dominio y cuál la imagen, a partir de su gráfica:



a)



b)

1.3. Gráficas de algunas funciones elementales

Vamos a hacer aquí un recordatorio de las gráficas de algunas funciones elementales, tales como la función constante, funciones polinómicas de grado primer y segundo grado y la función de proporcionalidad inversa. Estas funciones las utilizaremos después para construir otras.

Función constante

Una **función constante** es, por ejemplo, $y = 2$. Si hiciésemos una tabla de valores, para cualquier valor de x siempre sería $y = 2$. Entonces, todos los puntos están alineados en una recta horizontal que pasa a la altura del 2, como la que se ha representado en la figura 7.7.

El dominio está formado siempre por todos los números reales, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$. Y la imagen es el valor de la constante, porque éste es el único resultado que puede dar la y, en nuestro caso, $\text{im}(f) = \{2\}$.

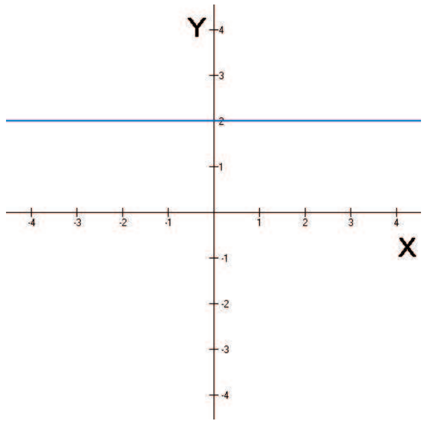


Figura 7.7: Gráfica de $y = 2$

ACTIVIDADES

6. La gráfica de una función constante es una recta horizontal. Una recta vertical, ¿es una función?

Función polinómica de grado 1

La función $y = mx + n$. Aquí hay que distinguir varios casos:

- Si $m = 0$, tenemos la función constante, que ya hemos estudiado.

- Si $n = 0$ (y $m \neq 0$), tenemos una función de la forma $y = x$, $y = 2x$, $y = -3x$, etc. En todas estas funciones, si $x = 0$ entonces $y = 0$, por tanto, todas pasan por el origen de coordenadas, el punto $(0, 0)$. Además, se puede comprobar, haciendo tablas de valores, que se trata de rectas en las que el número que multiplica a x, el número m mide la inclinación de la recta, es la *pendiente* de la recta. En las gráficas de las figuras 7.8 y 7.9 hemos dibujado diferentes rectas de la forma $y = mx$, con diferentes pendientes.

A la función $f(x) = mx$ a veces se le llama *función lineal*, pero el nombre no es lo importante, lo importante es identificar la función $y = 2x$ con su gráfica.

- Si $m \neq 0$ y $n \neq 0$, tenemos una función de la forma $y = x + 1$, $y = 2x - 2$, $y = -3x+2$, etc. También son rectas, pero ahora ninguna pasa por el origen. De hecho, pasan por el punto de coordenadas $(0, n)$. Y, como hemos estudiado en geometría, m sigue siendo la *pendiente* de la recta. En las gráficas de las figuras 7.10 y 7.11 hemos dibujado diferentes rectas de la forma $y = mx + n$, con diferentes pendientes. En las gráficas se aprecia que ninguna recta pasa por el origen, sino que la recta $y = 2x + 1$ pasa por el punto $(0, 1)$; la recta $y = 2x-3$ pasa por el punto $(0, -3)$; etc. A esta función en algunos libros se le denomina *función afín*, aunque este nombre está en desuso. Hay quien llama a todas las funciones cuyas gráficas son rectas, *funciones lineales.*

En todos los casos de funciones que representan rectas, excepto las funciones constantes, el dominio y la imagen están formados por todos los números reales.

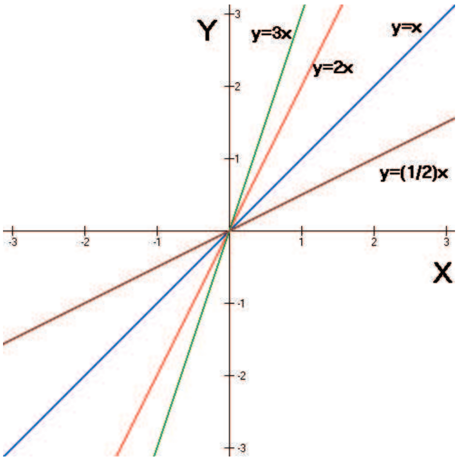


Figura 7.8: Rectas $y = mx$ con $m > 0$

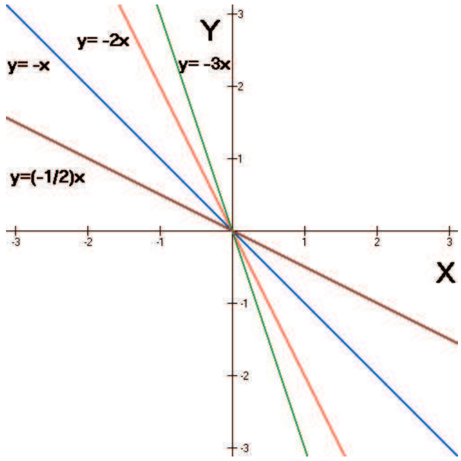


Figura 7.9: Rectas $y = mx$ con $m < 0$

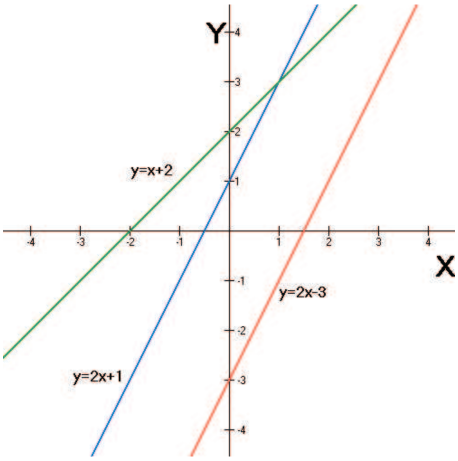


Figura 7.10: Rectas $y = mx + n$ con $m > 0$

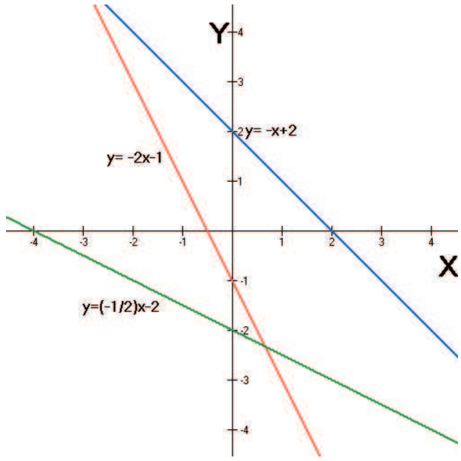


Figura 7.11: Rectas $y = mx + n$ con $m < 0$

Función cuadrática (función polinómica de grado 2)

En general, se llama **función cuadrática** a la función polinómica de segundo grado, es decir, la función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

El caso particular de $y = x^2$ ya lo hemos dibujado en la figura 7.2, es una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$, eje de simetría el eje Y y abierta hacia arriba. Cambiando el signo, obtenemos la función $y = -x^2$ que es igual que la anterior, pero abierta hacia abajo.

Si multiplicamos por una constante a distinta de cero, obtenemos $y = ax^2$. Esta función siempre tiene por gráfica una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$ y eje de simetría el eje Y. Cuando $a > 0$, la parábola siempre está abierta hacia arriba, en la figura 7.12 hemos dibujado algunos ejemplos; y cuando $a < 0$, la parábola está abierta hacia abajo, como se puede ver en los ejemplos de la figura 7.13.

El hecho de que el valor de a sea mayor o menor influye en que la parábola sea más cerrada o más abierta, respectivamente.

El dominio de definición de una parábola está formado por todos los números reales, ya que se trata de un polinomio. Sin embargo, la imagen dependerá de que la

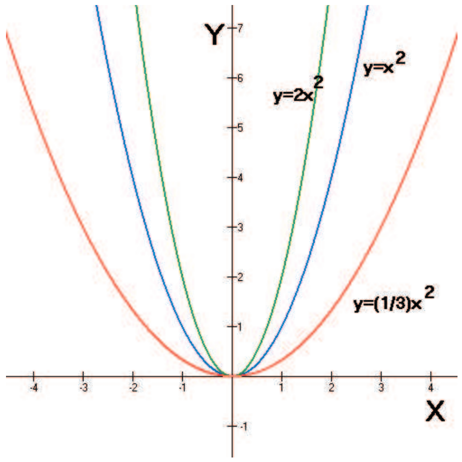


Figura 7.12: Parábolas $y = ax^2$ con $a > 0$

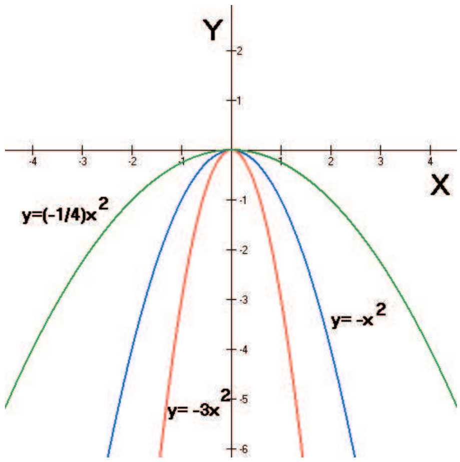


Figura 7.13: Parábolas $y = ax^2$ con $a < 0$

parábola sea abierta hacia arriba o hacia abajo, y de la altura a la que se encuentre el vértice.

ACTIVIDADES

7. Utilizando las gráficas de las parábolas dibujadas en los ejemplos anteriores, dibujar las gráficas de las siguientes, sin hacer tablas de valores:
a) $y = x^2 + 2$ b) $y = -x^2 - 1$ c) $y = -3x^2 + 1$
Escribir, en cada caso, el dominio y la imagen de cada función.

El caso general de una función cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$ ya ha sido estudiado en cursos anteriores. Recordamos que, al igual que en el caso $y = ax^2$, la parábola es abierta hacia arriba si $a > 0$ y abierta hacia abajo si $a < 0$. Por otra parte, las coordenadas del vértice se pueden calcular teniendo en cuenta que la abscisa es $x = \dfrac{-b}{2a}$, la ordenada se calcula sustituyendo esta x en la ecuación.

Por ejemplo, consideramos la parábola $y = x^2 - 4x + 3$.
Como $a = 1 > 0$ es abierta hacia arriba.
La x del vértice es $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2{\cdot}1} = 2$.
Sustituimos en la ecuación para calcular el valor de y, $y = 2^2 - 4{\cdot}2 + 3 = -1$. Entonces, el vértice se encuentra en el punto de coordenadas $V(2, -1)$

Por último, resulta muy útil para representar la gráfica calcular los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas:
Punto de corte con el eje Y; $x = 0$, $y = 3$.
Puntos de corte con el eje X; $y = 0$, $0 = x^2 - 4x + 3$. Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos las soluciones $x = 1$; $x = 3$.

Con toda esta información, se puede concluir que la gráfica de la parábola es la de la figura 7.14.

Con la gráfica a la vista, podemos apreciar que el dominio es $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$ y la imagen $\operatorname{im}(f) = [-1, +\infty)$.

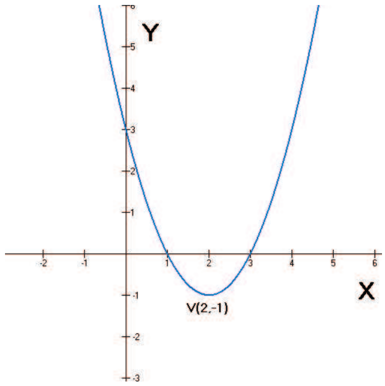


Figura 7.14: Gráfica de $y = x^2 - 4x + 3$

ACTIVIDADES

8. Dadas las siguientes funciones polinómicas de segundo grado, dibujar sus gráficas calculando el vértice, puntos de corte con los ejes y teniendo en cuenta si son abiertas hacia arriba o hacia abajo:
a) $y = -x^2 - 2x$ b) $y = x^2 - 2x + 2$

9. En la unidad en la que hemos estudiado las cónicas hemos visto parábolas abiertas hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda. ¿Son funciones todas ellas?

Función de proporcionalidad inversa

Dibujamos la función $y = \dfrac{1}{x}$, haciendo una tabla de valores:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$\nexists$	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Como no existe para $x = 0$, hemos dado valores entre 0 y 1, para ver cómo se comporta la gráfica al aproximarse la x a cero desde la derecha. Lo que se observa en la tabla es que la y crece. Si diésemos a x los mismos valores, pero negativos, obtendríamos los mismos valores de y, pero también negativos. Al final, tenemos la gráfica de la figura 7.15.

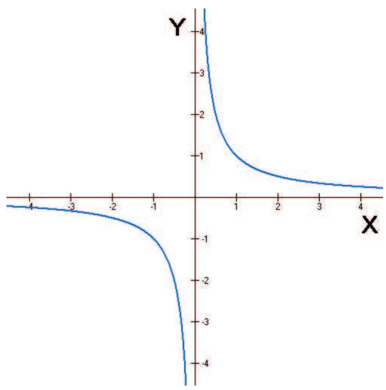


Figura 7.15: Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$

Esta que acabamos de representar es un caso particular de lo que se denomina a veces **función de proporcionalidad inversa** que, en general, tiene la forma $f(x) = \dfrac{k}{x}$, donde k es una constante distinta de cero.

En las figuras 7.16 y 7.17 se han dibujado diferentes casos de la función de proporcionalidad inversa, para distintos valores de la constante k. Es fácil ver de qué manera influye el valor de la constante en el aspecto de la gráfica: a medida que k aumenta, la gráfica se separa de los ejes; si cambia de signo, en lugar de estar en el primer y tercer cuadrante, pasa a estar en el segundo y cuarto. Esto no es exclusivo de esta función, cuando conocemos la gráfica de una función $y = f(x)$ la gráfica de la función $y = -f(x)$ es la simétrica de la de $y = f(x)$ con respecto del eje X, es decir, lo que se obtendría si doblásemos la hoja de papel por el eje X.

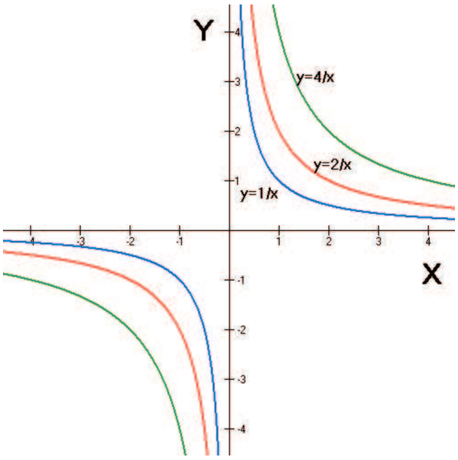


Figura 7.16: $y = \dfrac{k}{x}$ con $k > 0$

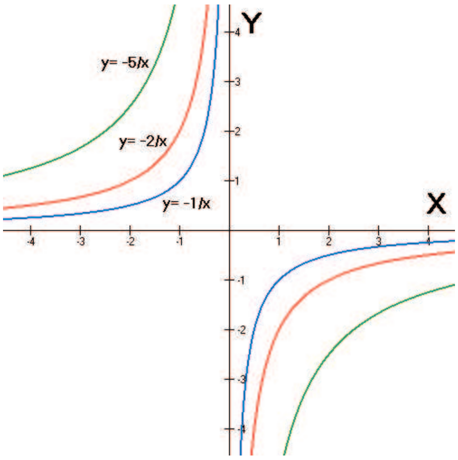


Figura 7.17: $y = \dfrac{k}{x}$ con $k < 0$

ACTIVIDADES

10. ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función $f(x) = \dfrac{k}{x}$? Mirar las gráficas.

Recuerda

- ✓ Una *función real de variable real* f es una regla que asigna a cada número real x perteneciente a un cierto conjunto D, un único número real $y = f(x)$.
- ✓ El conjunto D se denomina es el *dominio de definición* de la función f, habitualmente se representa por $\operatorname{dom}(f)$, y es el conjunto de números reales x para los cuales existe $f(x)$.
- ✓ La *imagen* de la función es el conjunto de todos los $f(x)$, con x recorriendo el dominio de la función. Se denota por $\operatorname{im}(f)$.
- ✓ La *gráfica* de una función es el conjunto de puntos (x, y) tales que $y = f(x)$. Para dibujarla se puede utilizar una *tabla de valores*.
- ✓ No todas las curvas dibujadas en un plano son funciones. Sólo lo son aquellas en las que si dibujamos una recta vertical a través de cualquier punto del dominio, ésta sólo toca a la función en un único punto, es decir, aquellas para las que a cada x del dominio le corresponde un único valor de y.
- ✓ Algunas funciones:

  - Función constante: $y = k$. Su gráfica es una recta horizontal.

  - Función polinómica de grado 1: $y = mx + n$. Su gráfica es una recta no horizontal. Si $n = 0$ pasa por el origen, en caso contrario, no pasa por el origen.

  - Función polinómica de grado 2: $y = ax^2 + bx + c$. Su gráfica es una parábola abierta hacia arriba o hacia abajo.

  - Función de proporcionalidad constante: $y = \frac{k}{x}$. Su gráfica es la de una hipérbola.

2. Nuevas funciones a partir de otras

En la sección anterior hemos visto las gráficas de algunas funciones elementales. Aunque no conocemos muchas de momento, con estas pocas, combinándolas de diversas formas, podemos construir muchas más.

2.1. Funciones definidas a trozos

Una forma de construir una nueva función a partir de otras, consiste en cortar trozos de varias funciones para pegarlos y hacer otra nueva.

La siguiente es una **función definida a trozos**: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Este ejemplo tiene tres trozos, cada uno de ellos expresado en un renglón de la definición. En cada renglón se escribe: en primer lugar, a qué función pertenece el trozo; y en segundo, la parte del eje X sobre el cual hay que dibujarlo.

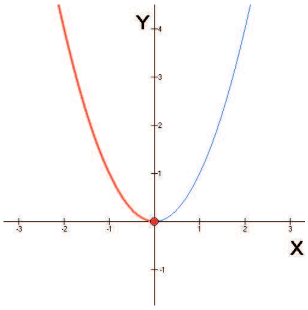


Figura 7.18: x^2 si $x < 0$

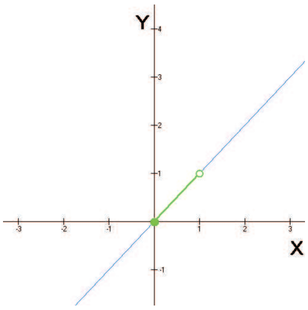


Figura 7.19: x si $0 \leq x < 1$

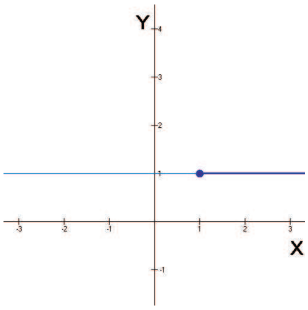


Figura 7.20: 1 si $x \geq 1$

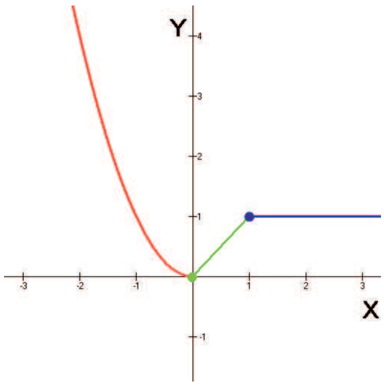


Figura 7.21: Gráfica de $f(x)$

En las figuras 7.18, 7.19 y 7.20 hemos representado cada uno de los tres trozos que intervienen en la definición. Por ejemplo, en la figura 7.18 hemos representado la función x^2, y con trazo más grueso hemos señalado la parte de esta función para la cual $x < 0$. Así lo hemos hecho también en los otros trozos, dibujar con trazo más grueso la parte de la función $f(x)$.

Ahora, para dibujar la función $f(x)$ lo único que hay que hacer es poner los tres trozos juntos en el mismo dibujo. Si la función está bien definida, nunca deben superponerse los trozos.

Una vez que tenemos la gráfica de la función podemos saber que su dominio son todos los números reales, dom $(f) = \mathbb{R}$; y su imagen es im $(f) = [0, +\infty)$.

Función valor absoluto

La **función valor absoluto** es un ejemplo importante de función definida a trozos, es la función que asigna a cada número real x su valor absoluto $|x|$. Como sabemos, el valor absoluto de un número real es el mismo número, si el número es positivo o cero; y su opuesto, si el número es negativo. Entonces, podemos escribir la definición de la función de la forma

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

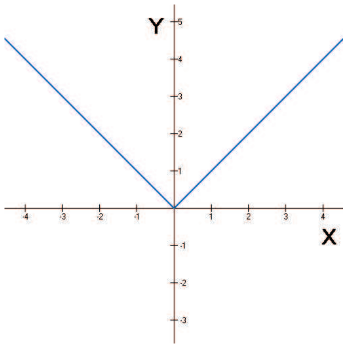


Figura 7.22: Gráfica de $f(x) = |x|$

Por tanto, su gráfica es la de la figura 7.22.

ACTIVIDADES

11. Dibujar las siguientes funciones definidas a trozos. A partir de las gráficas, indicar cuál es el dominio y la imagen de cada función:

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ -x+4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

2.2. Operaciones con funciones

Otra forma de obtener nuevas funciones a partir de otras es haciendo operaciones entre ellas. Hay un grupo de operaciones que se pueden hacer entre funciones que son precisamente las mismas que se pueden hacer entre números reales: sumar (y restar), multiplicar y dividir. Después veremos que hay una operación especial, que no se puede hacer entre números reales, pero sí entre funciones.

Suma

Por ejemplo, tenemos las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 5 + \dfrac{2}{x}$. Entonces, para sumarlas

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 1 + 5 + \frac{2}{x} = x^2 + 6 + \frac{2}{x}$$

La nueva función suma, $(f+g)(x) = x^2 + 6 + \dfrac{2}{x}$, realmente es el resultado de sumar las imágenes de las dos funciones punto a punto, en otras palabras, es como si hubiésemos hecho una tabla de valores de cada una de las dos funciones y hubiésemos sumado estas dos tablas. De manera que, por ejemplo, para $x = 2$ en las funciones, antes de ser sumadas teníamos $f(2) = 5$, $g(2) = 6$. Sustituyendo en la suma $(f+g)(2) = 2^2 + 6 + \dfrac{2}{2} = 11$, el mismo resultado de sumar $f(2) + g(2)$. Más aún, la función $g(x)$ no existe para $x = 0$, es decir, no existe $g(0)$, por tanto, no existe $(f+g)(0)$. Para que un punto se encuentre en el dominio de la función suma, debe estar en cada uno de los dominios de las funciones sumandos.

La resta no es una operación distinta, realmente es la misma y se hace igual que la suma.

Producto

Tomemos ahora las funciones $f(x) = x+1$ y $g(x) = \dfrac{5}{x-3}$. El producto de las dos funciones,

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x+1)\frac{5}{x-3} = \frac{5(x+1)}{x-3}$$

De manera que el producto funciona exactamente igual que la suma. La función producto existirá en un punto, cuando existan los dos factores que intervienen en él.

Cociente

Sean ahora las funciones $f(x) = 3x-4$ y $g(x) = x-5$. El cociente de f entre g es,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-4}{x-5}$$

En cuanto al dominio de definición, la situación es ahora distinta a las que se presenta en la suma y el producto. En el ejemplo que acabamos de ver, dom $(f) = \mathbb{R}$ y dom $(g) = \mathbb{R}$; sin embargo, dom $\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{5\}$. ¿Por qué ocurre esto? Simplemente porque $g(5) = 0$, y un denominador nunca puede ser cero. Por tanto, para que el cociente de las funciones f y g tenga sentido, hace falta que $g(x) \neq 0$.

ACTIVIDADES

12. Sean las funciones $f(x) = x^2+x+1$; $g(x) = x^2-4$ y $h(x) = x+2$. Efectuar las siguientes operaciones e indicar el dominio de definición de las funciones resultantes:
a) $(f+g)(x)$ b) $(f-g)(x)$ c) $(g.h)(x)$ d) $\left(\dfrac{g}{h}\right)(x)$

2.3. Una operación especial: la composición

Vamos a estudiar ahora una operación característica de las funciones, la **composición de funciones**.

Sea la función $f(x) = x-3$. La función f transforma cada número real en otro número que es tres unidades menor que el anterior, por ejemplo, el 5 se transforma en el número 2:

$$5 \overset{f}{\longmapsto} 2$$

Por otra parte, la función $g(x) = x^2$, transforma cada número en su cuadrado. Si aplicamos esta función al número 2,

$$2 \quad \stackrel{g}{\longmapsto} \quad 4$$

Si ahora encadenamos las dos transformaciones,

$$5 \quad \stackrel{f}{\longmapsto} \quad 2 \quad \stackrel{g}{\longmapsto} \quad 4.$$

Podemos interpretar que hay una función que pasa directamente del 5 al 4, esta función es la que se llama *composición de funciones* y se denota $g \circ f$, de tal forma que, ahora tenemos,

$$5 \quad \stackrel{g \circ f}{\longmapsto} \quad 4$$

En el esquema de la figura 7.23 se indica lo que ocurre: la función f transforma x en $f(x)$ y la función g transforma $f(x)$ en $g(f(x))$. Entonces, la composición $g \circ f$ transforma x directamente en $g(f(x))$.

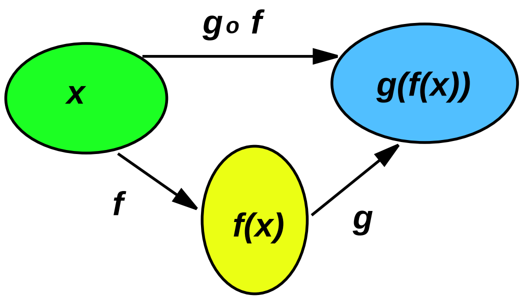


Figura 7.23: Composición $g \circ f$

Para calcular la fórmula de la composición de funciones $g \circ f$ tenemos que sustituir la expresión de la función $f(x)$ por la x de la función $g(x)$, es decir,

$$\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Aunque escribimos, $g \circ f$ se lee "f compuesta con g", porque la f es la función que actúa en primer lugar sobre la x.

La fórmula de $g \circ f$ para las funciones $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2$ queda,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 3) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Pero si la hacemos al revés,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 3$$

Y esto prueba un hecho importante a tener en cuenta; *la composición de funciones no es conmutativa*, es decir, en general $g \circ f \neq f \circ g$.

ACTIVIDADES

13. Sean $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ y $g(x) = 5x^2$. Calcular las composiciones $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$.

2.4. La función inversa

Seguimos con la composición de funciones. Sea la función $I(x) = x$ y cualquier otra función, por ejemplo, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Vamos a componer estas dos funciones en los dos sentidos posibles:

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = I(2x^2 - 3x + 1) = 2x^2 - 3x + 1$$

Aunque, según hemos dicho antes, la composición de funciones no es conmutativa en general, para este caso particular, sí lo es. Además, el resultado en ambos casos ha sido la función f, hemos obtenido, $f \circ I = f$, $I \circ f = f$.

Esta función, $I(x) = x$, que funciona para la composición de funciones como el 1 para la multiplicación de números, se llama **función identidad**.

Pensando en la analogía del 1 en la multiplicación de números, dado un número cualquiera, por ejemplo, el 5, ¿cuál es el número que multiplicado por 5 nos da el 1? Ese número, se llama inverso del 5, y es $\frac{1}{5}$, ya que $5.\frac{1}{5} = 1$. Pues con la composición de funciones ocurre algo completamente análogo.

Dada una función f, se llama **función inversa** de f, y se denota por f^{-1}, a la función que verifica $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

Vamos a intentar aclarar un poco estas ideas con un ejemplo. La función $f(x) = 3x + 2$ tiene por función inversa a la función $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$. Esto se puede verificar directamente haciendo la composición de las dos funciones:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3.\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x = I(x)$$

Haciendo la composición en el otro sentido también se obtiene lo mismo.

Aplicamos la función f a varios números y después les aplicamos la función f^{-1},

$$\begin{array}{ccccc} & f & & f^{-1} & \\ -2 & \longmapsto & -4 & \longmapsto & -2 \\ 3 & \longmapsto & 11 & \longmapsto & 3 \\ 5 & \longmapsto & 17 & \longmapsto & 5 \end{array}$$

Y aquí vemos el significado de la función inversa, una vez que hemos tranformado un número con la función f, la inversa nos devuelve al número original del que partimos.

En el esquema de la figura 7.24 se ha representado la situación.

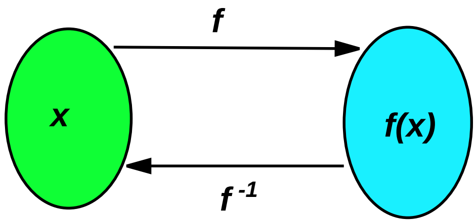


Figura 7.24: La función f y su inversa f^{-1}

Ya sabemos qué significa, ahora nos hace falta saber cómo se calcula. La función f transforma x en y, la función f^{-1}, si existe, transforma y en x. Esta es la clave para calcular la inversa: **intercambiar la x y la y.**

Por ejemplo, queremos calcular la función inversa de $f(x) = 2x - 7$. En primer lugar, la escribimos de la forma $y = 2x - 7$, intercambiamos la x y la y y despejamos y,

$$x = 2y - 7 \Rightarrow y = \frac{x+7}{2},$$

y esta es la función inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{2}$. Además, se puede (y se debe) comprobar que se trata de la inversa, componiéndola con la función original, y verificando que se obtiene la función identidad,

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+7}{2}\right) = 2.\left(\frac{x+7}{2}\right) - 7 = x$$

(Haciendo la composición $(f^{-1} \circ f)$ se obtiene el mismo resultado.)

Este procedimiento no siempre funciona, porque no siempre existe función inversa. Por ejemplo, la función $y = x^2$. Cambiamos x por y e intentamos despejar y,

$$x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x},$$

y el resultado no es una función, sino dos funciones, una sobre otra. Con lo cual la función $f(x) = x^2$ no tiene inversa. (De la misma manera que el número 0 no tiene inverso).

¿Qué ocurre con la gráfica de la inversa, tendrá alguna relación con la gráfica de la función?

En efecto, para calcular la inversa intercambiamos x por y, lo que gráficamente equivale a intercambiar el eje X por el eje Y. Si tuviésemos una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función $y = f(x)$, esta misma tabla, intercambiando los valores de x por los de y nos serviría para dibujar la gráfica de $y = f^{-1}(x)$.

En la figura 7.25 hemos dibujado un ejemplo de la gráfica de una función f y la gráfica de su función inversa.

Como se puede ver en la figura, las gráficas de f y de su inversa f^{-1} son simétricas con respecto de la recta $y = x$, en otras palabras, si doblamos la hoja de papel a lo largo de la recta $y = x$, las dos gráficas coinciden.

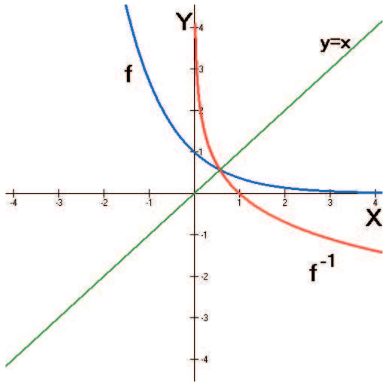


Figura 7.25: Gráficas de f y de f^{-1}

Entonces, la gráfica de la función inversa f^{-1} es la simétrica con respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de la función f.

ACTIVIDADES

14. Calcular las inversas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{2x-5}{3}$ b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ c) $h(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$.

15. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Comprobar, dibujando la gráfica correspondiente, que su inversa no existe.
Dibujar ahora la gráfica de la función $f(x) = x^2$ con $x \geq 0$. ¿Tiene inversa esta función? Dibujar su gráfica y calcular su fórmula.

Según acabamos de ver en la actividad anterior, el hecho de que una función tenga inversa o no también es una cuestión geométrica. Siempre que en una función f existan dos valores distintos a y b tales que $f(a) = f(b)$, esa función no tendrá inversa. En las gráficas de las figuras 7.26 y 7.27 se puede entender esto con claridad. La

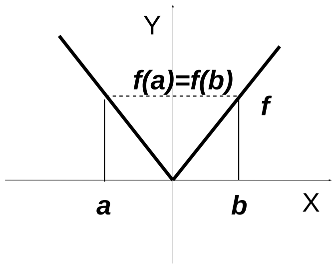


Figura 7.26: $a \neq b$ pero $f(a) = f(b)$

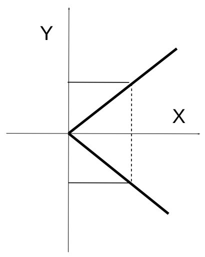


Figura 7.27: No existe inversa

recta horizontal, en la figura 7.26, que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, al pasar a la gráfica simétrica con respecto de la recta $y = x$, en la figura 7.27 se ha convertido en una recta vertical y, como ya sabemos, esto no puede ser una función.

En definitiva, para que exista función inversa de la función f debe ocurrir que, para cada dos puntos distintos a y b de su dominio, sus imágenes también deben ser distintas, es decir, $f(a) \neq f(b)$. Una función que cumpla esta propiedad se dice que es **inyectiva**. Geométricamente, que una función sea inyectiva significa que cualquier recta horizontal dibujada a través de la gráfica sólo puede cortarla en un único punto.

2.5. Función exponencial y logarítmica

La función $f(x) = a^x$, donde $a > 0$, se llama **función exponencial** de base a. Cuando la base es el número e (que apareció en las sucesiones y era el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2'718281828...$), simplemente diremos *función exponencial* y nos estaremos refiriendo a la función $f(x) = e^x$.

Vamos a representar las gráficas de las funciones exponenciales de bases 2, 3 y 10. Para ello hacemos tablas de valores

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
3^x	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81
10^x	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10000

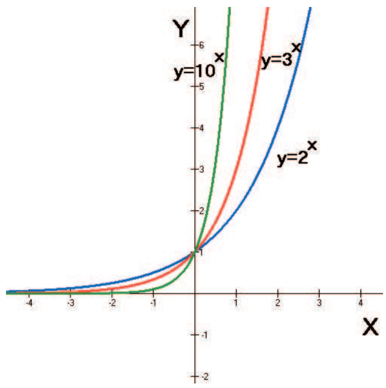


Figura 7.28: Gráficas de $y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = 10^x$

Representando los puntos de las tablas anteriores aproximadamente, tenemos las gráficas de la figura 7.28.

Para hacer una tabla de valores de la función $y = e^x$, necesitaremos una calculadora científica que disponga de la función $\boxed{e^x}$, habitualmente se encuentra en la tecla

$\overset{e^x}{\boxed{\ln}}$. Para utilizarla hay que pulsar primero $\boxed{\text{INV}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$, dependiendo del modelo, de manera que si queremos calcular e^2, tendremos que pulsar la secuencia de teclas: $\boxed{2}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\overset{e^x}{\boxed{\ln}}$; y obtendremos el valor $7'389056...$. Si damos a x los mismos valores de las tablas anteriores, obtenemos la tabla de valores siguiente, para $y = e^x$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$0'0183$	$0'0498$	$0'1353$	$0'3679$	1	$2'7183$	$7'3891$	$20'0855$	$54'5982$

Estos valores llevados a la gráfica, producen el dibujo aproximado de la figura 7.29 que, como vemos, es similar a las anteriores.

Las gráficas de las funciones exponenciales tienen unas características interesantes. Su dominio está constituido por todos los números reales y la imagen son los números positivos. Además, son un claro ejemplo de función inyectiva, esto quiere decir que cualquier función exponencial, de cualquier base, tiene función inversa.

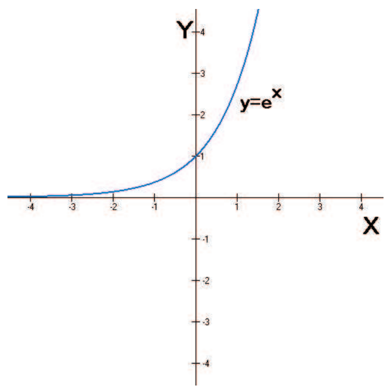


Figura 7.29: Gráfica de $y = e^x$

Para calcular la función inversa de $f(x) = 2^x$, la escribimos de la forma $y = 2^x$ e intercambiamos x por y, para después despejar y,

$$x = 2^y \Rightarrow y = \log_2(x),$$

como vimos en la unidad en la que estudiamos los logaritmos. Por tanto, la función inversa de $f(x) = 2^x$ es el logaritmo en base 2 de x, $f^{-1}(x) = \log_2(x)$.

En general, la función inversa de $f(x) = a^x$ es $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. En particular, la función inversa de la función exponencial $f(x) = e^x$ es el logaritmo neperiano (logaritmo en base e) $f^{-1}(x) = \ln(x)$.

A esta función se le llama, como no podía ser de otra forma, **función logarítmica**. La gráfica de la función logarítmica, por ser inversa de la función exponencial, es la de la figura 7.30.

Las gráficas de las funciones logarítmicas de otras bases son similares a la del logaritmo neperiano, aunque ahora, al haber cambiado la x por la y, también ha cambiado el dominio y la imagen. Ahora el dominio es dom $(\ln(x)) = (0, +\infty)$ y la imagen im $(\ln(x)) = \mathbb{R}$.

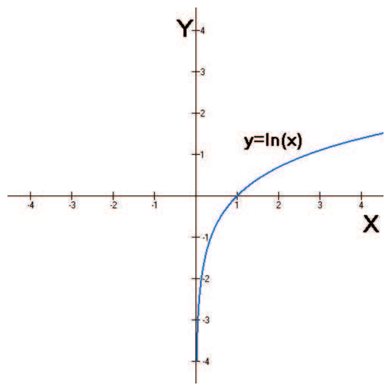


Figura 7.30: Gráfica de $y = \ln(x)$

ACTIVIDADES

16. Por medio de una tabla de valores, dibujar las gráficas de las funciones exponenciales siguientes:

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ (Indicación: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$; $\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$).

17. Calcular la función inversa de $f(x) = 2^{-x}$ y dibujar su gráfica.

18. Supongamos que f es una función inyectiva, es decir, existe su inversa. ¿Cuál es la inversa de la inversa, es decir, $(f^{-1})^{-1}$? (Pensar en las gráficas).

Recuerda

✓ Una *función definida a trozos* es una función construida a partir de trozos de otras. Un ejemplo importante de función definida a trozos es la función *valor absoluto*:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

✓ Operaciones con funciones:

- *Suma:* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- *Producto:* $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- *Cociente:* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, si $g(x) \neq 0$
- *Composición:* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

✓ $I(x) = x$ es la *función identidad*. Para cualquier función f, se cumple $(f \circ I) = (I \circ f) = f$.

Dada una función f, su *inversa*, si existe, es otra función f^{-1} tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. Para que f tenga inversa, es necesario que sea *inyectiva*, esto es, para cada par de números del dominio $a \neq b$, se debe verificar $f(a) \neq f(b)$.

✓ La *función exponencial* es $f(x) = e^x$ (la función exponencial de base $a > 0$ es $f(x) = a^x$), su función inversa es la *función logarítmica* $f^{-1}(x) = \ln(x)$ (o bien, $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ para el caso general).

3. Algunas propiedades globales de las funciones

Después de ver cómo se pueden construir funciones a partir de otras y ya que tenemos una colección importante de funciones, vamos a ver algunas propiedades que afectan a todo el dominio de una función. En particular, vamos a estudiar las simetrías que puede presentar la gráfica de una función, la acotación y la periodicidad, en este último apartado estudiaremos las funciones trigonométricas, que son funciones que surgen de las razones trigonométricas estudiadas en una unidad anterior.

3.1. Simetrías

Observemos la gráfica que hemos dibujado en la figura 7.31. Si doblamos la hoja de papel a lo largo del eje Y el trozo de la izquierda coincide con el trozo de la derecha, lo que indica que la gráfica es simétrica con respecto del eje Y.
Para que se dé esta situación es necesario que la función tome los mismos valores a izquierda y derecha del eje Y, como vemos en la gráfica, para todo x del dominio de definición de la función, se cumple $f(-x) = f(x)$.

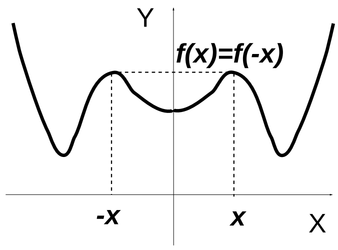


Figura 7.31: Una función par

A una función que cumpla lo anterior se le llama **función par**.

Si tenemos la gráfica de la función podemos apreciar a simple vista si es o no es par, pero si sólo disponemos de la fórmula tendremos que comprobar que se cumple $f(-x) = f(x)$. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4 - 3x^2$ es par, ya que para todo x,

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$$

En la gráfica de la figura 7.32 tenemos una simetría distinta. Elegimos un punto cualquiera sobre la gráfica, dibujamos una recta que pase por el punto y por el origen, entonces al otro lado del origen, a la misma distancia nos encontramos otro punto de la gráfica. Entonces se dice que la gráfica es simétrica con respecto del origen.

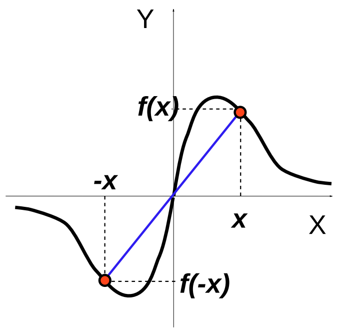


Figura 7.32: Una función impar

¿Qué ocurre ahora con los valores de la función? Como vemos en la gráfica, en los puntos a izquierda y derecha del origen (a la misma distancia) la función toma el mismo valor, pero con signo distinto. Lo que ahora ocurre es que para todo x del dominio de definición de la función, se verifica $f(-x) = -f(x)$. Este es ahora el criterio para comprobar si una función es simétrica con respecto del origen. A una función simétrica con respecto del origen, se le llama **función impar**.

Por ejemplo, la función $f(x) = 2x^3 - x$ es una función impar, ya que para todo x de su dominio se verifica, $f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -(2x^3 - x) = -f(x)$.

Una función puede ser par, impar o ninguna de las dos cosas. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 + 1$. Calculamos,

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

Y el resultado no es igual a $f(x)$, ni a $-f(x)$, por tanto, no es par ni impar. Sin embargo, sí es posible que una función sea simultáneamente par e impar, por ejemplo, la función $f(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ (ya que su gráfica es el eje X y, por tanto, tiene las dos simetrías que hemos mencionado).

El hecho de saber si una función es par o impar nos permite dibujar su gráfica con más facilidad, ya que basta con saber cómo es el dibujo a un lado del eje X, al otro lado será simétrico. Esto lo aplicaremos cuando estudiemos la unidad de representación de funciones.

ACTIVIDADES

19. Estudiar las simetrías de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ b) $g(x) = 2x^3 + 4x$ c) $h(x) = |x| - 1$.

20. a) f es función par de la que sabemos que $f(2) = 3$. ¿Cuánto vale $f(-2)$?
b) g es una función impar de la que sabemos que $g(x) = x^2$ si $x > 0$. ¿Cuánto vale $g(x)$ si $x < 0$?

3.2. Funciones acotadas

La gráfica de la función $f(x) = -x^2$ es la de la figura 7.33. La imagen de esta función es $\operatorname{im}(f) = (-\infty, 0]$, es decir, sólo alcanza valores negativos y el cero. Por tanto, para cualquier x del dominio $f(x) \leq 2$, por ejemplo. Se dice entonces que el 2 es una **cota superior** de la función y que la función está **acotada superiormente**. Es evidente que el número 2 no es la única cota superior, también lo es el 3, el 4, incluso el propio 0. Sin embargo, no es cota superior el -1, ya que la función llega a superar esta altura.

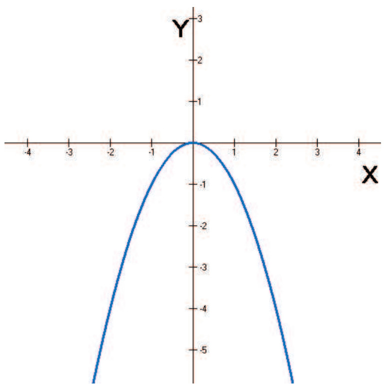


Figura 7.33: Gráfica de $y = -x^2$

Geométricamente, el hecho de que la función esté acotada superiormente es equivalente a que se pueda dibujar una recta horizontal, de tal forma, que toda la gráfica quede por debajo de ella.

Consideremos ahora la función $f(x) = e^x + 1$. Su gráfica es como la de la función e^x, pero elevada una unidad. La hemos representado en la figura 7.34. Ahora la imagen es $\text{im}(f) = (1, +\infty)$ (ya que e^x nunca llegaba al 0). Tenemos la misma situación que antes, pero ahora por la parte de abajo. Por ejemplo, para cualquier x del dominio, $f(x) \geq 0$, por lo que el 0 es una **cota inferior**. Se dice entonces que la función f está **acotada inferiormente**.

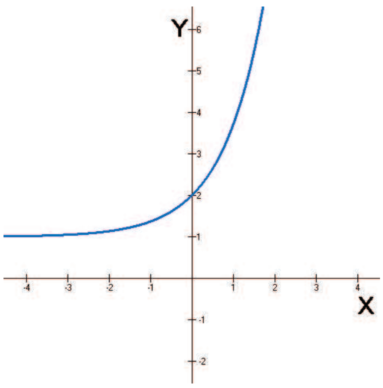


Figura 7.34: Gráfica de $y = e^x + 1$

Una misma función puede ser acotada superiormente e inferiormente, como por ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En la gráfica de la función $y = f(x)$, que hemos representado en la figura 7.35, se puede apreciar que la imagen de la función es $\text{im}(f) = [-1, 1]$. Es decir, para todo x del dominio, se cumple $-1 \leq f(x) \leq 1$, o lo que es equivalente $|f(x)| \leq 1$. En este caso, diremos que la función es **acotada**, para indicar que lo es superior e inferiormente.

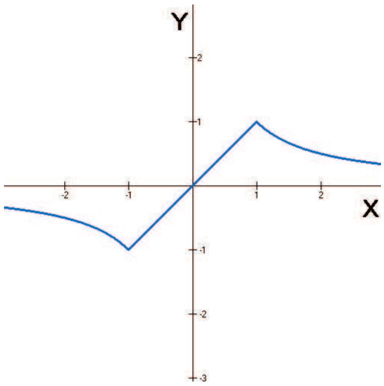


Figura 7.35: Gráfica de $y = f(x)$

Por último, una función puede *no ser acotada*, ni superior, ni inferiormente. Tal es el caso de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. En la gráfica de la figura 7.36, vemos que sea cual sea el valor numérico K en el que pensemos, existirá algún momento en el que $f(x) > K$, es decir, no hay manera de dibujar una recta horizontal que quede por encima de toda

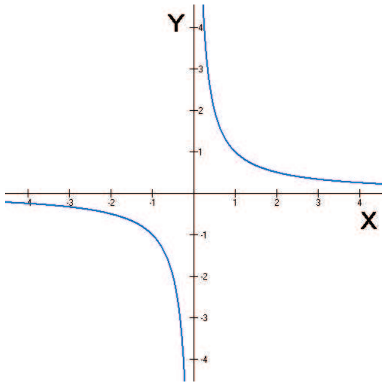


Figura 7.36: Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$

la gráfica, por esta razón la función no es acotada superiormente. Lo mismo ocurre en la parte inferior, no tiene cotas inferiores, por lo que no es acotada inferiormente.

ACTIVIDADES

21. Estudiar si las siguientes funciones son acotadas o no, indicando en su caso, las posibles cotas inferiores o superiores:
a) $f(x) = 2$ b) $g(x) = x$ c) $h(x) = |x|$

3.3. Funciones periódicas: funciones trigonométricas

En la gráfica de la figura 7.37 hemos dibujado una **función periódica**. Vamos a ver por qué recibe este nombre. Algo periódico es algo que se repite, y eso es lo que

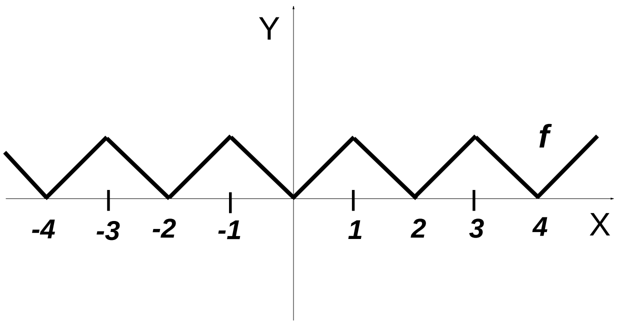


Figura 7.37: Una función periódica

ocurre con esta función. La parte de la función que hay sobre el intervalo $[0, 2]$ del eje X vuelve a repetirse en el intervalo $[2, 4]$, otra vez en el $[4, 6]$, y así sucesivamente. Lo que ocurre de hecho, es que $f(x) = f(x + 2)$ para todo x. Decimos entonces que es una *función periódica* de **periodo** 2.

Las funciones periódicas más importantes son las **funciones trigonométricas**, que son las que se pueden definir a partir de las razones trigonométricas ya estudiadas. Cuando hemos estudiado las razones trigonométricas las hemos utilizado para calcular longitudes de lados, ángulos y otras aplicaciones geométricas. El hecho de que con estas razones trigonométricas se puedan definir funciones periódicas tiene una enorme utilidad a la hora de modelizar fenómenos que se repiten con el tiempo.

A la hora de utilizar las razones trigonométricas, los ángulos los hemos medido en grados sexagesimales y en radianes, ahora sólo utilizaremos los radianes.

Función seno

La función seno es $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, donde x es un número real que representa el ángulo medido en radianes. Para ver cómo es la gráfica, representamos el ángulo en el eje X, y los valores de $y = \operatorname{sen}(x)$ en el eje Y. Hacemos una tabla de valores, utilizando una calculadora (puesta en radianes) y nuestros conocimientos previos de trigonometría (hemos redondeado al segundo decimal para que la tabla salga más sencilla),

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$0'71$	1	$0'71$	0	$-0'71$	-1	$-0'71$	0

La tabla la hemos hecho con valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, si hacemos una tabla en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$ obtenemos los mismos valores para y, y estos valores se siguen repitiendo cada 2π unidades, es decir, cada vuelta a la circunferencia.

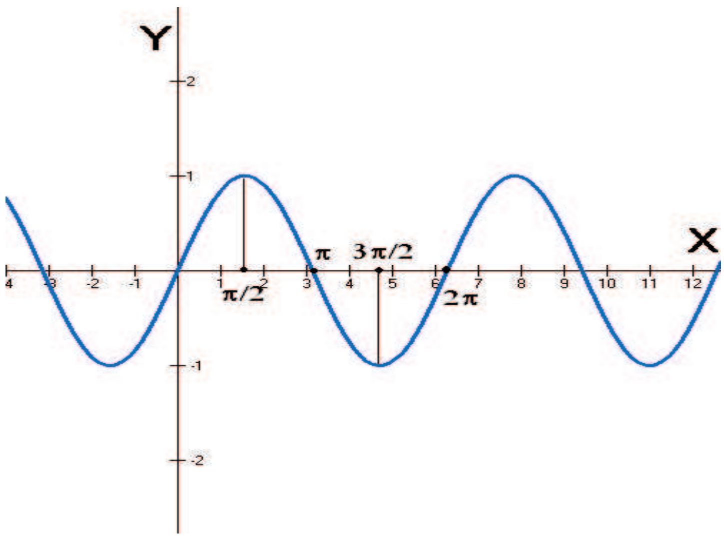


Figura 7.38: Gráfica de $y = \operatorname{sen}(x)$

El resultado de representar los puntos de la tabla gráficamente es el de la figura 7.38.

En esta gráfica se observan las propiedades principales de la función seno:

- Su dominio es $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$.

- Su imagen es $\operatorname{im}(f) = [-1, 1]$, lo que significa que es una función acotada, ya que se cumple que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$, para todo x.

- Es una función periódica de período 2π.

La función seno no es inyectiva, como se puede apreciar en la gráfica. Sin embargo, si nos restringimos a determinados intervalos, sí lo es. En particular, es inyectiva en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es lo que hemos representado en la figura 7.39. Por tanto, en este intervalo, existe función inversa de la función seno. Esta función se denomina arcoseno, y se denota habitualmente $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$. Su gráfica, que es simétrica con respecto de la recta $y = x$ de la de la figura 7.39, es la representada en la figura 7.40.

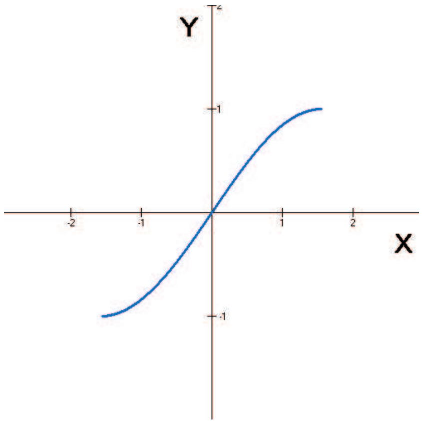


Figura 7.39: $y = \operatorname{sen}(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

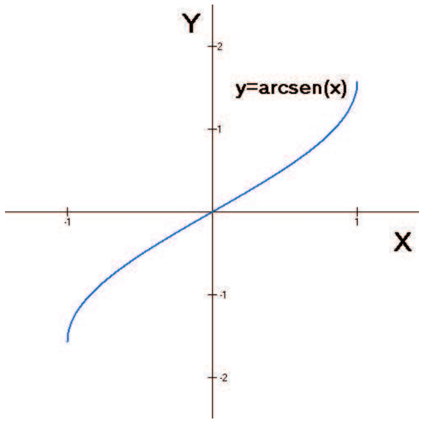


Figura 7.40: Gráfica de $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$

ACTIVIDADES

22. ¿Cuál es el dominio y la imagen de $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$?

Unas observaciones acerca de la función arcoseno:

- El hecho de haber elegido el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es completamente arbitrario, se podía haber elegido entre infinitas posibilidades, basta con elegir un tramo en el que la función sea inyectiva, es por tanto, un convenio.

- En las calculadoras científicas, la función $\operatorname{arc\,sen}(x)$ se representa $\sin^{-1}$, y viene habitualmente con la tecla $\overset{\sin^{-1}}{\boxed{\sin}}$. Para utilizarla, hay que pulsar previamente la tecla $\boxed{\text{INV}}$. Por ejemplo, para calcular $\operatorname{arc\,sen}(0'5)$ tendremos que poner primero la calculadora en radianes (si queremos obtener el resultado en radianes) y pulsar la siguiente secuencia:

$$\boxed{0.5} \quad \boxed{\text{INV}} \quad \overset{\sin^{-1}}{\boxed{\sin}}$$

obtendremos el resultado aproximado: $\boxed{0.5235987755983}$.

Función coseno

La función coseno es $f(x) = \cos(x)$, donde x es un número real que representa el ángulo medido en radianes. Para ver cómo es la gráfica, hacemos lo mismo que hemos hecho para representar la gráfica de $y = \text{sen}(x)$. Hacemos una tabla de valores,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$0'71$	0	$-0'71$	-1	$-0'71$	0	$0'71$	1

También hemos hecho la tabla de valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, y estos valores se siguen repitiendo cada 2π unidades, es decir, cada vuelta a la circunferencia.

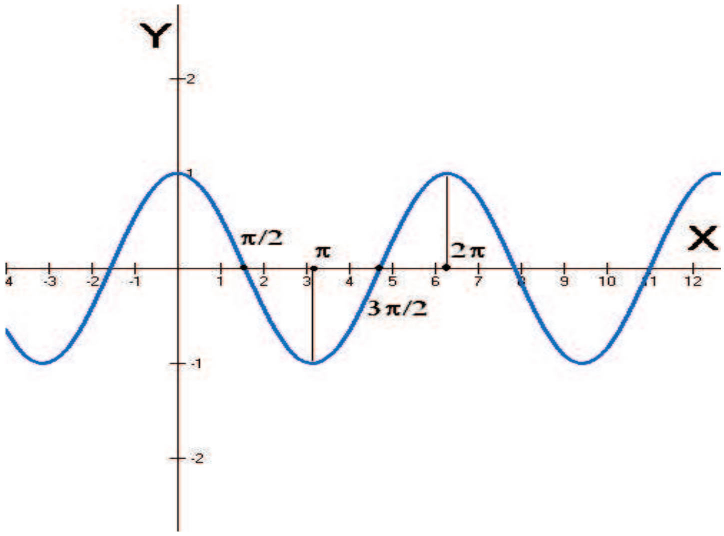


Figura 7.41: Gráfica de $y = \cos(x)$

El resultado de representar los puntos de la tabla gráficamente es el de la figura 7.41.

En esta gráfica se observan las propiedades principales de la función coseno:

- Su dominio es dom $(f) = \mathbb{R}$.

- Su imagen es im $(f) = [-1, 1]$, lo que significa que, al igual que la función seno, es acotada, ya que también se cumple que $|\cos(x)| \leq 1$, para todo x.

- Es una función periódica de período 2π.

ACTIVIDADES

23. La función coseno no es inyectiva, pero si nos restringimos al intervalo $[0, \pi]$, sí lo es:
a) Dibujar la gráfica de la función coseno en este intervalo.
b) Dibujar la gráfica de su función inversa, que recibe el nombre de función arcocoseno, $f(x) = \text{arc}\cos(x)$.
c) Calcular el dominio y la imagen de la función arcocoseno.

En la calculadora, la función arcocoseno se encuentra en la tecla $\overset{\cos^{-1}}{\boxed{\cos}}$, y su uso es análogo al del cálculo de arcosenos, que ya se ha explicado antes.

Función tangente

La función tangente es $f(x) = \text{tg}(x)$, donde x es un número real que representa el ángulo medido en radianes. Para ver cómo es la gráfica, hacemos lo mismo que hemos hecho para representar las gráficas del seno y del coseno. Hacemos una tabla de valores,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

Ahora, sin embargo, los resultados de la tabla no están tan claros como en los dos casos anteriores. La tangente no existe en los ángulos de $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ radianes. Entonces para entender qué ocurre en los alrededores de estos puntos habría que hacer tablas de valores próximos a ellos. Vamos a hacerlo sólo para un caso, la izquierda del punto $\frac{\pi}{2}$. Dado que $\frac{\pi}{4} = 0'78$ y $\frac{\pi}{2} = 1'57$, haremos una tabla con valores entre $0'8$ y $1'5$,

x	$0'8$	$0'9$	1	$1'1$	$1'2$	$1'3$	$1'4$	$1'5$
y	$1'03$	$1'26$	$1'56$	$1'96$	$2'57$	$3'60$	$5'80$	$14'10$

En esta tabla observamos que, a medida que nos acercamos a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda, los valores de la tangente van aumentando cada vez más. Por la parte de la derecha ocurre lo mismo, pero en este caso los resultados son negativos. De estas observaciones se puede deducir, que la gráfica de la tangente al acercarse la x a $\frac{\pi}{2}$ sube (hasta infinito), y por la derecha, baja (hasta menos infinito.) En el punto $\frac{3\pi}{2}$ ocurre exactamente lo mismo.

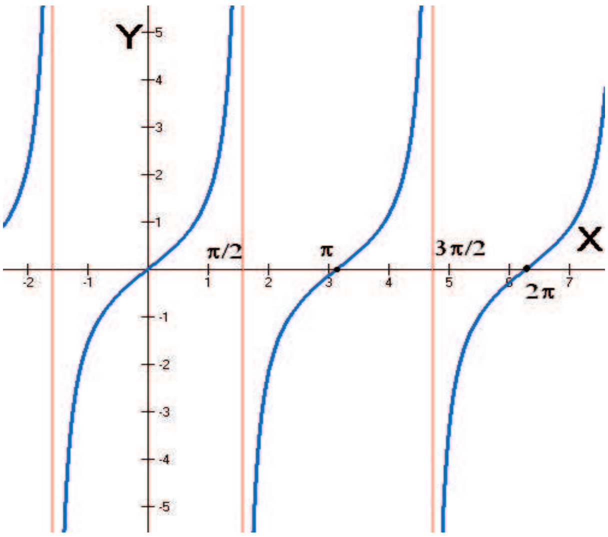


Figura 7.42: Gráfica de $y = \text{tg}(x)$

La gráfica, teniendo en cuenta todo lo anterior, es aproximadamente la de la figura 7.42. Por supuesto, como ocurre con las gráficas de seno y coseno, los valores vuelven a repetirse a lo largo del eje X.

Las propiedades de la función tangente son bastante distintas de las funciones seno y coseno:

- Su dominio está formado por todos los reales, excepto los puntos en los que no existe la tangente, que son precisamente aquellos en los que el coseno se anula, recordemos que $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$. Entonces, dom $(f) = \mathbb{R} - \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, es decir, todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. En cada uno de estos puntos hemos dibujado una recta vertical, por la que no pasa la función tangente. Estas rectas se llaman asíntotas verticales y serán estudiadas más adelante.

- Su imagen, im $(f) = \mathbb{R}$. Lo que significa que la función no es acotada.

- También es una función periódica, pero el período es más pequeño. Desde luego, la gráfica se repite cada 2π unidades, pero en realidad se repite cada menos, ya que la parte de la gráfica que se repite es la comprendida entre cada dos rectas verticales, y la distancia entre cada una y la siguiente es $\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$. Entonces, la función tangente es periódica de periodo π.

ACTIVIDADES

24. La función tangente no es inyectiva. Sin embargo, si la restringimos al intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sí lo es:

a) Dibujar la gráfica de la función tangente en este intervalo.

b) Dibujar la gráfica de su función inversa, que recibe el nombre de función arcotangente, $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$.

c) Calcular el dominio y la imagen de la función arcotangente.

En la calculadora, la función arcotangente se encuentra en la tecla $\overset{\tan^{-1}}{\boxed{\tan}}$, y su uso es análogo al del cálculo de arcosenos y arcocosenos.

Recuerda

- ✓ Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$, para todo x del dominio. Su gráfica es simétrica con respecto del eje Y.

- ✓ Una función f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$, para todo x del dominio. Su gráfica es simétrica con respecto del origen.

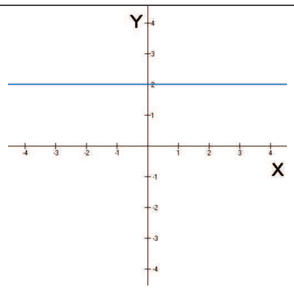
- ✓ Una función f es *acotada superiormente* si tiene alguna *cota superior*, esto es, hay un número k, tal que $f(x) \leq k$. Es *acotada inferiormente* si tiene alguna *cota inferior*, es decir, hay un número m, tal que $f(x) \geq m$. Una función es *acotada*, cuando lo es superior e inferiormente.

- ✓ Una función f es *periódica*, de *periodo* T, cuando los valores que toma la función se repiten cada T unidades, es decir, $f(x) = f(x+T)$, para todo x del dominio.

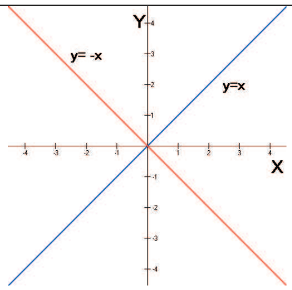
  Las funciones periódicas más importantes son las *funciones trigonométricas*: $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ e $y = \operatorname{tg}(x)$. Sus inversas son $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$, $y = \operatorname{arc\,cos}(x)$ e $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$, respectivamente. Es importante asociar cada fórmula con su gráfica correspondiente, ya que a partir de la gráfica, se pueden deducir las propiedades de la función.

4. Catálogo de gráficas

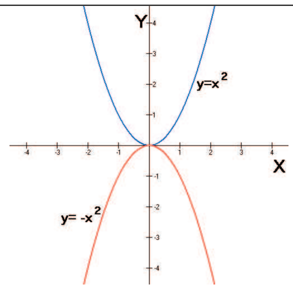
A modo de resumen, se ponen a continuación en una tabla, las gráficas de las funciones más importantes que han aparecido hasta ahora.



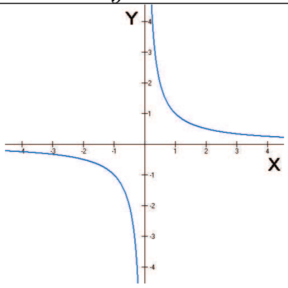
$y = 2$



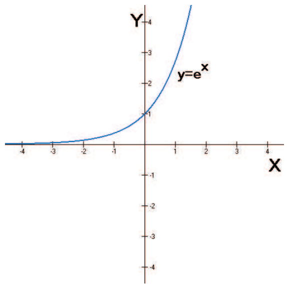
$y = x \qquad y = -x$



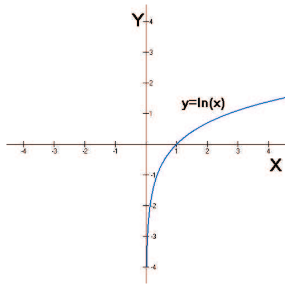
$y = x^2 \qquad y = -x^2$



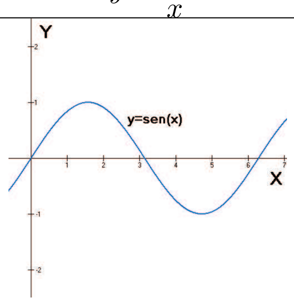
$y = \frac{1}{x}$



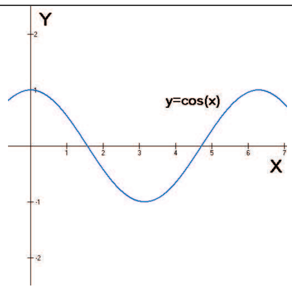
$y = e^x$



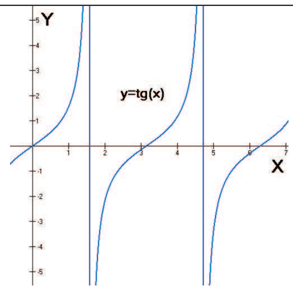
$y = \ln(x)$



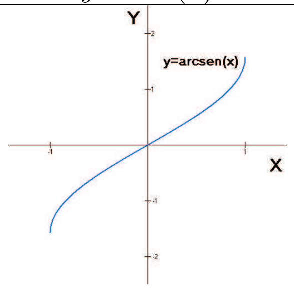
$y = \operatorname{sen}(x)$



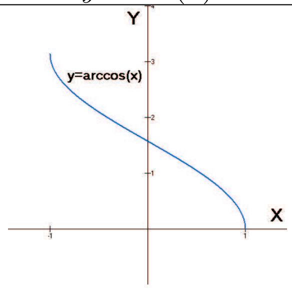
$y = \cos(x)$



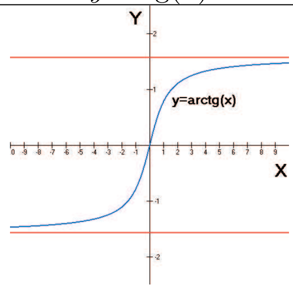
$y = \operatorname{tg}(x)$



$y = \operatorname{arc\,sen}(x)$



$y = \operatorname{arc\,cos}(x)$



$y = \operatorname{arc\,tg}(x)$

8 Límites y continuidad

ÍNDICE DE CONTENIDOS

En esta unidad empezaremos a estudiar los límites de funciones. Los límites ya aparecieron al estudiar las sucesiones que, en cierto sentido, también se pueden considerar funciones. Decir que los límites son importantes para las matemáticas probablemente es un tópico, pero no es correcto del todo, sería más correcto decir que sin límites no sería posible la existencia de toda una rama de las matemáticas, el Cálculo. El Cálculo es la parte de las matemáticas que sirve para estudiar los procesos de *cambio*, como veremos en la parte de Derivadas. Utilizando los límites podremos estudiar la continuidad de una función, que también veremos en esta unidad, y las derivadas, que se estudiarán después. Hay unas matemáticas previas al Cálculo (los anglosajones les llaman *Precalculus*), como la Trigonometría, o el estudio de las funciones elementales; y los límites permiten conectar estas matemáticas con el Cálculo.

1. Límite de una función en un punto

Al igual que la idea de función matemática, que hemos estudiado en la unidad anterior, la idea de límite ha sido utilizada por los matemáticos mucho antes de tener una definición precisa del concepto, incluso antes de ponerle nombre. Lo que pretendemos hacer en este curso es aproximarnos a esta idea con ejemplos sencillos y utilizarla, aun sin llegar a formalizar con precisión su definición.

1.1. Idea de límite

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$.

Esta función está definida para todos los números reales excepto para $x = 1$, porque $f(1)$ no existe (si hacemos $x = 1$ en la función, el denominador se anula). A pesar de que no existe en este punto, y por tanto no podemos calcular el valor de la función en él, podemos preguntarnos qué le ocurre a la función cuando nos aproximamos mucho al 1, aunque no lleguemos. Y esto lo vamos a hacer utilizando, una vez más, tablas de valores de la función.

Empezamos aproximándonos al 1 desde la izquierda, es decir, con valores cada vez más próximos a 1, pero menores que 1,

x	$0'7$	$0'8$	$0'9$	$0'99$	$0'999$	$0'9999$
$f(x)$	$1'49$	$1'64$	$1'81$	$1'9801$	$1'9980$	$1'9998$

Según vemos en la tabla de valores, nos estamos aproximando al número 2. Si hacemos lo mismo, pero ahora por la derecha, es decir, con valores que se aproximan a 2, pero mayores que 2,

x	$1'3$	$1'2$	$1'1$	$1'01$	$1'001$	$1'0001$
$f(x)$	$2'69$	$2'44$	$2'21$	$2'0201$	$2'0020$	$2'0002$

también vemos que nos estamos aproximando al 2. Es decir, la función no existe en $x = 1$ pero cuando la x se aproxima al número 1, $f(x)$ se aproxima al número 2.

Diremos entonces que 2 es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1. Y esto lo escribiremos, de forma análoga a como hacíamos con las sucesiones,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Realmente, probar rigurosamente esta afirmación requeriría unas herramientas matemáticas algo más sofisticadas que unas tablas de valores pero, para nuestros objetivos, los cálculos que hemos hecho bastan.

Vamos a adoptar como definición (o idea) de **límite de una función en un punto** la siguiente:

> El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a es L si a medida que x se aproxima al número a, $f(x)$ se aproxima al número L. En cuyo caso escribimos,
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Volvamos a nuestro ejemplo inicial, $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$, para entender lo que ocurre realmente en las cercanías del punto 1. El numerador de la fracción se puede factorizar utilizando la regla de Ruffini. Si lo hacemos, podemos reescribir la función de la forma

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

Entonces, si $x \neq 1$, se puede simplificar el factor $(x - 1)$ del numerador y del denominador, es decir,

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad \text{si } x \neq 1$$

y si $x = 1$, no existe. La gráfica de esta función es, entonces, como la gráfica de la parábola $y = x^2 + 1$, pero con un hueco en $x = 1$. Así la hemos representado en la figura 8.1. En la gráfica se puede apreciar que si nos acercamos desde la izquierda o desde la derecha al número 1, la función se aproxima al número 2.

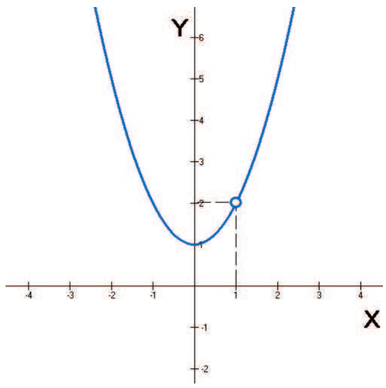


Figura 8.1: Gráfica de $y = f(x)$

1.2. Límites laterales

Según hemos visto, decir que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, significa que cuando x se aproxima a 1, $f(x)$ se aproxima a 2. Ahora bien, para acercarnos al 1, tenemos dos posibilidades, que han quedado reflejadas en las tablas de valores que hemos hecho: hacerlo desde la izquierda o hacerlo desde la derecha. Los números a los que tiende $f(x)$ al acercarse a 1 por la izquierda o por la derecha se llaman **límites laterales**.

En el ejemplo anterior, la primera tabla de valores mostraba que el *límite a la izquierda* era 2, esto lo escribiremos,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

y la segunda tabla, en la que nos aproximábamos a 1 desde la derecha, mostraba que el *límite a la derecha* era también 2, que escribiremos,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

Para que el límite de una función en un punto exista deben existir y ser iguales los límites laterales: límite a la izquierda y límite a la derecha.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \\ \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \end{cases}$$

Por supuesto, esta situación, la de que los dos límites laterales existan y sean iguales, no siempre se da. Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica de esta función es la de la figura 8.2.

Vamos a estudiar sus límites laterales cuando $x \to 0$, a partir de la gráfica. Es como hacerlo con la tabla de valores, pero más directo.

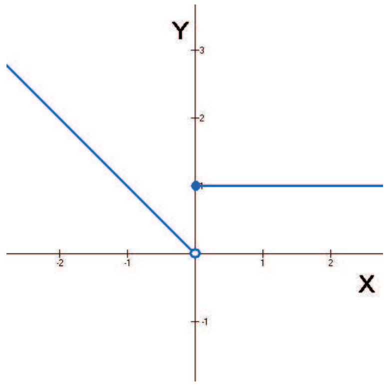


Figura 8.2: Gráfica de $f(x)$

Queremos calcular en primer lugar el límite a la izquierda en 0, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Miramos, sobre el eje X, a la izquierda del cero, ahora, si nos situamos sobre la gráfica de la función, el límite a la izquierda será el número, sobre el eje Y al que se aproxima la gráfica, aunque no llegue hasta él. En este caso, este número es el 0. Por tanto,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

Para calcular el límite a la derecha del 0. Miramos ahora, sobre el eje X, a la derecha del 0. Nos situamos sobre la gráfica de la función y avanzamos hacia el 0 (sobre el eje X), la gráfica de la función ahora se aproxima (de hecho, llega) al número 1 sobre el eje Y. Este es el límite a la derecha. Entonces,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Vemos pues, que los límites laterales existen, pero son distintos. Por lo tanto,

$$\text{No existe} \quad \lim_{x \to 0} f(x)$$

ACTIVIDADES

1. Estudiar los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, utilizando para ello tablas de valores a la izquierda y a la derecha de 3.
Si $x \neq 3$, simplificar la función si se puede.

2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dibujar su gráfica y calcular los límites de la función en $x = 0$ y en $x = 1$.

Recuerda

- ✓ $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si a medida que x se aproxima al número a, $f(x)$ se aproxima al número L.
- ✓ El límite de una función en un punto existe, si y sólo si, existen los límites laterales de la función en ese punto y son iguales:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to a^-} f(x) = L \\ \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = L \end{cases}$$

2. Continuidad

Una función es continua cuando su gráfica la podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel, de un sólo trazo. Esta idea intuitiva se puede formalizar utilizando límites laterales. Ya en los ejemplos y actividades anteriores, se podía empezar a sospechar que el hecho de que la gráfica de una función esté o no "rota" en el punto, afecta de manera significativa al resultado del límite. Empezaremos estudiando precisamente a través de ejemplos, la posibles "roturas", discontinuidades es como se les denomina en matemáticas, que puede tener la gráfica de una función en un punto, para después definir qué debe ocurrir para que una función no esté rota, es decir, sea continua en un punto.

2.1. Discontinuidades

Una función puede presentar una **discontinuidad en un punto** de varias maneras. En los tres ejemplos siguientes analizamos las diferentes posibilidades:

Primer ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La gráfica de esta función definida a trozos la hemos dibujado en la figura 8.3.
Estudiamos los límites laterales en $x = 1$:
- Límite por la izquierda, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.
- Límite por la derecha, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$.
Como existen los límites laterales y son iguales, existe el límite de la función y es

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

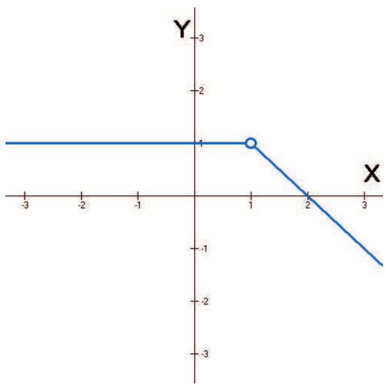


Figura 8.3: Discontinuidad evitable

Ahora bien, $f(1)$ no existe. Esta es la razón por la que, en la gráfica, hay un hueco en ese punto. Esto hace que la función sea discontinua, es decir, no sea posible dibujarla de un sólo trazo. Sin embargo, bastaría "rellenar" ese punto para que la función fuese continua. Es decir, bastaría con redefinir la función de la forma

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Siempre que estemos en esta situación, diremos que en ese punto la función tiene una **discontinuidad evitable**, precisamente porque se puede evitar redefiniendo la función.

Es importante señalar que la discontinuidad evitable se presenta, no sólo porque la función no esté definida en el punto, sino porque el valor de la función no coincide con los límites. Por ejemplo, si la función es

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

su gráfica es la de la figura 8.4, y sigue siendo una discontinuidad evitable. Sólo hay que colocar el punto en su lugar adecuado.

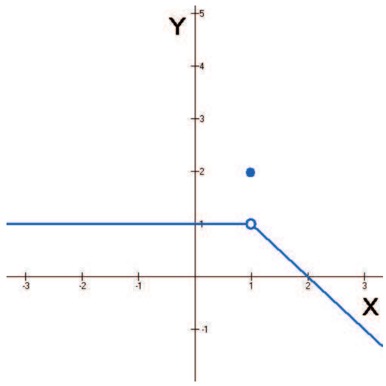


Figura 8.4: Discontinuidad evitable

Segundo ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En primer lugar, dibujamos la gráfica (figura 8.5).
Apoyándonos en la gráfica, calculamos los límites laterales en $x = 0$:
- Límite por la izquierda, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.
- Límite por la derecha, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$.
Existen los límites laterales, pero son distintos, por tanto, no existe el límite

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

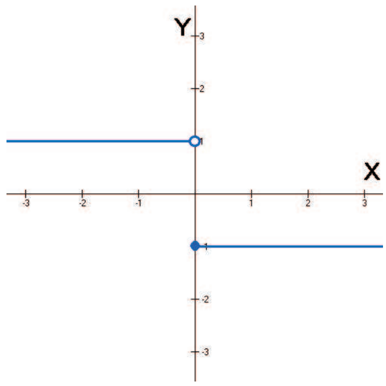


Figura 8.5: Salto finito

En este caso, además de estar no ser continua, es evidente que la cosa no se arregla añadiendo un punto o varios puntos. Si la quisiéramos hacer continua, deberíamos añadir un segmento vertical que uniese los dos trozos, pero esto haría que no fuese una función.

Cuando estemos en esta situación, es decir, que existan los límites laterales pero sean distintos, diremos que la función presenta en $x = 0$ una **discontinuidad inevitable de salto finito**. Se llama *longitud del salto* a la diferencia entre los dos límites laterales, que en este caso, es 2.

Por cierto, el hecho de que exista $f(0) = -1$ (el punto relleno de la gráfica) es completamente irrelevante para clasificar la discontinuidad, si no existiese tendríamos la misma situación.

Tercer ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ahora tenemos un caso distinto de los dos anteriores. No sólo no existe el límite, sino que hay uno de los límites laterales que tampoco va a existir. La gráfica la hemos representado en la figura 8.6.

Estudiamos los límites laterales en $x = 0$:

- Límite a la izquierda, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

- Límite a la derecha, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Ya que, a la derecha de 0, la gráfica va hacia infinito, sin aproximarse a ningún número. Aunque escribamos $= +\infty$, el límite a la derecha no existe, para que existiese, debería ser un número finito.

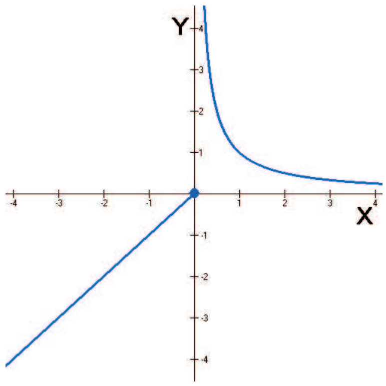


Figura 8.6: Salto infinito

Por tanto, el límite no existe, hay también un salto, pero en este caso, de longitud infinita. Entonces, siempre que uno, o los dos límites laterales, sea infinito, diremos que en ese punto la función presenta una **discontinuidad inevitable de salto infinito**. Insistimos en el hecho de que para que haya discontinuidad inevitable de salto infinito hace falta que, al menos uno de los dos límites laterales, sea infinito. Al igual que en el caso anterior, es irrelevante que la función esté o no esté definida en el punto.

ACTIVIDADES

3. Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 2 \\ -x+1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Estudiar sus discontinuidades en los puntos 0, 1 y 2.

2.2. Continuidad en un punto

En el apartado anterior hemos visto tres ejemplos de funciones que presentaban puntos de discontinuidad de varias formas distintas. Entender ahora qué debe ocurrir para que una función sea **continua en un punto** es sencillo si repasamos los ejemplos anteriores:

En el tercer ejemplo, discontinuidad inevitable de salto infinito, la continuidad fallaba porque uno de los límites laterales era infinito. En el segundo ejemplo, discontinuidad inevitable de salto finito, existían los dos límites laterales, pero eran distintos. Y en el primer ejemplo, la continuidad no se daba porque, aunque existían los límites laterales y eran iguales, el valor de éstos no coincidía con el valor de la función en el punto, de hecho la función ni siquiera estaba definida en el punto.

Entonces, ¿qué le debe ocurrir a una función para que sea continua en un punto? Pues es evidente que los límites laterales deben existir y ser iguales, pero esto no es suficiente, además hace falta que la función esté definida en el punto y el valor de la función coincida precisamente con el de los límites laterales. En otras palabras,

Una función f es continua en el punto $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

El hecho de que se cumpla la expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, implica que se cumplen los siguientes puntos, que son los que hay que verficar en cada caso para comprobar que una función es continua:

- Que exista el límite a la izquierda, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
- Que exista el límite a la derecha, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
- Que la función esté definida en el punto, es decir, que exista $f(a)$.
- Que los tres números anteriores coincidan, es decir,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ACTIVIDADES

4. Estudiar la continuidad de la función siguiente en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.3. Funciones continuas

Ya sabemos cuándo una función es continua en un punto concreto y cuándo no lo es. Si una función es continua en todos los números reales o, en su caso, en todo el dominio de definición, diremos que es una **función continua**, sin especificar ningún punto.

También es posible hablar de una función continua en un intervalo o dominio concreto. Por ejemplo, si decimos que f es continua en $(1, 2)$, estamos queriendo decir que es continua en todos los x tales que $1 < x < 2$. Sin embargo, cuando queremos indicar que es continua en un intervalo cerrado, es algo distinto. Por ejemplo, una función f tiene por dominio de definición el intervalo cerrado $[1, 2]$. Estrictamente hablando, no es posible que en 1 sea continua, ya que en el punto 1 no hay límite a la izquierda, ni siquiera hay función. En este caso, para que f sea continua en $[1, 2]$, lo único que se exige es que el límite a la derecha en 1 coincida con el valor de la función en 1. En $x = 2$, lo mismo, pero ahora es el límite a la izquierda el que ha de coincidir con $f(2)$. En estas circunstancias se tiene una función continua en un intervalo cerrado. Las funciones continuas en intervalos cerrados tienen muchas y muy interesantes propiedades que serán estudiadas en profundidad en el curso siguiente, por esta razón aquí no insistiremos mucho más.

Lo que sí nos interesa saber es qué funciones de las que hemos estudiado hasta ahora son funciones continuas. En realidad, basta con repasar sus gráficas. Si volvemos a echar un vistazo a las gráficas de las funciones estudiadas en la unidad anterior, observamos que son continuas:

- La función constante, en todo $\mathbb{R}$.

- Las funciones polinómicas, no solamente las de grado 1 y 2 que hemos estudiado en la unidad anterior, sino también las de grado mayor que 2, son continuas en todos los reales.

- La función exponencial de cualquier base es continua en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo, la función logarítmica sólo es continua en su dominio, es decir, en el intervalo $(0, +\infty)$.

- Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo, la función $\operatorname{tg}(x)$ tiene puntos de discontinuidad (¿de qué tipo?) en los puntos de la forma $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, con k entero, que son precisamente los puntos en los que no existe.

Además, por medio de las operaciones entre funciones que estudiamos en la unidad anterior, podemos construir muchas más funciones continuas, ya que en la mayoría de las ocasiones, después de efectuar una operación entre funciones, la continuidad se mantiene.

En concreto, si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas, entonces:

- $f(x) + g(x)$ es continua.
- $f(x).g(x)$ es continua.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en los puntos en los que $g(x) \neq 0$.
- $f(g(x))$ y $g(f(x))$ son continuas.

Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que es el cociente de dos funciones continuas y el denominador sólo se anula en 0.

Saber que una función es continua de antemano resulta de una enorme utilidad a la hora de calcular límites. Dado que, si f es continua en a entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, para calcular el límite de una función continua en un punto basta con sustituir ese número en la función.

Por ejemplo, la función $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ es un polinomio, por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$. Entonces, si queremos calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$, sólo tenemos que sustituir el 2 en la x de la función,

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x^2+2x-5)=2^3-3{\cdot}2^2+2{\cdot}2-5=-5$$

Esto es algo que utilizaremos frecuentemente a la hora de calcular límites.

ACTIVIDADES

5. Indicar los puntos en los que las funciones siguientes son continuas:

a) $f(x)=3x^2-2x+3$ b) $g(x)=\operatorname{sen}(x^2-3)$ c) $h(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)(x+5)}$

Recuerda

- ✓ Una función f es *continua en un punto* a si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.
- ✓ Si no es continua, la discontinuidad en el punto puede ser de diferentes tipos:

  - *Discontinuidad evitable.* Cuando existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$, pero este valor no coincide con $f(a)$, o bien $f(a)$ no existe.

  - *Discontinuidad inevitable de salto finito.* Cuando existen los límites laterales, pero son distintos.

  - *Discontinuidad inevitable de salto infinito.* Cuando alguno de los límites laterales, o ambos, es infinito.
- ✓ Son *funciones continuas*: los polinomios, exponenciales, $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, en todo $\mathbb{R}$; las funciones logarítmicas, en $(0,+\infty)$; la función $\operatorname{tg}(x)$ en todo $\mathbb{R}$, excepto en los puntos de la forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, con k entero.

3. Límite de una función en el infinito

Hemos estudiado qué es el límite de una función cuando x tiende a un punto a. Ahora vamos a ver qué ocurre cuando x tiende a $+\infty$, o a $-\infty$. Es decir, cuando el valor de x crece o decrece indefinidamente.

3.1. Límites finitos en el infinito

En la figura 8.7 hemos representado la gráfica de la función arcotangente $y=\operatorname{arctg}(x)$. Recordemos que esta función es la inversa de la función tangente.

Además, su dominio está formado por todos los números reales, y su imagen, es el intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

¿Qué ocurre con la gráfica de la función cuando x crece indefinidamente? Para responder a esta cuestión, miramos lo que ocurre con la gráfica a medida que vamos recorriendo el eje X hacia la derecha. Y, lo que ocurre, es que la gráfica se aproxima cada vez más a la recta horizontal, que también hemos dibujado en la figura, $y = \frac{\pi}{2}$, si bien la gráfica nunca llega a alcanzar a la recta. Si hacemos los cálculos con una calculadora (puesta en radianes), a medida que calculamos $\operatorname{arc\,tg}(x)$ para valores de x grandes, observamos que nos aproximamos cada vez más al número $1'5707963267$, que es el valor aproximado de $\frac{\pi}{2}$.

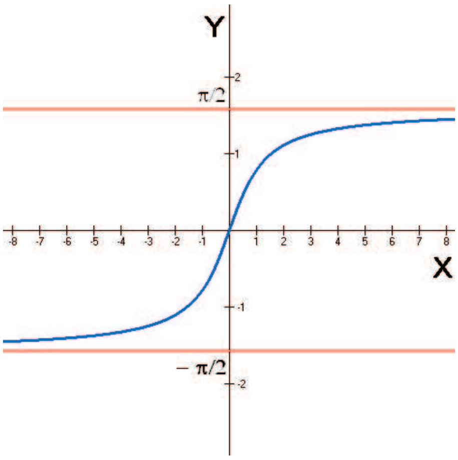


Figura 8.7: Gráfica de $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$

Las observaciones anteriores muestran que si x tiende a ∞ entonces $f(x)$ se aproxima a $\frac{\pi}{2}$. En otras palabras, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a ∞, es $\frac{\pi}{2}$, que escribimos,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

La recta $y = \frac{\pi}{2}$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$, una recta horizontal a la que la gráfica de la función se aproxima, aunque no llegue a alcanzarla.

Siguiendo con la figura 8.7, si x tiende a $-\infty$, ocurre lo mismo que antes (ahora hay que ver hacia dónde se aproxima la gráfica a medida que recorremos el eje X hacia la izquierda), pero ahora el número al que tiende la función es $\frac{-\pi}{2}$. Por tanto, el límite de $f(x)$, cuando x tiende a $-\infty$, es $\frac{-\pi}{2}$, que escribiremos,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2}$$

Por supuesto $y = \frac{-\pi}{2}$ también es una *asíntota horizontal* de la función arcotangente.

Una función puede tener asíntotas horizontales y también puede tener **asíntotas verticales**, de hecho, éstas ya han aparecido cuando hemos estudiado las *discontinuidades inevitables de salto infinito.* Las asíntotas verticales son rectas verticales a las que la gráfica de la función se aproxima, sin llegar a alcanzarlas. El estudio de las asíntotas de una función resulta muy útil para representar su gráfica, por esta razón, volveremos sobre este tema en la unidad didáctica en la que estudiaremos la representación de funciones.

ACTIVIDADES

6. Dibujar la gráfica de una función que tenga los siguientes límites en el infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

7. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (*función de proporcionalidad inversa*). A partir de la gráfica, calcular sus límites en el infinito.

3.2. Límites infinitos en el infinito

Las asíntotas horizontales aparecen cuando alguno de los límites en el infinito es finito, es decir, existe. Sin embargo, también pueden darse otras situaciones.

Por ejemplo, en las figuras 8.8 y 8.9 hemos dibujado las gráficas de dos funciones; $y = f(x)$, $y = g(x)$, respectivamente. En ambos casos se puede observar que las

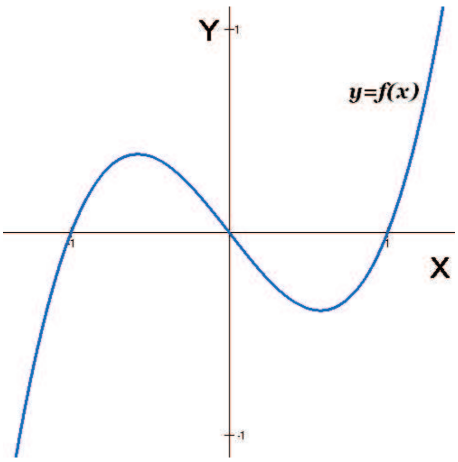


Figura 8.8: Gráfica de $y = f(x)$

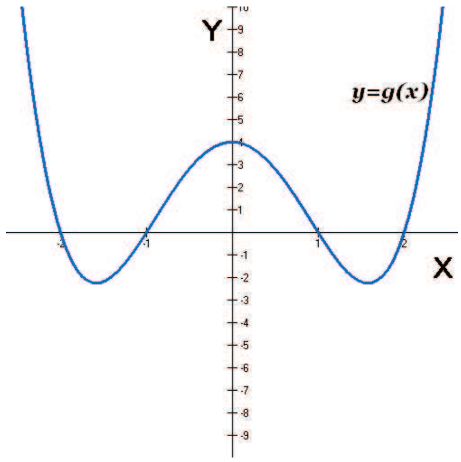


Figura 8.9: Gráfica de $y = g(x)$

funciones no tienen asíntotas horizontales.

En el caso de la función $y = f(x)$ (figura 8.8), cuando x tiende a $+\infty$, la gráfica de la función sube hacia $+\infty$. Por esta razón, el límite en el infinito no existe y escribimos,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

y cuando x tiende a $-\infty$, la gráfica de la función baja hacia $-\infty$. Tampoco aquí exite el límite y escribimos,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

En la función $y = g(x)$ (figura 8.9), tanto si x tiende a $+\infty$, como si lo hace a $-\infty$, la gráfica sube hacia $+\infty$. Por tanto, ahora los límites en el infinito son:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

Insistimos en el hecho de que estos límites *no existen*, a pesar de que escribamos "$= +\infty$"o "$= -\infty$". Para que un límite exista es necesario que tienda a un número finito. Cuando un límite en el infinito no existe, como en los casos anteriores, pero el límite es infinito, a veces se dice que la función tiene una *rama parabólica*, porque la gráfica en la parte en la que va a infinito parece precisamente la rama de una parábola. Aunque también puede ocurrir que en lugar de tener una rama parabólica la gráfica de la función se aproxime a alguna recta oblicua. Tendríamos en este caso una *asíntota oblicua*. Estas asíntotas, junto a las horizontales y verticales, serán objeto de estudio en la unidad didáctica dedicada a la representación de funciones.

En la figura 8.10 tenemos la gráfica de una función que presenta un comportamiento en el infinito completamente diferente a los descritos anteriormente. Se trata de la gráfica de la función seno, que ya estudiamos cuando vimos las funciones periódicas, aunque igual nos serviría la gráfica de la función coseno o la función tangente. En la gráfica del seno vemos que cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, la función no se acerca a ningún valor concreto, ni se va hacia más infinito (arriba), ni se va hacia menos infinito (abajo). En esta función, los límites en el infinito simplemente no existen.

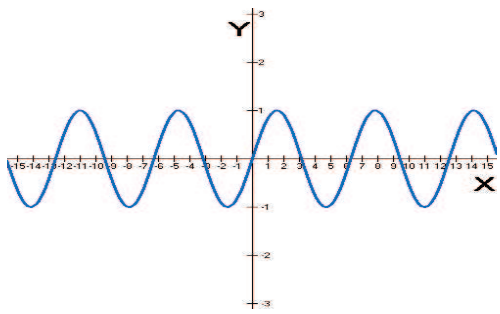
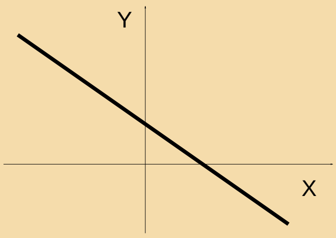


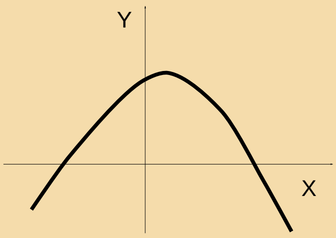
Figura 8.10: Gráfica de $y = \mathrm{sen}(x)$

ACTIVIDADES

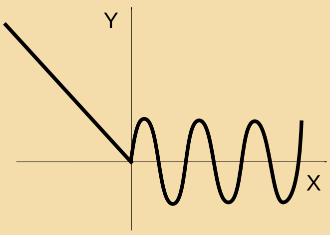
8. Calcular los límites en el infinito de las funciones de las gráficas siguientes:



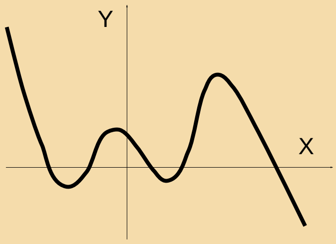
a)



b)



c)



d)

Recuerda

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = K$, si a medida que x crece (indefinidamente), $f(x)$ se aproxima al número K. En este caso el límite existe y además, $y = K$ es una *asíntota horizontal* de la función.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$, si a medida que x decrece (indefinidamente), $f(x)$ se aproxima al número M. También en este caso, $y = M$ es una asíntota horizontal.
- Además los límites en el infinito pueden no existir, bien porque la función vaya hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$, bien porque la gráfica de la función oscile sin aproximarse a ningún punto concreto.

4. Cálculo de límites

Si disponemos de la gráfica de la función, el cálculo de un límite es sencillo, no hay más que mirar en el lugar adecuado del dibujo. Si no tenemos la gráfica, siempre podemos hacer una tabla de valores, aunque esto resulta a veces bastante laborioso. Afortunadamente, la mayoría de los límites de funciones elementales, o combinaciones de éstas, se pueden calcular sin la gráfica y sin tablas de valores, realizando algunos cálculos y utilizando razonamientos muy sencillos. Eso es lo que vamos a aprender en esta sección. Estos procedimientos que aprenderemos serán utilizados con mucha frecuencia en las unidades didácticas posteriores, por lo que su aprendizaje resulta especialmente importante.

4.1. Cálculo de límites en un punto

Ya sabemos que si una función f es continua en a, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esta fórmula nos proporciona una técnica de aplicación inmediata cuando la función es continua en el punto en el que queremos calcular el límite: sustituir el punto a en la x de la función.

Por ejemplo, queremos calcular el límite $\lim_{x\to 5}(4x^2 - 7x + 2)$

La función $f(x) = 4x^2 - 7x + 2$ es un polinomio, por tanto continua. Entonces, sólo tenemos que sustituir 5 en x:

$$\lim_{x\to 5}(4x^2 - 7x + 2) = 4{\cdot}5^2 - 7{\cdot}5 + 2 = 67$$

ACTIVIDADES

9. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}(3x^3 + 7x^2 - 2x + 2)$ b) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2}\right)$.

Esto es lo primero que hay que hacer para calcular un límite en un punto, sustituir el punto en la x de la función. Cuando la función sea continua en ese punto, como en el ejemplo y la actividad anterior, el problema está resuelto. Si no es así habrá que hacer algún cálculo más, dependiendo del resultado de la sustitución. Vamos a ir viendo los diferentes casos que pueden aparecer mediante ejemplos:

Ejemplo $\displaystyle\lim_{x\to -3}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)$

En este caso las funciones que hay en el numerador y el denominador son continuas. Sus límites respectivos son

$$\lim_{x\to -3}(x+4)=1; \qquad \lim_{x\to -3}(x+3)=0.$$

Pero, $\dfrac{1}{0}$ no existe, no se puede dividir por cero. Realmente lo que ocurre es que el denominador se aproxima mucho a cero, aunque nunca llega a serlo. Si dividimos un número, el 4, por un número cada vez más pequeño, más próximo a cero, el resultado será un número muy grande. El límite es ∞, es decir, no existe. Lo único que hay que determinar es si es $+\infty$ o $-\infty$ y esto dependerá del signo del numerador y denominador que, a su vez, dependerá de que nos aproximemos a -3 por la derecha o por la izquierda. Para hacer esto, se pueden hacer tablas de valores a la izquierda y a la derecha de -3, aunque basta con elegir un valor de prueba tanto a la izquierda como a la derecha.

Por ejemplo; para determinar el signo a la izquierda de -3, elegimos el número $x=-3'1$, entonces, los signos del numerador y denominador de la fracción son $\dfrac{(+)}{(-)}=$ $-$; para determinar el signo a la derecha, elegimos el número $x=-2'9$, los signos son ahora $\dfrac{(+)}{(+)}=+$. Entonces, los límites laterales de la función son

$$\lim_{x\to -3^-}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)=-\infty; \qquad \lim_{x\to -3^+}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)=+\infty$$

Se trata en definitiva de un límite que no existe y en el punto $x=-3$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Ejemplo $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}\right)$

En primer lugar calculamos los límites del numerador y del denominador sustituyendo 2 en la x de la función:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+x-6)=0; \qquad \lim_{x\to 2}(x^2-x-2)=0$$

Aunque parece igual, ahora la situación es distinta a la anterior. Ya que, $\dfrac{0}{0}$ es lo que se llama una **indeterminación** matemática. Las indeterminaciones ya aparecieron cuando estudiamos los límites de las sucesiones, cuando tenemos una indeterminación, el límite puede existir o puede no existir, por eso se dice que el límite está *indeterminado*.

En el cálculo de límites pueden aparecer hasta siete indeterminaciones distintas, que son

$$\mathbf{\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad \infty-\infty;\quad 0.\infty;\quad 1^{\infty};\quad \infty^{0};\quad 0^{0}}$$

Este curso sólo estudiaremos algunos de los casos, los más sencillos.

Pero, sigamos con nuestro ejemplo. Para deshacer la indeterminación $\frac{0}{0}$ hay que intentar simplificar los factores que, en el numerador y en el denominador de la fracción, hacen que éstos sean nulos. Como numerador y denominador son polinomios, se pueden simplificar usando la *Regla de Ruffini*, (o bien resolviendo la ecuación de segundo grado, ya que son de grado dos). De cualquier forma, el límite con numerador y denominador factorizados queda,

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)}$$

Ahora podemos simplificar el factor $(x-2)$ en el numerador y denominador, con lo que el límite queda finalmente,

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{2+3}{2+1} = \frac{5}{3}$$

Puede ocurrir que, después de haber simplificado una vez, al volver a sustituir, continuase la indeterminación, esto indicaría que hay que seguir simplificando.

ACTIVIDADES

10. Calcular los siguientes límites. Si no existe alguno, calcular sus límites laterales:

a) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-2x+5}\right)$ b) $\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-4x-5}\right)$ c) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+5x^2+7x+3}\right)$.

Ejemplo $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Empezamos, como en todos los ejemplos anteriores, calculando los límites del numerador y del denominador sustituyendo;

$$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}-2\right) = 0; \qquad \lim_{x\to 3}(x-3) = 0$$

Volvemos a tener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Sin embargo, ahora el numerador no es un polinomio (a las expresiones del tipo $\sqrt{x+1}$ se les llama funciones irracionales) y, por tanto, no se puede aplicar la regla de Ruffini para factorizarlo. Lo que sí funciona en estos casos es multiplicar y dividir por la **expresión conjugada** del numerador.

La expresión conjugada de $P+Q$ es $P-Q$. Si multiplicamos las dos expresiones, estamos multiplicando una suma por una diferencia, el resultado es $(P+Q)(P-Q) = P^2 - Q^2$.

De esta manera, la raíz cuadrada acaba elevada al cuadrado, lo cual nos va a permitir poder simplificar con el numerador. Veamos de qué forma:

Multiplicamos y dividimos el límite por la expresión conjugada del numerador $\left(\sqrt{x+1}-2\right)$ que es $\left(\sqrt{x+1}+2\right)$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} &= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\end{aligned}$$

Ahora podemos simplificar el factor $(x-3)$, para después sustituir, y de esta forma el límite queda calculado,

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}.$$

Puede ocurrir que la raíz cuadrada esté en el denominador, en lugar de en el numerador. En este caso habrá que multiplicar y dividir por la expresión conjugada del denominador. Incluso puede que haya en numerador y denominador, entonces hay que hacer lo anterior dos veces.

ACTIVIDADES

11. Calcular los siguientes límites en los que aparecen expresiones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{x+3}$.

4.2. Cálculo de límites en el infinito

El cálculo del límite de una función cuando x tiende a infinito, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ es exactamente igual que el cálculo de límites de sucesiones de números reales, es decir, $\lim\limits_{n\to +\infty} a_n$ que estudiamos en la unidad correspondiente. En aquel caso la variable era n, y ahora la variable es x. Por lo tanto, no vamos a repetir aquí lo que se comentó en su momento. Lo que no es igual es el cálculo de límites cuando x tiende a $-\infty$. Sin embargo, utilizando una pequeña transformación, el cálculo de un límite cuando x tiende a $-\infty$ se puede convertir en un límite cuando x tiende a $+\infty$.

La idea es muy simple: si $x\to -\infty$, entonces $(-x)\to +\infty$. Como consecuencia,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(-x)$$

Veamos un ejemplo. Queremos calcular el límite siguiente: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{4x^3+3x+8}$

Aplicando lo anterior, lo transformamos en un límite $x \to +\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4x^3+3x+8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x)^3-2(-x)^2-3(-x)+2}{4(-x)^3+3(-x)+8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3-2x^2+3x+2}{-4x^3-3x+8}$$

Como sabemos, este límite produce una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Se puede deshacer dividiendo numerador y denominador por la x de mayor grado del denominador y pasando al límite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3-2x^2+3x+2}{-4x^3-3x+8} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{-4x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{8}{x^3}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{-4-\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}} \\ &= \frac{-1-0+0+0}{-4-0+0} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Como acabamos de ver en este ejemplo, es muy recomendable repasar la parte correspondiente al cálculo de límites de sucesiones.

ACTIVIDADES

12. Calcular los siguientes límites de funciones en el infinito:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3+4x+5}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4}{3x^4+4x+5}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{-x+5}-\sqrt{-x-2}\right)$.

Recuerda

✓ *Cálculo de límites en un punto.*

Para calcular el límite de una función en un punto, lo primero que hay que hacer es sustituir el valor al que tiende x en la función. Puede que el límite exista y el problema esté resuelto. Si no es así, aparecerá una indeterminación:

Las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, cuando tenemos un cociente de polinomios, se resuelven factorizando numerador y denominador y simplificando los factores que los anulan.

Si la indeterminación es $\frac{0}{0}$, pero aparece alguna expresión irracional en el numerador o el denominador; se multiplica y divide por la expresión conjugada.

✓ *Cálculo de límites en el infinito.*

Los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ se calculan exactamente de la misma forma que se calculaban los límites de sucesiones de números reales, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Para calcular los límites cuando $x \to -\infty$, se utiliza el hecho siguiente, para transformarlos en límites cuando $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

9 Cálculo de derivadas

ÍNDICE DE CONTENIDOS

En esta unidad vamos a estudiar un problema geométrico: el de calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. La solución a este problema da lugar al cálculo de derivadas, que es un conjunto de técnicas que tienen aplicaciones en multitud de campos de la ciencia. Dadas dos magnitudes, por ejemplo el tiempo y el espacio recorrido en ese tiempo por un móvil, la derivada nos indica cuál es la razón (proporción) de cambio del espacio con respecto del tiempo, es decir, la velocidad.

1. Concepto de derivada

1.1. Tasa de Variación Media

La **pendiente** de una recta es un número que mide la inclinación de esa recta. Por ejemplo, en la figura 9.1 hemos representado una recta en el plano, su pendiente la podemos calcular con la fórmula

$$m = \frac{d-c}{b-a}$$

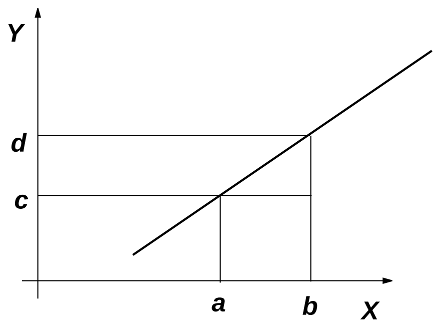


Figura 9.1: Pendiente de una recta

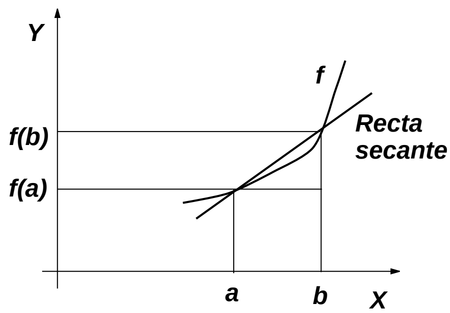


Figura 9.2: Recta secante

Supongamos ahora que tenemos una función que no es una recta. Si consideramos el intervalo $[a, b]$, el número equivalente a la pendiente en este intervalo (ver la figura 9.2) es

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Como se puede apreciar en la figura 9.2, este número es la pendiente de la recta **secante** a la gráfica de la función en este intervalo, es decir, la recta que corta a la gráfica de la función en los extremos del intervalo $[a, b]$. Este número, que mide la variación media de la función en el intervalo $[a, b]$ se llama **Tasa de Variación Media** de la función f en el intervalo $[a, b]$.

Por ejemplo, para la función $f(x) = 2x^2$, su Tasa de Variación Media en el intervalo $[1, 2]$ es

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{8-2}{1} = 6$$

lo que nos indica que la función ha aumentado 6 unidades en el intervalo $[1, 2]$.

ACTIVIDADES

1. Sea $f(x) = -2x^2 + 1$. Calcular su Tasa de Variación Media en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 3]$.

1.2. Derivada en un punto. Tasa de Variación Instantánea

Dada una función f, su **derivada** en un punto a, si existe, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

Veamos cómo podemos llegar a calcular este número:

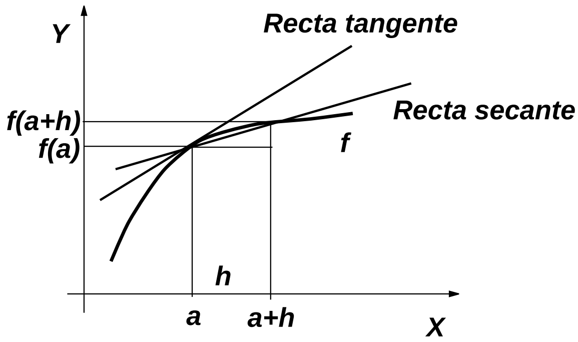


Figura 9.3: Derivada

Observemos la figura 9.3. Queremos calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x = a$. En el intervalo $[a, a+h]$ (en la gráfica se ha dibujado con $h > 0$, pero sería igual con h negativo) hemos dibujado la recta secante a la gráfica. Su pendiente viene dada por la Tasa de Variación Media en ese intervalo, es decir,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Por otra parte, según vemos en la figura 9.3, si h se va haciendo cada vez más pequeño, llegará un momento en el que la recta secante se habrá convertido en la recta tangente. Por tanto, si h se hace pequeño, **la pendiente de la recta secante se convierte en la pendiente de la recta tangente**. Es decir,

$$\boxed{\text{Pendiente de la recta secante}} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \boxed{\text{Pendiente de la recta tangente}}$$

Pero para hacer que h sea pequeño, es decir, que h tienda a 0, tenemos que calcular un límite.

Por tanto, si f es una función, llamamos **derivada de la función** f en $x = a$ al límite siguiente, si existe,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Calcular la derivada de una función en un punto supone entonces el cálculo de un límite. Si este límite existe, se dice que la función es **derivable**.

Por ejemplo, queremos calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ para $x = 1$, es decir, queremos calcular $f'(1)$.

Aplicamos la fórmula anterior,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

simplificando en el numerador y sacando h factor común, que se simplifica con la h del denominador,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

Por tanto, la derivada de la función $f(x) = x^2$ para $x = 1$, es decir, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$ es $f'(1) = 2$.

ACTIVIDADES

2. Dada la función $f(x) = 2x^2 - 1$, calcular $f'(3)$.

Debido a que la derivada de una función en un punto es el límite de la Tasa de Variación Media, también se llama a veces a la derivada, **Tasa de Variación Instantánea.**

Además de la notación $f'(a)$ para la derivada de una función en el punto $x = a$, a veces también se utiliza esta otra notación, debida a Leibniz, $\dfrac{df}{dx}(a)$.

1.3. Recta tangente y recta normal

Una de las formas de calcular la ecuación de una recta es la de utilizar la ecuación de la forma punto-pendiente, ya estudiada antes. Conociendo un punto por el que pase la recta, (x_0, y_0) y su pendiente m, la ecuación en la forma punto-pendiente es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

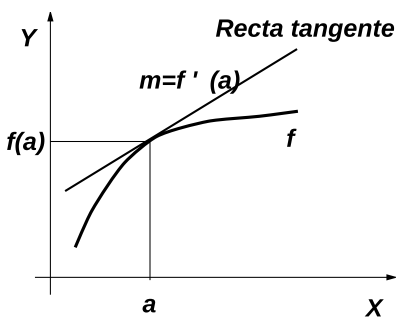


Figura 9.4: Recta tangente

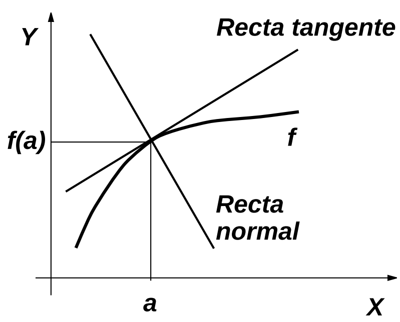


Figura 9.5: Rectas tangente y normal

En el caso de la **recta tangente**, según vemos en la figura 9.4, la recta pasa por el punto de coordenadas $(a, f(a))$ y, como hemos visto antes, su pendiente es $m = f'(a)$. Entonces su ecuación se calcula mediante la expresión

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

Por otra parte, si tenemos una recta de pendiente m, sabemos que la pendiente de cualquier recta perpendicular a ésta es $m' = \frac{-1}{m}$, si $m \neq 0$. Utilizando esta idea, podemos calcular la ecuación de la recta que pasa por el mismo punto, $(a, f(a))$ y que es perpendicular a la recta tangente. A esta recta se le llama **recta normal** (ver figura 9.5), y su ecuación es

$$\boldsymbol{y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)}$$

ACTIVIDADES

3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a su gráfica en el punto $x = 1$. Hacer una gráfica aproximada.

1.4. Derivada y velocidad instantánea

Supongamos que un objeto se mueve según la función $e(t) = 0'5t + 2$, donde t es el tiempo, medido en segundos, y $e(t)$ es el espacio que recorre, medido en metros. Se trata de lo que en Física se denomina un movimiento rectilíneo uniforme. La gráfica de la función es la de la figura 9.6.

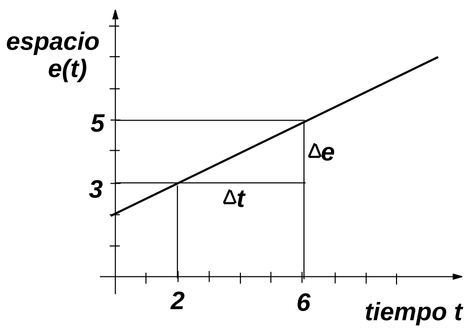


Figura 9.6: Movimiento rectilíneo

Para calcular la velocidad hay que dividir el espacio recorrido entre el tiempo que se tarda en recorrerlo,

$$\text{velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

(Δt es la variación del tiempo y Δe es la variación del espacio).
En el intervalo que se ha señalado en la figura 9.6 el valor de la velocidad es

$$\text{velocidad} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{5-3}{6-2} = \frac{2}{4} = 0'5 \text{ metros/segundo}$$

Hay que observar que la velocidad habría sido la misma si se hubiese considerado cualquier otro intervalo. La razón es que se trata de una recta. En realidad lo que hemos hecho al calcular la velocidad, es calcular la pendiente de la recta. Desde el punto de vista físico esto significa que la velocidad es la misma en cualquier instante de tiempo.

Supongamos ahora que el objeto se mueve según la función $e(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3$. Ahora la gráfica es la de la figura 9.7.

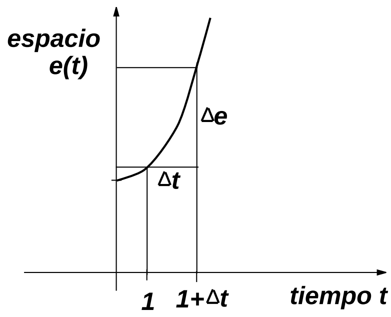


Figura 9.7: Movimiento no uniforme

Es evidente que ahora la velocidad no es la misma en todos los instantes de tiempo, sino que va aumentando a medida que transcurre éste. Si ahora queremos calcular la velocidad en un instante de tiempo determinado, la **velocidad instantánea**, en $t = 1$ por ejemplo. El cociente anterior $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, es sólo una aproximación al número que queremos calcular, que será tanto más exacta cuanto más pequeño sea Δt. Una vez más necesitamos calcular un límite:

$$v(1) = (\text{velocidad en } t = 1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(1+\Delta t) - e(1)}{\Delta t}$$

como $e(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 = \frac{7}{2}$ y $e(1+\Delta t) = \frac{1}{2}(1+\Delta t)^2 + 3 = \frac{1}{2}\Delta t^2 + \Delta t + \frac{7}{2}$, sustituyendo y simplificando,

$$v(1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(\frac{1}{2}\Delta t + 1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{1}{2}\Delta t + 1) = 1 \text{ metro/segundo}$$

En realidad, lo que hemos hecho, con otra notación, es calcular la derivada de la función $e(t)$ en $t = 1$, es decir, $e'(1)$.

En general, si $e(t)$ es el espacio recorrido por un objeto, su **velocidad instantánea** en el instante de tiempo $t = t_0$ es la derivada de la función $e(t)$ en ese instante de tiempo, es decir,

$$\boldsymbol{v(t_0) = e'(t_0) = \frac{de}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t_0 + \Delta t) - e(t_0)}{\Delta t}}$$

ACTIVIDADES

4. Un objeto se mueve según la función $e(t) = 2t^2 - 1$ metros, donde t es el tiempo, medido en segundos. Calcular su velocidad instantánea para $t = 2$ segundos, es decir, calcular $v(2) = e'(2)$.

5. Un objeto se mueve según la función $e(t) = 3t + 5$ metros, con t medido en segundos. Calcular su velocidad para los instantes de tiempo $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$. ¿A qué se debe el resultado?

Recuerda

✓ La Tasa de Variación Media de la función f en el intervalo $[a, b]$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

✓ La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Se calcula mediante el límite

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Cuando este límite existe, se dice que la función es derivable.

✓ La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en $x = a$ se calcula mediante la expresión

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

✓ La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f en $x = a$ se calcula mediante la expresión

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

✓ Si $e(t)$ es el espacio recorrido por un objeto en el tiempo t, su velocidad instantánea en t_0 es la derivada de la función $e(t)$ para $t = t_0$, es decir, $v(t_0) = e'(t_0)$.

2. Derivabilidad y continuidad

Según hemos visto, para que una función f sea derivable es necesario que exista el límite siguiente:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Si en esta expresión hacemos $x = a + h$, entonces decir que $h \to 0$ equivale a decir que $x \to a$. Por tanto, el límite se puede reescribir de la forma equivalente

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Utilizando esta definición alternativa de derivabilidad, vamos a ver que existe una relación importante entre continuidad y derivabilidad.

Sabemos, porque ya lo hemos estudiado en la unidad anterior, que para que una función f sea continua en $x = a$ el límite de la función en ese punto debe coincidir con su imagen en el mismo punto, es decir,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Supongamos que f es derivable en $x = a$, entonces,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Pero esto es equivalente a

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right] = 0.$$

Hacemos operaciones,

$$0 = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \right] = \frac{\lim_{x \to a} [f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)]}{\lim_{x \to a} (x - a)}$$

Por tanto,

$$0 = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)] = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] - \lim_{x \to a} [f'(a)(x - a)] = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)]$$

Pero, si $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; y esto significa que f es continua en $x = a$. Esto prueba que

Si $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{x = a}$, entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{x = a}$.

No es preciso aprender de memoria la deducción anterior, ni otras que aparecerán en esta unidad, pero sí que puede resultar un buen ejercicio intentar comprenderla y animamos al alumno a ello.

Lo que sí es muy importante es la consecuencia de los cálculos, es decir, el hecho de que si una función es derivable en un punto, entonces siempre será continua en ese punto. Ahora bien, cabe la pregunta inversa,

Si una función es continua en un punto, ¿será también derivable en ese punto?

La respuesta es negativa. Veamos un ejemplo clásico de que una función puede ser continua sin ser derivable:

La función valor absoluto, ya estudiada antes, se podía definir de la forma

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

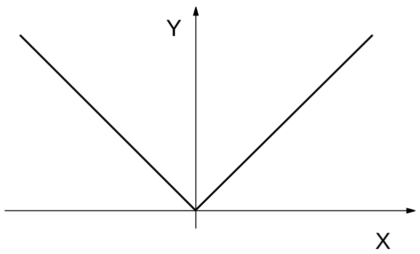


Figura 9.8: Función valor absoluto

Su gráfica es la de la figura 9.8. En la figura podemos apreciar que la función en $x = 0$ es continua, sin embargo, ¿es derivable?

Para responder a la pregunta, intentamos calcular la derivada en $x = 0$.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Como la función está definida en dos trozos, que son distintos a la izquierda y a la derecha del 0, tenemos que calcular los límites laterales.

Por la izquierda,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Por la derecha,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Por lo tanto, no existe el límite, dado que los límites laterales existen pero son distintos, y por tanto, no existe la derivada $f'(0)$.

Este ejemplo prueba un importante hecho, el hecho de que una función puede ser continua sin ser derivable.

ACTIVIDADES

6. Sea la función $f(x) = |x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Dibujar la gráfica de la función. A partir de la gráfica, ¿es continua en $x = 2$? Estudiar su derivabilidad en el mismo punto.

7. Una función derivable es continua. Una función puede ser continua sin ser derivable. Pero, si una función no es continua, ¿puede ser derivable?

2.1. Derivadas laterales

En el ejemplo del valor absoluto ha sido necesario calcular los límites laterales en la definición de derivada. A estos límites se les llama **derivadas laterales** y se denominan, para un caso cualquiera,

Derivada a la izquierda $f'(a-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Derivada a la derecha $f'(a+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Por tanto, para que una función sea derivable en un punto, es preciso que en ese punto existan las derivadas laterales y sean iguales. Es decir,

$$\boldsymbol{f} \text{ es derivable en } \boldsymbol{x = a \Leftrightarrow f'(a-) = f'(a+)}$$

ACTIVIDADES

8. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad en $x = 0$ utilizando las derivadas laterales.

2.2. Funciones derivables

Como acabamos de ver para que una función sea derivable en un punto es preciso que existan las derivadas laterales y sean iguales. Esto tiene una implicación geométrica importante, ya que supone que la recta tangente dibujada desde la izquierda o desde la derecha del punto en cuestión debe coincidir. Esto ocurre siempre que la función tenga en ese punto una variación "suave", o lo que es lo mismo, en ese punto no puede haber un punto como el que aparece en la función valor absoluto. A estos puntos se les llama **puntos angulosos** (ver figura 9.8).

Estos son los puntos en los que una función no es derivable, aun siendo continua.

Cuando decimos que una función es derivable, sin especificar en qué punto, entendemos que es derivable en todos los puntos de su dominio de definición.

La mayoría de las funciones que hemos estudiado hasta ahora son derivables. En particular, las funciones polinómicas, las trigonométricas y las funciones exponenciales y logarítmicas.

Además, si f y g son funciones derivables, también lo son: $f \pm g$, $f.g$, $\dfrac{f}{g}$ si $g \neq 0$ y las composiciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$.

Recuerda

- ✓ Si una función es derivable, entonces es continua.
- ✓ Una función puede ser continua sin ser derivable.
- ✓ Las derivadas laterales son los límites laterales de la definición de derivada. Para que una función sea derivable, las derivadas laterales deben existir y ser iguales.
- ✓ Una función es derivable en un punto cuando en este punto su variación es "suave", es decir, no tiene un punto anguloso.

3. Función derivada

Dada la función $f(x) = x^2$, podemos calcular su derivada en un punto concreto, por ejemplo, $f'(1)$. Sin embargo, también podemos calcular su derivada en un punto genérico x, de la misma forma que lo haríamos en 1:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h))}{h} = 2x$$

Por tanto, $f'(x) = 2x$. Esta fórmula la podemos utilizar ahora para calcular la derivada en $x = 1$, sin más que sustituir, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, o en cualquier otro punto.

A esta nueva función, a la obtenida con la fórmula

$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

la llamaremos **función derivada** de f, o bien, simplemente **derivada** de f.

ACTIVIDADES

9. Calcular la derivada (función derivada) de la función $f(x) = x^3$.
(Indicación: será necesario utilizar la fómula del desarrollo del cubo de una suma que es $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$).

3.1. Derivadas de orden superior

Dada la función $f(x)$, de la forma descrita antes, podemos calcular su derivada, $f'(x)$ que es a su vez una nueva función. Como es una nueva función, quizá (si existe) se pueda calcular su derivada. A esta nueva función, a la derivada de la derivada, la llamaremos **derivada segunda** y se denotará $f''(x)$. Y así sucesivamente, la derivada de la derivada segunda, será la **derivada tercera** y se denotará $f'''(x)$, etc.

Ya comentamos en su momento que la derivada $f'(x)$ se podía denotar $\frac{df}{dx}$. La derivada segunda $f''(x)$ también se puede denotar $\frac{d^2f}{dx^2}$, la derivada tercera $f'''(x)$ también se puede denotar $\frac{d^3f}{dx^3}$, y así sucesivamente.

3.2. Derivada de algunas funciones elementales

El cálculo de la derivada de una función o de la derivada en un punto se hace mediante un límite. La mayoría de las veces este cálculo no es muy complicado, pero sí que puede resultar tedioso. Sin embargo, se puede automatizar, tanto es así que existen programas de ordenador capaces de hacerlo. Aunque no vamos a llegar a hacerlo, ni es necesario, con la rapidez de un ordenador, sí que vamos a ir viendo cómo se pueden obtener las derivadas de algunas funciones elementales. Estas fórmulas las vamos a ir aprendiendo, de manera que, recordando unas pocas y algunas reglas sencillas podamos obtener, casi automáticamente, la derivada de cualquier función sin necesidad de recurrir continuamente a la definición de derivada.

Las fórmulas que vamos a obtener se han puesto todas juntas en una **Tabla de Derivadas** que se encuentra en la sección 7, con el objeto de que sea más cómoda su utilización y aprendizaje, sobre todo al principio.

Empezamos pues con la obtención de las derivadas de algunas funciones elementales. (A partir de ahora, por comodidad, utilizaremos la notación $y = 5x$ en lugar de $f(x) = 5x$, en cuyo caso, la derivada se denotará y'):

• **Derivada de la función constante** $y = k$

La función constante $y = k$ tiene por gráfica una recta horizontal, como vimos en su momento. Por tanto, su pendiente, es decir, su derivada es nula en cualquier punto. Entonces,

$$\boldsymbol{y = k \qquad y' = 0}$$

• **Derivada de la función** $y = x$

También $y = x$ es una recta, y sabemos que tiene pendiente 1 en cualquier punto, así que éste es el valor de la derivada. Entonces,

$$\boldsymbol{y = x \qquad y' = 1}$$

• **Derivada de la función** $y = x^n$

Ahora ya no tenemos una recta, así que no nos sirve el argumento de las dos anteriores. Supongamos que n es un número entero positivo, es decir, $n = 1, 2, 3, ...$

Para $n = 1$. Si $y = x$, hemos visto que $y' = 1$.

Para $n = 2$. Si $y = x^2$, también ha aparecido antes en un ejemplo resuelto, tenemos que $y = 2x$.

Si $y = x^3$, se puede comprobar o se habrá comprobado si se ha resuelto la actividad 9, que la derivada es $y' = 3x^2$.

Si hacemos el cálculo para $y = x^4$, (pero no lo vamos a hacer) obtenemos $y' = 4x^3$. Para $y = x^5$, $y' = 5x^4$.

Seguro que nos imaginamos ya qué ocurre en general. En efecto,

$$\boldsymbol{y = x^n \qquad y' = nx^{n-1}}$$

Pues bien, esta misma fórmula también es válida si n es un número real cualquiera: una fracción, un número irracional, el 0... Aunque la deducción de este hecho escapa a las intenciones de esta introducción.

• **Derivada de la raíz cuadrada** $y = \sqrt{x}$

Esta función se puede escribir como una potencia, $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Entonces, para calcular su derivada, no hay más que aplicar la fórmula anterior. Aunque aparece con tanta frecuencia que es conveniente aprenderla por separado. La calculamos:

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Entonces,

$$y = \sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- **Derivada de** $y = \dfrac{1}{x}$

También esta función se puede escribir como una potencia: $y = x^{-1}$. Se puede comprobar que su derivada es

$$y = \frac{1}{x} \qquad y' = \frac{-1}{x^2}$$

ACTIVIDADES

10. Calcular la derivada de la función $f(x) = 5$ utilizando la definición de derivada. Comprobar que el resultado coincide con lo deducido en el texto para la función constante en general.

11. Utilizando la fórmula de la derivada de $y = x^n$, calcular la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ y comprobar que se obtiene la fórmula anterior.

Recuerda

✓ La derivada o función derivada se obtiene aplicando la definición de derivada a un punto genérico x.

✓ La derivada se puede volver a derivar y se obtiene la derivada segunda, después la tercera, y así sucesivamente.

✓ Derivadas de algunas funciones elementales:

- $y = k \qquad y' = 0$
- $y = x \qquad y' = 1$
- $y = x^n \qquad y' = nx^{n-1}$
- $y = \sqrt{x} \qquad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y = \dfrac{1}{x} \qquad y' = \dfrac{-1}{x^2}$

4. Reglas de derivación

Ya conocemos las derivadas de algunas funciones elementales. Ahora vamos a estudiar algunas reglas de derivación que nos van a permitir poder calcular la derivada de un número mayor de funciones. En primer lugar, veremos las correspondientes a las operaciones básicas entre funciones. Estas fórmulas que vamos a ver a continuación se pueden deducir a partir de la definición, sin embargo, nos vamos a centrar más en su utilización que en su deducción.

4.1. Reglas para derivar sumas, productos y cocientes

• **Derivada de una constante por una función** $y = k{\cdot}f(x)$

Para derivar el producto de una constante por una función, sólo es necesario derivar la función, la constante se queda tal cual. Por ejemplo, queremos derivar

$$y = 5x^7$$

Dejamos la constante como está y derivamos la función, es decir,

$$y' = 5{\cdot}7x^6 = 35x^6$$

Entonces,

$$\boldsymbol{y = k{\cdot}f(x) \qquad y' = k{\cdot}f'(x)}$$

• **Derivada de una suma o una diferencia de funciones** $y = f(x) \pm g(x)$

Para derivar una suma o una diferencia de funciones, hay que derivar cada uno de las funciones que se intevienen en la suma o diferencia. Por ejemplo, para derivar la suma

$$y = x^3 + \sqrt{x}$$

derivamos cada uno de los sumandos,

$$y' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boldsymbol{y = f(x) \pm g(x) \qquad y' = f'(x) \pm g'(x)}$$

• **Derivada de un producto de dos funciones** $y = f(x){\cdot}g(x)$

La derivada de un producto no es tan inmediata como la de una suma, ya que la derivada de un producto **no** es el producto de las derivadas, como se podría esperar. La fórmula correcta es

$$\boldsymbol{y = f(x){\cdot}g(x) \qquad y' = f'(x){\cdot}g(x) + f(x){\cdot}g'(x)}$$

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la derivada de $y = (x^2+1)\sqrt{x}$. Aplicando la fórmula anterior,

$$y' = (2x)\sqrt{x} + (x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$$

Es importante acostumbrarse, desde el principio, a simplificar al máximo el resultado de una derivada. La razón por la que es importante aprender a calcular derivadas es porque se trata de una herramienta que después utilizaremos, y para utilizarla de manera más eficiente es necesario que tenga la forma más cómoda posible. Por esta razón la simplificación de una derivada es tan importante como su obtención.

• **Derivada de un cociente de dos funciones** $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

La derivada de un cociente se puede obtener utilizando la definición de derivada (al igual que la de un producto). Sin embargo, también se puede obtener fácilmente a partir de la fórmula de la derivada de un producto. Vamos a deducirla de esta forma, para así realizar un ejercicio de uso de la derivada de un producto.

Queremos calcular la derivada de un cociente de dos funciones. Lo escribimos de la forma

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Nuestro objetivo es entonces calcular $h'(x)$, para ello, despejamos de la expresión anterior la función $f(x)$.

$$f(x) = h(x) \cdot g(x)$$

y calculamos la derivada de $f(x)$, utilizando la fórmula de la derivada de un producto,

$$f'(x) = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

Como queríamos calcular $h'(x)$, la despejamos de la expresión anterior,

$$h'(x) = \frac{f'(x) - h(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$$

pero $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Entonces, sustituyendo $h(x)$ en la expresión anterior y operando, se obtiene

$$h'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}.g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Por ejemplo, para calcular la derivada de $y = \dfrac{x+1}{x-3}$, hacemos

$$y' = \frac{1 \cdot (x-3) - (x+1) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2}$$

4.2. Regla de la cadena

La **regla de la cadena** es sin duda la regla más importante de las derivadas. Esto es así porque se utiliza en todas aquellas situaciones en las que aparece una función dentro de otra, es decir, cuando tenemos una composición de funciones.

Por ejemplo, $y = (2x^3 + x)^8$. En este caso, tenemos la función $g(x) = 2x^3 + x$ dentro de la función $f(x) = x^8$. De manera que $y = f(g(x))$. La regla de la cadena nos va a permitir calcular la derivada de $y = f(g(x))$ a partir de las derivadas de $f(x)$ y de $g(x)$.

Veamos de qué forma:

Para derivar una composición de funciones de la forma $y = f(g(x))$ hay que derivar la función f en $g(x)$ y multiplicar por la derivada $g'(x)$. Es decir,

$$\boldsymbol{y = f(g(x)) \qquad y' = f'(g(x)).g'(x)}$$

En el ejemplo $y = (2x^3 + x)^8$. Como $f(x) = x^8$, entonces $f'(x) = 8x^7$. Por otra parte, como $g(x) = 2x^3 + x$, $g'(x) = 6x^2 + 1$. Entonces, aplicando la fórmula anterior,

$$y' = f'(g(x)).g'(x) = 8(2x^3 + x)^7.(6x^2 + 1)$$

Realmente a efectos prácticos no es necesario utilizar la fórmula textualmente, basta con darse cuenta de cuál es la función que hay dentro y de la que hay fuera. Veamos otro caso. Por ejemplo, $y = \sqrt{4x+5}$.

La primera función que aparece, la de fuera, es $\sqrt{x}$. La derivada de esta función es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, aunque en este caso, lo que hay dentro no es x sino otra función que pondremos en su lugar. Por tanto, en nuestro caso como la función que tenemos es $y = \sqrt{g(x)}$, su derivada será $y' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$. Así, $y' = \frac{1}{2\sqrt{4x+5}},4 = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$.

ACTIVIDADES

12. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 2x$ b) $y = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ c) $y = \frac{5}{x}$

13. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 + 3x)\sqrt{x}$ b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

14. Calcular las derivadas de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena:

a) $y = (x^2 + 1)^{20}$ b) $y = \sqrt{5x^2 - 1}$

Recuerda

✓ Derivada de una constante por una función

$$y = k \cdot f(x) \qquad y' = k \cdot f'(x)$$

✓ Derivada de una suma de funciones

$$y = f(x) \pm g(x) \qquad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

✓ Derivada de un producto de dos funciones

$$y = f(x) \cdot g(x) \qquad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

✓ Derivada de un cociente de dos funciones

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

✓ Regla de la Cadena

$$y = f(g(x)) \qquad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

5. Derivada de las funciones logarítmica y exponencial

5.1. Derivada de la función logarítmica

En primer lugar, es conveniente recordar aquí las propiedades de los logaritmos ya estudiadas en una unidad anterior.

Propiedades de los logaritmos

$$\log(a.b) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = n\log(a) \qquad \log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Aplicando estas propiedades y la definición de derivada, se puede comprobar que la derivada del logaritmo neperiano es

$$\boldsymbol{y = \ln(x) \qquad y' = \frac{1}{x}}$$

Entonces, por ejemplo, para calcular la derivada de $y = \ln(x^2 + 5x)$. Aplicando la regla de la cadena

$$y' = \frac{1}{x^2 + 5x}.(2x + 5) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x}$$

Para calcular la derivada de un logaritmo que no sea neperiano, podemos utilizar la fórmula del cambio de base, que es la última de las que recordamos antes.

Es decir, si $a \neq e$, $y = \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$. Como a es una constante,

$$y' = \frac{1}{\ln(a)}.\frac{1}{x}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{y = \log_a(x) \qquad y' = \frac{1}{\ln(a)}.\frac{1}{x}}$$

ACTIVIDADES

15. Calcular las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas utilizando la regla de la cadena:

a) $y = \ln(5x + 3)$ b) $y = \log_2(\sqrt{x} + 1)$

5.2. Derivada de la función exponencial

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$. Vamos a ver en primer lugar cómo se calcula la derivada de esta función cuando la base es el número e, para después generalizar la fórmula a una base cualquiera.

Queremos derivar $y = e^x$. Tomamos en esta expresión logaritmos neperianos,

$$\ln(y) = \ln(e^x) = x \cdot \ln(e) = x \cdot 1 = x$$

donde hemos aplicado las propiedades de los logaritmos. Tenemos pues,

$$\ln(y) = x$$

Derivamos en los dos miembros de la igualdad anterior, teniendo en cuenta que y es una función, lo que hace que $\ln(y)$ haya que derivarlo utilizando la regla de la cadena,

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1$$

Como queremos calcular y', despejamos de la igualdad anterior,

$$y' = y = e^x$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{y = e^x \qquad y' = e^x}$$

Además de la fórmula obtenida, también es importante el método por el que se ha obtenido, que vamos a utilizar más veces. Obsérvese que primero hemos tomado logaritmos neperianos y después hemos derivado la expresión resultante, $\ln(y) = x$, en la que la y no aparecía despejada explícitamente. A esta forma de derivar una función y se le llama **derivación implícita**, consiste en calcular la derivada de una función y definida implícitamente, es decir, sin que y esté despejada.

Un ejemplo sencillo de derivación implícita, por ejemplo, queremos calcular la derivada de y definida implícitamente en la expresión

$$x^2 + 5y = 1$$

Aunque podríamos despejar y, vamos a hacerlo sin despejarla. Derivamos los dos miembros de la expresión, interpretando que y es una función y x es la variable, entonces, $2x + 5y' = 0$. Ahora despejamos y', con lo que obtenemos $y' = \frac{-2x}{5}$.

Cuando la base de la función exponencial no es el número e, por ejemplo $y = 4^x$, se puede aplicar el mismo procedimiento que antes.

Tomamos logaritmos neperianos,

$$\ln(y) = \ln(4^x) = x.\ln(4) = \ln(4).x.$$

Ahora derivamos implícitamente. Hay que tener en cuenta, para derivar el miembro derecho, que $\ln(4)$ es una constante. Entonces, $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(4)$, despejando y', tenemos $y' = y \cdot \ln(4) = 4^x \cdot \ln(4)$.

En general,

$$\boldsymbol{y = a^x \qquad y' = a^x.\ln(a)}$$

ACTIVIDADES

16. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
a) $y = e^{3x+5}$ b) $y = 5e^{x+2}$ c) $y = xe^{x}$

17. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:
a) $y = 5^{x^3+2}$ b) $y = \dfrac{1}{2^x}$ c) $y = \pi^{\sqrt{x}}$

5.3. Derivada de funciones $y = f(x)^{g(x)}$

El procedimiento que hemos utilizado anteriormente se puede utilizar también para calcular la derivada de funciones como $y = x^x$. Es importante observar que la derivada de esta función no se puede hacer utilizando la fórmula para derivar potencias de la forma x^n, ya que esta fórmula sólo es válida cuando n es una constante, no una función que contenga x.

Veamos cómo se puede derivar $y = x^x$ y este procedimiento será válido para cualquier función de la forma $y = f(x)^{g(x)}$.

Tomamos logaritmos neperianos,

$$\ln(y) = \ln(x^x) = x.\ln(x)$$

y derivamos implícitamente. Ahora en el miembro derecho aparece un producto de dos funciones, hay que utilizar por tanto, la regla de la derivada de un producto,

$$\frac{1}{y}.y' = 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Despejamos y' y sustiuimos y por su valor inicial,

$$y' = y.[\ln(x) + 1] = x^x[\ln(x) + 1].$$

ACTIVIDADES

18. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
a) $y = (x + 3)^x$ b) $y = (5x)^{x^2+1}$

Recuerda

- ✓ Derivada de las funciones logarítmicas

$$y = \ln(x) \qquad y' = \frac{1}{x}$$
$$y = \log_a(x)x \qquad y' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}$$

- ✓ Derivada de las funciones exponenciales

$$y = e^x \qquad y' = e^x$$
$$y = a^x \qquad y' = a^x.\ln(a)$$

- ✓ Para derivar funciones de la forma $y = f(x)^{g(x)}$, tomar logaritmos neperianos, derivar implícitamente y despejar y'.

6. Derivadas de las funciones trigonométricas

6.1. Derivada del seno, coseno y tangente

Empecemos calculando con la definición la derivada de la función seno. Se puede prescindir de esta deducción para el desarrollo posterior, su inclusión aquí hay que entenderla como un simple ejercicio de repaso.

Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Aplicando la definición de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}$$

utilizamos ahora la fórmula del seno de una suma: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$, y el límite queda,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h)+\operatorname{sen}(h)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{h}$$

Ahora separamos adecuadamente en dos límites,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen}(x).\frac{\cos(h)-1}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\cos(x).\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right]$$

Pero, se puede comprobar que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$ y que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$. Esto se puede hacer con una calculadora científica, poniéndola en radianes (posición RAD) y dando valores a h valores cada vez más próximos a 0. En el primer caso, observaremos que los resultados se aproximan cada vez más a 0, y en el segundo, que se aproximan cada vez más a 1.

Por tanto, la derivada que queríamos calcular queda,

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)$$

Hemos obtenido, y esto es lo importante, que la derivada del seno es el coseno,

$$\boldsymbol{y = \operatorname{sen}(x) \qquad y' = \cos(x)}$$

La derivada del coseno se puede calcular a partir de la derivada del seno de varias formas. Quizá una de las más sencillas sea tener en cuenta la *relación fundamental de la trigonometría*, $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Si $y = cos(x)$, se verifica, por la relación anterior, $(\operatorname{sen}(x))^2 + y^2 = 1$. Derivando implícitamente,

$$2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + 2y\cdot y' = 0$$

(Hemos aplicado la regla de la cadena para derivar los dos cuadrados y tenido en cuenta que y es una función.)

Ahora despejamos y',

$$y' = \frac{-\operatorname{sen}(x).\cos(x)}{y} = \frac{-\operatorname{sen}(x).\cos(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{sen}(x)$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{y = \cos(x) \qquad y' = -\operatorname{sen}(x)}$$

ACTIVIDADES

19. Calcular las derivadas siguientes, utilizando la regla de la cadena donde sea necesario: a) $y = \operatorname{sen}(x^3 + x)$ b) $y = x.\cos(x)$ c) $y = \cos(\sqrt{x})$

Para calcular la derivada de la tangente, basta tener en cuenta que se puede escribir como un cociente, $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Se propone como ejercicio en la actividad siguiente calcular su derivada utilizando la regla del cociente y comprobar que

$$\boldsymbol{y = \operatorname{tg}(x) \qquad y' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)}$$

Las tres formas diferentes de escribir esta derivada provienen de las relaciones trigonométricas.

ACTIVIDADES

20. Utilizando la regla del cociente, calcular la derivada de la función tangente y comprobar que se obtienen los resultados anteriores.

6.2. Derivada de las funciones trigonométricas inversas

Veamos por fin la derivada de las funciones trigonométricas inversas:
Derivada del arcoseno

$$\boldsymbol{y = \operatorname{arc\,sen}(x) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Derivada del arcocoseno

$$\boldsymbol{y = \operatorname{arc\,cos}(x) \qquad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Derivada del arcotangente

$$\boldsymbol{y = \operatorname{arc\,tg}(x) \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Vamos a deducir una de ellas, las otras dos se hacen de una manera completamente análoga. Por ejemplo, vamos a deducir la derivada de la función arcoseno, $y = \operatorname{arc\,sen}(x)$.

Como la función arcoseno es la inversa de la función seno,

$$y = \operatorname{arc\,sen}(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(y) = x$$

Derivamos esta expresión implícitamente, entonces,

$$\cos(y) \cdot y' = 1$$

Despejando y',

$$y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En este último cálculo hemos utilizado la relación fundamental de la trigonometría $\operatorname{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1$, para poner el coseno en función del seno, y además el hecho de que $\operatorname{sen}(y) = x$.

ACTIVIDADES

21. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arc\,sen}(x-1)$ b) $y = x \cdot \operatorname{arc\,tg}(x)$ c) $y = \ln(\operatorname{arc\,cos}(x))$

Recuerda

✓ Fórmulas para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas:

$$y = \operatorname{sen}(x) \qquad y' = \cos(x)$$

$$y = \cos(x) \qquad y' = -\operatorname{sen}(x)$$

$$y = \operatorname{tg}(x) \qquad y' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

✓ Fórmulas para calcular las derivadas de las funciones trigonométricas inversas:

$$y = \text{arcsen}(x) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arccos}(x) \qquad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arctg}(x) \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

7. Tabla de derivadas

Funciones elementales	
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{-1}{x^2}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x.\ln(a)$
$y = \ln(x)$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log_a(x)$	$y' = \dfrac{1}{\ln(a)}\dfrac{1}{x}$
$y = \operatorname{sen}(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\operatorname{sen}(x)$
$y = \operatorname{tg}(x)$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
$y = \text{arcsen}(x)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arccos}(x)$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arctg}(x)$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
Reglas de derivación	
$y = k.f(x)$	$y' = k.f'(x)$
$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = f(x).g(x)$	$y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)).g'(x)$

10 Representación de funciones

ÍNDICE DE CONTENIDOS

El cálculo de derivadas, que hemos estudiado en la unidad anterior, tiene multitud de aplicaciones a diversos campos científicos. No obstante, una de las aplicaciones inmediatas es el estudio de la gráfica de una función. Esto es lo que vamos a ver en esta unidad, cómo se puede realizar un estudio cualitativo de los aspectos fundamentales de la gráfica de una función utilizando la derivada.

1. Monotonía: máximos y mínimos

De las ideas que se han estudiado en la unidad anterior, la más importante, es la de que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Utilizando esta idea vamos a estudiar cómo crece o decrece una función (monotonía) y cómo se pueden localizar sus máximos y sus mínimos.

1.1. Crecimiento y decrecimiento

En la gráfica de la figura 10.1 hemos representado una función **creciente**. Una función es creciente si, a medida que aumenta la x aumenta la y. De manera más precisa:

Una función es creciente si para cualesquiera a y b, tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \leq f(b)$, como podemos apreciar en la figura.

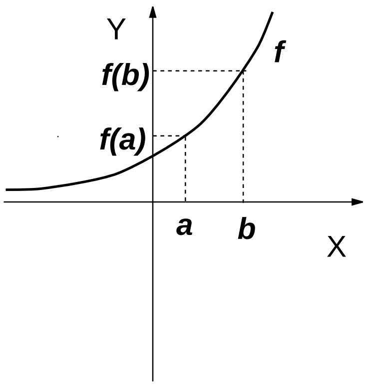


Figura 10.1: Función creciente

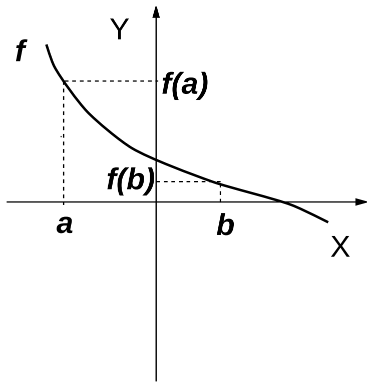


Figura 10.2: Función decreciente

Por otra parte, en la gráfica de la figura 10.2, hemos representado una función **decreciente**, es decir, una función en la que, a medida que aumenta la x disminuye la y. En otras palabras:

Una función es decreciente si para cualesquiera a y b, tales que $a < b$, se cumple que $f(a) \geq f(b)$.

Cuando una función es creciente en todo su dominio, o decreciente en todo el dominio, se dice que es **monótona**. Así, la función de la figura 10.1 es *monótona creciente*, y la función de la figura 10.2 es *monótona decreciente*.

Una función puede no ser monótona, cuando sea creciente en unos intervalos y decreciente en otros. Por ejemplo, la función de la figura 10.3 no es monótona, debido a que es creciente en el intervalo $(-\infty, p)$, decreciente en el intervalo (p, q), y vuelve a ser creciente en el intervalo $(q, +\infty)$.

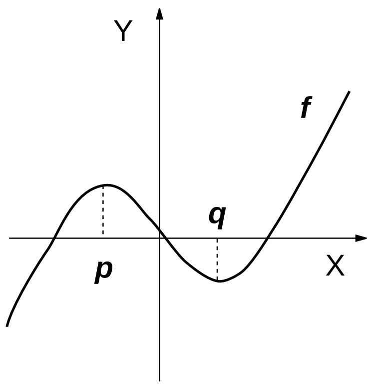
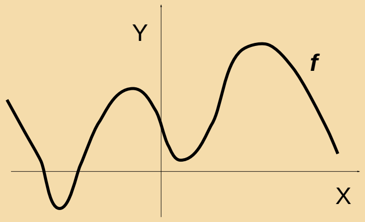


Figura 10.3: Función no monótona

ACTIVIDADES

1. Indicar los intervalos en los que la función de la gráfica adjunta es creciente y en cuáles es decreciente.



¿Qué ocurre con la derivada de una función creciente o decreciente?

En las gráficas de las figuras 10.4 y 10.5 hemos dibujado la recta tangente en un punto de una función creciente y una decreciente, respectivamente. En el caso de la función creciente, vemos que la inclinación de la recta tangente hace que ésta tenga pendiente positiva, ya que la tangente del ángulo que forma con el eje OX es positiva, por tanto, su derivada en cualquier punto también lo será. Analogamente, en el caso de la función decreciente, la inclinación de la recta tangente hace que tenga pendiente negativa y, este mismo signo tendrá su derivada. Entonces, estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función mediante su derivada, consiste en estudiar su signo, según el siguiente criterio:

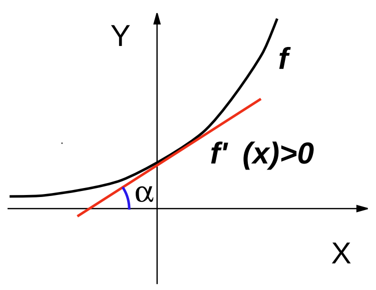


Figura 10.4: Función creciente

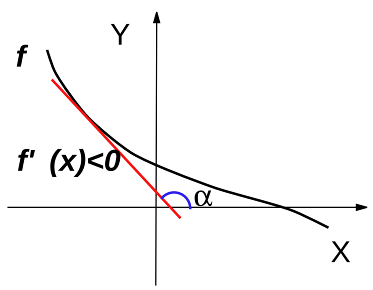


Figura 10.5: Función decreciente

Sea f una función derivable en los puntos del intervalo abierto (a, b):
• Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).
• Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).

Por ejemplo, si queremos saber cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$.

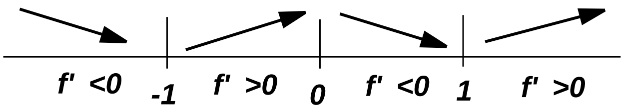
En primer lugar, calculamos su derivada,

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$$

Queremos estudiar el signo de la derivada primera, por esta razón hemos factorizado la derivada. Como $f'(x)$ es un polinomio, es una función continua en todo $\mathbb{R}$, luego $f'(x)$ sólo puede cambiar de signo en los puntos en los que se anula, es decir,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -1; x = 1$$

Para ver entonces cuál es el signo, utilizamos el siguiente esquema, en el que se han representado los tres puntos anteriores (la línea horizontal representa el eje X):



Como $f'(x) < 0$ en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, en estos intervalos la función resulta decreciente. Como $f'(x) > 0$ en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$. El signo en cada intervalo se decide sustituyendo un número cualquiera de ese intervalo en $f'(x)$. (Por ejemplo, para ver el signo en el intervalo $(0, 1)$, probamos con $x = 0'5$: $f'(0'5) = 4{\cdot}0'5{\cdot}(0'5-1)(0'5+1) = 4{\cdot}0'5{\cdot}(-0'5){\cdot}1'5 < 0$, y así sucesivamente).

ACTIVIDADES

2. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x$.

1.2. Máximos y mínimos

Una función alcanza en un punto un **máximo relativo** cuando en ese punto toma el valor más alto de todos los que se encuentran cerca de él. De la misma manera, una función alcanza en un punto un **mínimo relativo** cuando en ese punto toma el

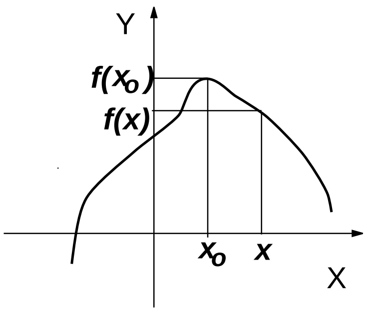


Figura 10.6: Máximo

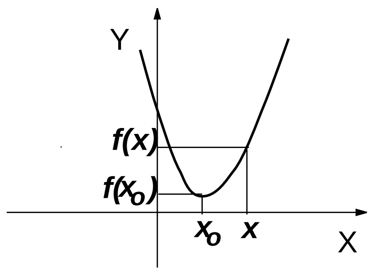


Figura 10.7: Mínimo

valor más bajo de todos los que se encuentran cerca de él. En las gráficas de las figuras 10.6 y 10.7 hemos dibujado sendas funciones con un máximo y un mínimo relativo, respectivamente. Por ejemplo, en la figura 10.6 el máximo se alcanza en el punto x_0, porque para cualquier otro punto x cerca de x_0 el valor $f(x_0)$ es mayor (o igual) que el valor $f(x)$. Análogamente con el mínimo.

Para precisar la idea de *cercanía* lo que hacemos es pensar en algún intervalo (a, b) en el que esté incluido el punto x_0. Resumiendo,

f tiene en x_0 un máximo relativo si existe un intervalo (a, b) que contiene a x_0, tal que para todo $x \in (a, b)$ se cumple $f(x_0) \geq f(x)$.

(Lo importante aquí, más que recordar definiciones más o menos formales, es que la idea geométrica de máximo y de mínimo quede clara, a partir de aquí intentar escribir la definición consistirá en intentar describir lo que vemos en la gráfica).

ACTIVIDADES

3. Escribir la definición de mínimo relativo de una función.

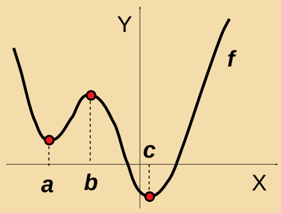
A los máximos y mínimos relativos también se les denomina a veces máximos y mínimo *locales*. Usaremos a veces la expresión **extremos relativos** o *extremos locales*, para referirnos a ambos, máximos y mínimos.

Además de extremos locales, una función también puede tener **extremos absolutos** cuando, en lugar de tener en cuenta sólo un intervalo, tenemos en cuenta todo el dominio de la función.

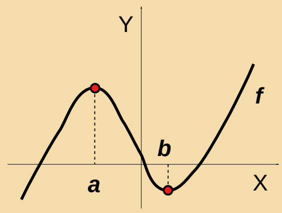
Una función tiene en x_0 un **máximo absoluto** si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x del dominio de definición de la función.
Una función tiene en x_0 un **mínimo absoluto** si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x del dominio de definición de la función.

ACTIVIDADES

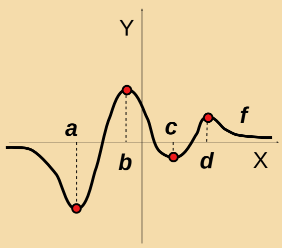
4. Indicar, en las gráficas siguientes, cuáles son los extremos locales y absolutos:



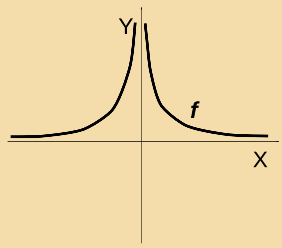
a)



b)



c)



d)

Como hemos hecho con el crecimiento y decrecimiento, ahora nos preguntamos qué ocurre con la derivada en un máximo o en un mínimo. Y para saber la respuesta, una vez más, acudimos a las gráficas. En la gráfica de la figura 10.8 hemos dibujado una función con tresextremos relativos en los puntos a, b y c.

En el punto $x = a$ hay un mínimo relativo y en $x = b$ hay un máximo relativo. En ambos puntos la recta tangente es horizontal y, por tanto, de pendiente nula, luego en estos puntos la derivada es 0, $f'(a) = 0$ y $f'(b) = 0$. El punto $x = c$ también es un mínimo relativo, pero además es un punto anguloso, entonces no existe la derivada (para indicar que la derivada primera no existe en este punto utilizamos el símbolo $\nexists$, que significa precisamente *no existe*, que ya ha sido utilizado a lo largo del texto.) Estas son pues las situaciones que se pueden presentar: la derivada es nula o la derivada no existe. De hecho, se puede demostrar que:

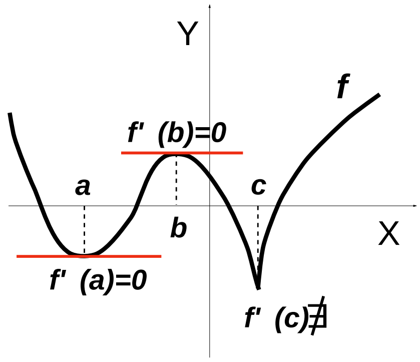


Figura 10.8: Extremos y derivada

Siendo f es derivable en los puntos del intervalo abierto (a, b), si f alcanza un máximo o mínimo relativo en $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$.

A estos puntos, a los puntos en los que la derivada es 0 o no existe, se les llama **puntos críticos** o *puntos singulares.* Y, como acabamos de ver, son puntos en los que puede haber máximos o mínimos.

Las observaciones anteriores proporcionan un procedimiento para estudiar, de manera conjunta, crecimiento, decrecimiento y posibles extremos de una función:

- En primer lugar, calculamos la derivada primera y con ella, igualando a 0, o viendo en qué puntos no existe, los puntos críticos.

- En segundo lugar, estudiamos el crecimiento y decrecimiento, mediante el signo de la derivada primera.

- Por último, decidimos dónde hay máximo o mínimo, de acuerdo con los esquemas de las figuras 10.9 y 10.10.

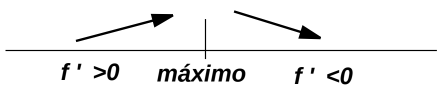


Figura 10.9: Máximo

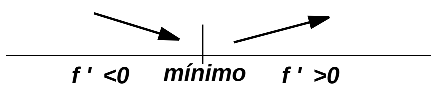


Figura 10.10: Mínimo

Por ejemplo, queremos estudiar los puntos críticos de la función $f(x) = 3x^5 - 20x^3$.

Como es un polinomio, es derivable en todo $\mathbb{R}$, entonces sus puntos críticos sólo van a ser aquellos que anulen la derivada.

Calculamos la derivada primera y la igualamos a 0 para calcular los puntos críticos,

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2 = 15x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2$$

Entonces, en estos tres puntos críticos, $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ es donde puede haber máximos, mínimos o ninguna de las dos cosas.

Estudiamos ahora el crecimiento y decrecimiento mediante el signo de la derivada en los intervalos que determinan los anteriores puntos críticos:

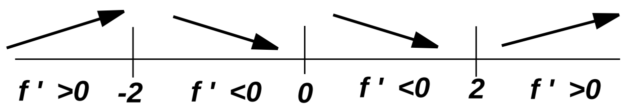


Figura 10.11: Crecimiento y decrecimiento

A la vista del esquema de la figura 10.11, podemos concluir que en $x = -2$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ hay un mínimo relativo, mientras que en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo.

Si este cálculo lo hacemos para después dibujar la gráfica de la función, será necesario conocer las coordenadas de los máximos y mínimos para situarlos sobre la gráfica. Para calcular la segunda coordenada (la y), que es la que nos falta, hay que sustituir la x en la función original $f(x)$ (no en la derivada, que saldría 0). Entonces, el máximo se encuentra en $(-2, 64)$ y el mínimo en el punto de coordenadas $(2, -64)$.

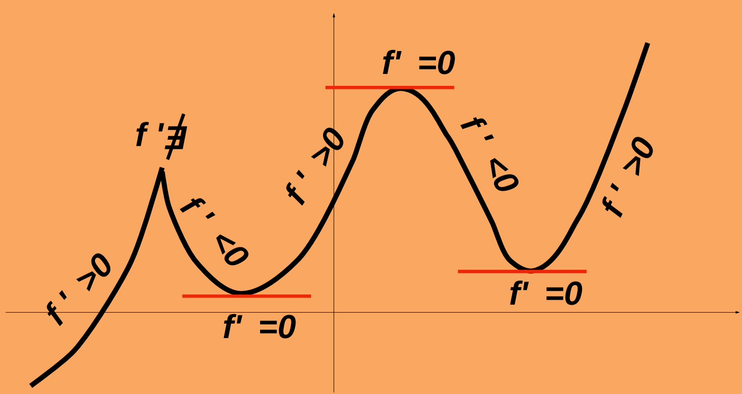
Por último, hay que señalar que este cálculo no nos permite conocer si los máximos y mínimos son absolutos o no, para saber esto, necesitaríamos saber algo más acerca de la forma de la gráfica de la función.

ACTIVIDADES

5. Estudiar los puntos críticos y el crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes: a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

Recuerda

✓ El crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función se pueden estudiar utilizando la derivada primera. Las diferentes situaciones que se pueden presentar están resumidas en la gráfica siguiente:



2. Curvatura

2.1. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Los conceptos de concavidad y convexidad de una función son difíciles de precisar formalmente, pero muy fáciles de comprender mediante un dibujo, y esto es lo que vamos a hacer, intentar entenderlos mediante las gráficas.

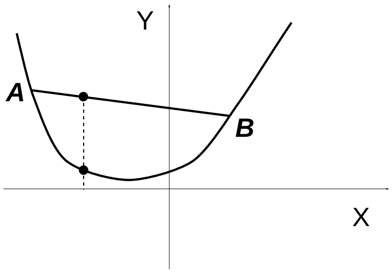


Figura 10.12: Función convexa

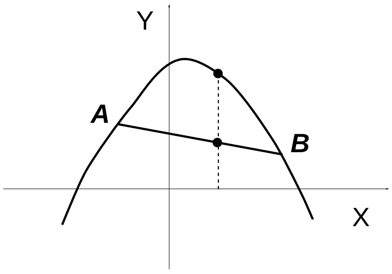


Figura 10.13: Función cóncava

En la figura 10.12 tenemos la gráfica de una función **convexa**. Para tener una función convexa debe ocurrir que, cada vez que dibujemos una cuerda que una dos puntos A y B de la gráfica de la función, los puntos de esta cuerda siempre deben quedar por encima de los puntos de la gráfica de la función. Vemos entonces que la gráfica se curva hacia arriba.

En la figura 10.13 tenemos la gráfica de una función **cóncava**. Para que una función sea cóncava debe ocurrir que, cada vez que dibujemos una cuerda que una dos puntos A y B de la gráfica de la función, los puntos de esta cuerda siempre deben quedar por debajo de los puntos de la gráfica de la función. Vemos entonces que la gráfica se curva hacia abajo.

NOTA: Los términos de concavidad y convexidad aplicados a cualquier objeto dependen del punto de vista desde el que se mira. Esto también es así en matemáticas, por esta razón, la denominación por la que se ha optado aquí, llamando convexa a la gráfi ca “abierta hacia arriba” y cóncava a la “abierta hacia abajo”, no es estándar. Si uno consulta diez textos distintos de matemáticas, puede encontrar en cinco de ellos esta denominación y en los otros cinco la contraria. Lo importante, no obstante, no es cómo se llame a las cosas sino lo que uno quiera decir con estos nombres. El lector puede adoptar su propia denominación con tal de que no se confunda. En algunos libros, a lo que nosotros llamamos convexa, se le llama “cóncava hacia arriba", y a lo que nosotros llamamos cóncava, le llaman “cóncava hacia abajo". Hay nombres para todos los gustos, pero insistimos, ni en esta ni en otras situaciones los nombres son lo importante.

Una función puede ser cóncava o convexa en todo su dominio, pero en muchas ocasiones habrá intervalos en los que la función sea cóncava, y otros intervalos en los que la función sea convexa. Esto es lo que ocurre en las gráficas de las figuras 10.14 y 10.15. En estas gráficas hemos señalado, en rojo, el punto en el que, aproximadamente, la función cambia de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava. A estos puntos en los que la función cambia su curvatura, se les llama **puntos de inflexión**. Además de ser el lugar en el que cambia la curvatura de la función, en un

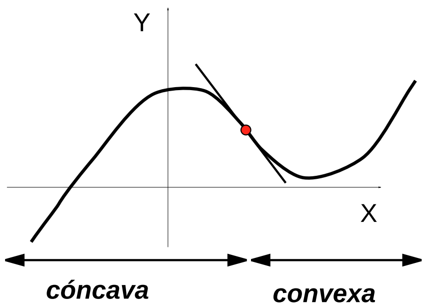


Figura 10.14: De cóncava a convexa

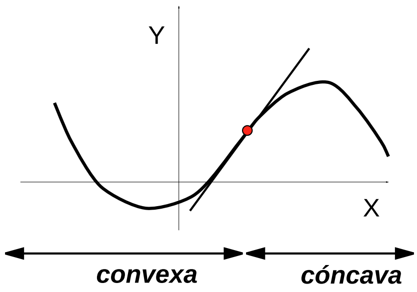
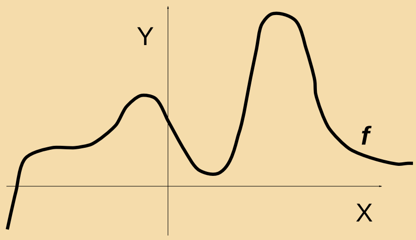


Figura 10.15: De convexa a cóncava

punto de inflexión se da produce un fenómeno especial, que hemos señalado en las gráficas, y es que la recta tangente en el punto *atraviesa* a la gráfica de la función.

ACTIVIDADES

6. Señalar en la gráfica de la figura adjunta dónde se encuentran aproximadamente los puntos de inflexión y cuáles son los intervalos de concavidad y convexidad.



2.2. La derivada segunda para estudiar la curvatura

En la figura 10.16 hemos representado una función cóncava. También se han dibujado las rectas tangentes en cuatro puntos distintos, p, q, r y s. Las pendientes de las rectas tangentes en estos puntos son los valores de la derivada primera en los mismos puntos, es decir, $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$ y $f'(s)$. En la parte inferior de la gráfica, sobre una recta paralela al eje X, hemos dibujado rectas con las mismas pendientes que las rectas tangentes.

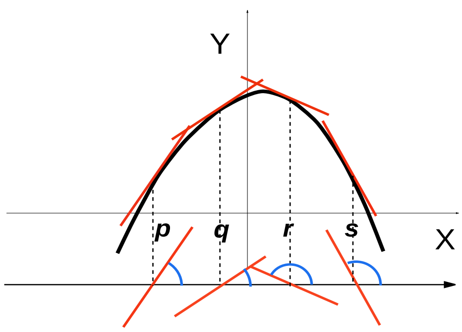


Figura 10.16: Función cóncava

Recorramos ahora, de izquierda a derecha, estas rectas. La pendiente de cada una de ellas es la tangente trigonométrica del ángulo que forman con la horizontal,

que también se ha dibujado. Es fácil apreciar que este valor va *decreciendo*, de izquierda a derecha. Por tanto, se puede asegurar que los valores de la derivada tienen el siguiente orden: $f'(p) > f'(q) > f'(r) > f'(s)$.
Si hubiésemos dibujado muchos más puntos, ocurriría lo mismo, es decir, la función $f'(x)$ es *decreciente*, pero entonces, su derivada, que es la derivada segunda $f''(x)$ debe ser negativa.

De la misma manera se podría comprobar que si la función de partida fuese convexa, su derivada primera $f'(x)$ sería creciente y, por tanto, su derivada segunda $f''(x)$ sería positiva.

Esto nos proporciona un criterio para determinar dónde una función es cóncava y dónde convexa, sin más que estudiar el signo de su derivada segunda:

Sea f una función cuya derivada segunda existe en un intervalo (a, b):
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es cóncava en (a, b).
- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es convexa en (a, b).

¿Qué ocurrirá entonces en un punto de inflexión? En un punto de inflexión hay un cambio de curvatura: de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava. Por tanto, el signo de $f''(x)$ cambia de negativo a positivo o viceversa. En cualquiera de los dos casos, para cambiar de signo, hemos de pasar por cero. Y esto es lo que ocurre en un punto de inflexión, que la derivada segunda se anula. Con más precisión:

Si f tiene en x_0 un *punto de inflexión*, y existe la derivada segunda, entonces $f''(x_0) = 0$.

Es importante señalar que el hecho de que $f''(x_0) = 0$ no es suficiente para que en este punto haya un punto de inflexión, lo que hemos dicho es que si lo hay, entonces la derivada segunda se anula. En definitiva, para que haya punto de inflexión, hace falta que haya cambio de curvatura y esto puede ocurrir incluso en el caso de que la derivada segunda no exista en el punto.

Veamos un ejemplo de aplicación del criterio de la derivada segunda para el estudio de la curvatura: la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.
Calculamos la derivada segunda e igualamos a cero para determinar los posibles puntos de inflexión,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x; \quad f''(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Tal como hacíamos con f' para estudiar el crecimiento y decrecimiento, ahora hacemos lo mismo con f'' para estudiar la concavidad y convexidad. Es decir, estudiamos el signo de f'' en los intervalos que $x = 2$ determina en el eje X,
Entonces, hay un punto de inflexión en $x = 2$, ya que hay cambio de curvatura. Las coordenadas del punto sobre la gráfica son $(2, -16)$ (para calcular la segunda coordenada, hay que sustituir en la función original $f(2) = -16$.)

Figura 10.17: Concavidad y convexidad de $f(x) = x^3 - 6x^2$

ACTIVIDADES

7. Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las funciones siguientes: a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ b) $f(x) = x^{1/3}$ c) $f(x) = x^4$

2.3. Criterio de la derivada segunda para máximos y mínimos

El hecho de que la derivada segunda sirva para estudiar la concavidad y convexidad de una función hace que también se pueda utilizar para determinar si un punto crítico es máximo o mínimo.

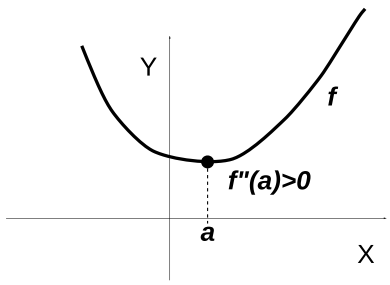


Figura 10.18: Mínimo/convexa

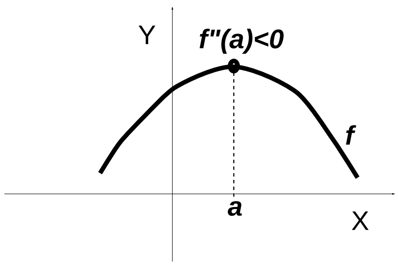


Figura 10.19: Máximo/cóncava

En la gráfica de la figura 10.18, la función f tiene un mínimo en $x = a$, así que necesariamente debe ser convexa. De igual forma, en la gráfica de la figura 10.19, la función f tiene un máximo en $x = a$, entonces ha de ser cóncava. Esto nos proporciona el siguiente criterio, para determinar máximos y mínimos con la derivada segunda:

Sea f una función con un punto crítico en $x = a$, tal que $f'(a) = 0$:
- Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene en $x = a$ un mínimo, con coordenadas $(a, f(a))$.
- Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene en $x = a$ un máximo, con coordenadas $(a, f(a))$.

El hecho de que sólo necesitemos saber el signo de la derivada segunda en el punto crítico hace que este criterio sea fácil de aplicar. Sin embargo, existe un problema, si resulta $f''(a) = 0$, el criterio no nos proporciona ninguna información sobre si el punto es máximo o mínimo. En este caso, habría que acudir al estudio del crecimiento y decrecimiento con la derivada primera.

Por ejemplo, queremos estudiar los puntos críticos de la función $f(x) = x(6-2x)^2$ utilizando la derivada segunda.

Calculamos primero los puntos críticos, utilizando la derivada primera,

$$f'(x) = (6-2x)(6-6x) = 0 \Leftrightarrow x = 3; x = 1.$$

Ahora calculamos la derivada segunda

$$f''(x) = 24x - 48,$$

y sustituimos en ella los puntos críticos:

$f''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 > 0$, entonces en $x = 3$ hay un mínimo.

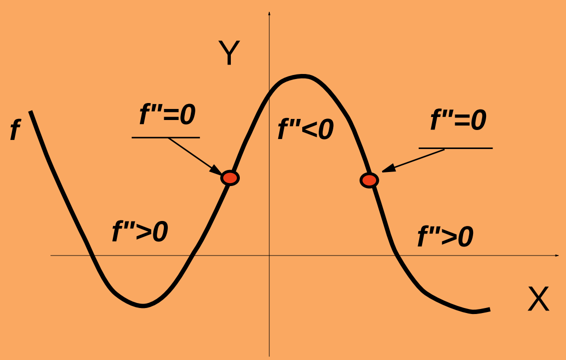
$f''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 < 0$, entonces en $x = 1$ hay un máximo.

ACTIVIDADES

8. Estudiar los puntos críticos de las siguientes funciones, utilizando la derivada segunda: a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = -x^2 + 1$ c) $f(x) = x^3$.

Recuerda

- ✓ Una función es *convexa* cuando cualquier cuerda que una dos puntos de su gráfica siempre queda por encima de la gráfica.
- ✓ Una función es *cóncava* cuando la cuerda quede siempre por debajo de la gráfica.
- ✓ Un *punto de inflexión* es un punto de la gráfica de la función en el que hay un cambio de curvatura, de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava.
- ✓ La curvatura y los puntos de inflexión están relacionados con el valor de la derivada segunda de una función según el siguiente esquema gráfico que lo resume:



3. Asíntotas

Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas aparecieron al estudiar los límites de funciones. Resultan de enorme utilidad para dibujar con precisión la gráfica de una función. Vamos a ir viendo, mediante ejemplos, cómo se pueden calcular e interpretar con más detalle del que se vió en la parte correspondiente al cálculo de límites.

3.1. Asíntotas verticales

Para que una función $f(x)$ tenga una **asíntota vertical** en un punto $x = a$, es preciso que, por lo menos uno de sus límites laterales sea infinito. Las asíntotas verticales se producen en los puntos en los que hay discontinuidades de salto infinito. Y a la hora de representar la gráfica de una función nos interesa precisamente cuál es el signo de estos límites laterales, si es $+\infty$ o $-\infty$.

Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ tiene por dominio de definición dom$(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Entonces, en $x = 3$ puede haber una asíntota vertical. Estudiamos sus límites laterales:

Por la izquierda, $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ (para calcular el signo sustituimos en x un valor próximo a 3, a su izquierda; por ejemplo, $x = 2'99$ y calculamos el signo del resultado).

Por la derecha, $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$ (en este caso, sustituimos en x un valor próximo a 3, a su derecha; por ejemplo, $x = 3'01$ y calculamos el signo del resultado.)

Concluimos que $x = 3$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. Los signos que hemos obtenido en los límites laterales nos indican que, en las cercanías de la asíntota, el comportamiento de la gráfica de la función es como el que se indica en la figura 10.20. No hay que olvidar que la asíntota *no forma parte de la función*,

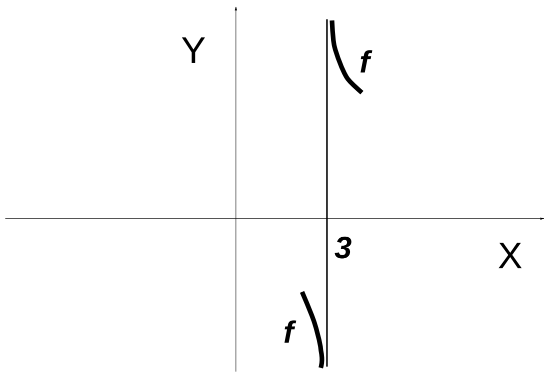


Figura 10.20: Asíntota vertical en $x = 3$

sino que es una recta a la que la función se aproxima.

3.2. Asíntotas horizontales

Una **asíntota horizontal** aparece cuando la función se aproxima a alguna recta horizontal cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Para ello alguno de los límites (o los dos) en el infinito debe ser finito.

Por ejemplo, en la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, los límites en el infinito son:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-x)}{(-x)+1}=\frac{-1}{-1}=1$$

Entonces, tanto a la derecha como a la izquierda, la función tiene una asíntota horizontal en $y=1$. Su gráfica es la de la figura 10.21.

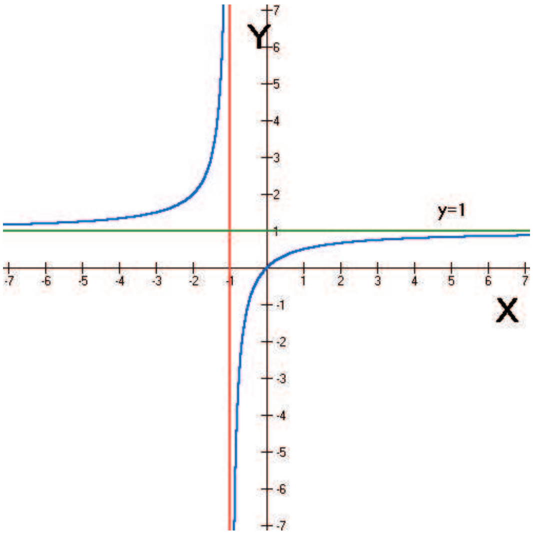


Figura 10.21: Gráfica de $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

La gráfica de la figura 10.21 muestra que una función puede tener simultáneamente una asíntota vertical y una horizontal.

ACTIVIDADES

9. ¿Puede tener una misma función dos asíntotas verticales distintas? ¿Y más de dos?
¿Puede tener una misma función dos asíntotas horizontales distintas? ¿Y más de dos?

10. Estudiar las asíntotas verticales y horizontales de la función

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

3.3. Asíntotas oblicuas

La función $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ no es una recta, sin embargo, para valores muy grandes de x, su comportamiento es muy parecido al de una recta. En efecto, si damos a x valores muy grandes, el término $\dfrac{1}{x^2}$ es prácticamente 0 y, por tanto, $f(x)$ toma valores próximos a los que toma la recta $y = x$. En la figura 10.22 hemos representado la

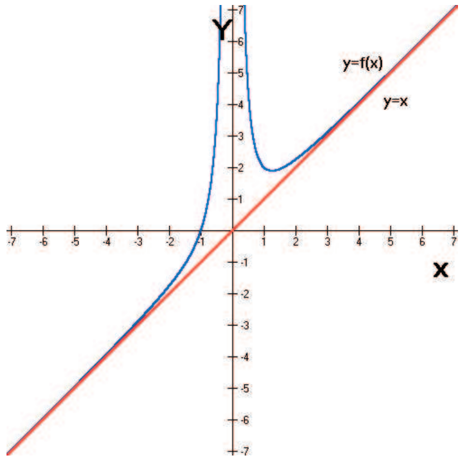


Figura 10.22: Gráfica de $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

función $f(x)$ y la recta $y = x$. Como se puede observar en la figura, cuando los valores de x son muy grandes, la recta y la curva tienden a confundirse. Se dice entonces que $y = x$ es una **asíntota oblicua** de la función $f(x)$.

En general, si $f(x)$ es una función, una asíntota oblicua de $f(x)$ es una recta de la forma $y = mx + n$ (con $m \neq 0$, ya que de otra forma, sería horizontal) a la que la gráfica de la función se aproxima, cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Entonces, para calcular una asíntota oblicua hay que determinar los valores de m y de n.

Para calcular m, si $x \to +\infty$ entonces la recta y la curva son aproximadamente iguales,

$$f(x) \approx mx + n$$

($\approx$ quiere decir, aproximadamente igual).

Dividimos entre x,

$$\frac{f(x)}{x} \approx m + \frac{n}{x} \approx m$$

es decir, si x es muy grande, $m \approx \dfrac{f(x)}{x}$. Formalmente,

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

Por otra parte, como $f(x) \approx mx + n$, despejando n, tenemos que, para valores grandes de x, se tiene

$$n \approx f(x) - mx$$

Entonces,

$$\boldsymbol{n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)}$$

En el ejemplo que comentábamos al principio, $f(x) = x + \frac{1}{x^2} = \frac{x^3+1}{x^2}$, utilizando las fórmulas que acabamos de ver,

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^3+1}{x^2} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Luego, la asíntota oblicua es $y = 1.x + 0$, es decir, $y = x$.

Estos cálculos realmente lo que prueban es que $y = x$ es la asíntota oblicua a la derecha. Para calcular la asíntota a la izquierda habría que repetirlos haciendo $x \to -\infty$, aunque para las funciones con las que vamos a trabajar en este curso, siempre ocurrirá que se tiene la misma asíntota oblicua (podría ocurrir otra cosa en una función definida a trozos.)

ACTIVIDADES

11. ¿Puede tener una misma función una asíntota vertical y una oblicua? ¿Puede tener una misma función una asíntota horizontal y una oblicua?

12. Estudia las asíntotas oblicuas de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Recuerda

- ✓ Las *asíntotas verticales* aparecen en los puntos de discontinuidades de salto finito. Se estudian mediante los límites laterales en el punto de discontinuidad.
- ✓ Las *asíntotas horizontales* aparecen cuando los límites en el infinito son finitos.
- ✓ Las *asíntotas oblicuas* son rectas de la forma $y = mx + n$ a las que se aproxima la función. Los parámetros m y n se calculan con las fórmulas siguientes:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$

4. Estudio de la gráfica de una función

Hemos ido estudiando, en esta y en la unidad anterior, conceptos que resultan útiles para analizar la gráfica de una función. Vamos a poner ahora todas estas herramientas a trabajar juntas.

El estudio completo de la gráfica de una función requiere recopilar una gran cantidad de información, que nos va a permitir tener una imagen de los aspectos más significativos de la gráfica. Conviene recoger esta información en un orden adecuado. Existen varias posibilidades, que dependen fundamentalmente de los gustos de quien lo hace. A continuación exponemos un posible guión para este estudio:

4.1. Guión para el análisis de la gráfica de una función

1. **Propiedades globales de la función.**

   Estudiamos en primer lugar el dominio de definición de la función. Los puntos de corte con los ejes, simetrías y periodicidad (si hubiera lugar a ello).

   También puede resultar útil el estudio del signo de la función, lo que nos indicará cuáles son los intervalos del eje X en los cuales la función está por encima o por debajo del eje horizontal. Para hacerlo; consideramos, tanto los puntos de corte en el eje X, como los puntos en los que la función no existe (o es discontinua); todos estos son los puntos donde puede haber cambio de signo. A continuación, determinamos el signo de $f(x)$ en cada intervalo, utilizando algún valor de prueba. Veremos cómo se hace a continuación en unos ejemplos.

2. **Derivada primera.**

   En este apartado estudiamos y clasificamos los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para el estudio de los intervalos, habrá que tener en cuenta los que determinan los puntos críticos, y también, aquellos puntos no incluidos en el dominio, si los hubiera.

3. **Derivada segunda.**

   Aquí se estudian los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión. Para los intervalos de concavidad y convexidad habrá que tener en cuenta, los posibles puntos de inflexión, es decir, los que anulan $f''(x)$ y aquellos puntos no incluidos en el dominio.

4. **Asíntotas.**

   Estudiamos ahora la existencia de cada uno de los tres tipos posibles de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas. Para el caso particular de las funciones polinómicas, este punto no es necesario, ya que no tienen asíntotas.

5. **Representación gráfica.**

   Se trata ahora de llevar a la gráfica todo lo que se ha obtenido en los puntos anteriores. Este último paso, es el más delicado, ya que supone encajar toda la información que se ha recopilado en un dibujo y, en algunos casos, puede resultar complicado, como encajar todas las piezas de un rompecabezas. Una manera de intentar paliar esta dificultad, consiste en ir pasando a la gráfica la información a medida que vaya apareciendo, sin esperar al final. De esta forma se pueden ir detectando y corrigiendo errores. Sin embargo, hay que decir que al principio la cosa no es nada fácil. Aprender a representar gráficas de funciones es un proceso que lleva un cierto tiempo y requiere mucha práctica.

El estudio de las asíntotas puede hacerse perfectamente en segundo lugar, ya que, como hemos visto, no se precisa la información que proporcionan las derivadas.

Vamos a hacer con detalle un par de ejemplos, siguiendo el guión propuesto.

4.2. Ejemplos

Una función polinómica.
Estudiar y representar la gráfica de la función

$$f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x+2)(x-2)$$

1. Su dominio es $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, por ser un polinomio; además, es continua en todo el dominio.

   - Puntos de corte con los ejes:

   Eje Y; $x = 0$, $y = 0$; $(0,0)$.

   Eje X; $y = 0$, $0 = x^2(x+2)(x-2) \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2$. Entonces corta en los puntos $(0,0)$, $(-2,0)$ y $(2,0)$.

   - Simetrías. Es una función par, porque $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$. Esto quiere decir que su gráfica es simétrica con respecto del eje Y.

   - Signo de f(x). Los únicos cambios de signo se pueden producir en los puntos de corte con el eje X, entonces el signo de la función en cada intervalo se indica en el siguiente esquema:

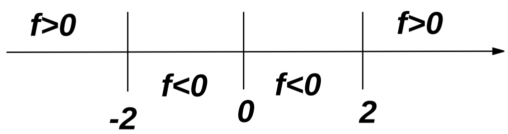


Figura 10.23: Signo de la función $f(x) = x^4 - 4x^2$

   Saber qué signo tiene una función en un intervalo nos permite saber si, en ese intervalo, la gráfica de la función está por encima o por debajo del eje X. Esto lo hemos indicado en la figura 10.24, en la que se han rayado las regiones del plano sobre las cuales **no** hay que dibujar función. Utilizando este dibujo y los puntos de corte, ya se podría hacer un dibujo bastante aproximado de la gráfica.

2. Derivada primera. $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$.

   Calculamos los puntos críticos,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{2}$$

   Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los intervalos determinados por estos puntos.

   Entonces, a partir del esquema de la figura 10.25, concluimos que hay un máximo en el punto $(0,0)$ y hay mínimos en los puntos $(-\sqrt{2}, -4)$ y $(\sqrt{2}, -4)$.

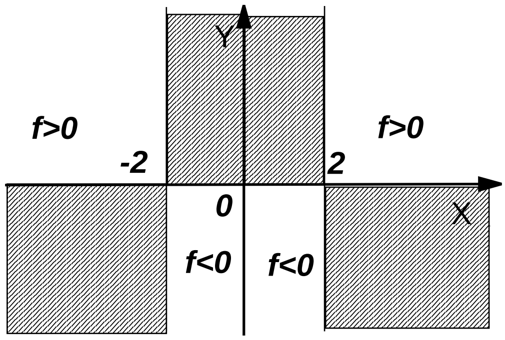


Figura 10.24: Regiones de la función $f(x) = x^4 - 4x^2$

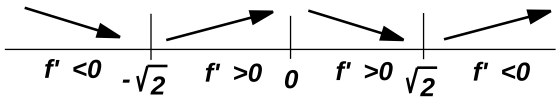


Figura 10.25: Crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^4 - 4x^2$

3. Derivada segunda. $f''(x) = 12x^2 - 8$. Entonces los posibles puntos de inflexión,

$$f''(x) = 12x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

   Estudiamos la concavidad y convexidad en los intervalos determinados por estos puntos.

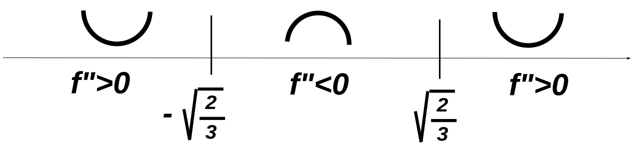


Figura 10.26: Concavidad y convexida de $f(x) = x^4 - 4x^2$

   Por tanto, hay puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-20}{9}\right)$ y en $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-20}{9}\right)$.

4. Lá función no tiene asíntotas porque es un polinomio, como ya hemos comentado.

5. Representación gráfica. Con toda la información que hemos ido recopilando, la gráfica de la función es la de la figura 10.27.

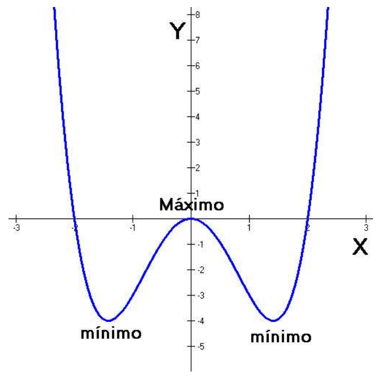


Figura 10.27: Gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^2$

Una función racional.
Estudiar y representar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

1. Su dominio es dom$(f) = \mathbb{R}$, debido a que su denominador no se anula nunca; además, es continua en todo el dominio, por ser cociente de dos funciones continuas.

   - Puntos de corte con los ejes:

   Eje Y; $x = 0$, $y = 0$; $(0, 0)$.

   Eje X; $y = 0$, $0 = \dfrac{4x}{x^2+4} \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Es decir, el mismo punto de corte que en el eje Y, $(0, 0)$.

   - Simetrías. Es una función impar, porque $f(-x) = \dfrac{4(-x)}{(-x)^2+4} = \dfrac{-4x}{x^2+4} = -f(x)$. Esto quiere decir que su gráfica es simétrica con respecto del origen.

   - Signo de f(x). El único cambio de signo se produce en el punto $x = 0$, entonces el signo de la función en cada intervalo se indica en el siguiente esquema:

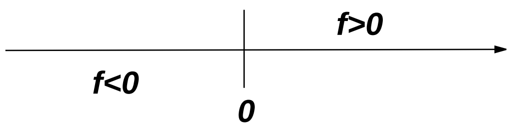


Figura 10.28: Signo de la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

   En la figura 10.29 hemos rayado las regiones por donde **no** hay función.

2. Derivada primera. $f'(x) = \dfrac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$.

   Calculamos los puntos críticos,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 16 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

   Estudiamos el crecimiento y decrecimiento en los intervalos determinados por estos puntos.

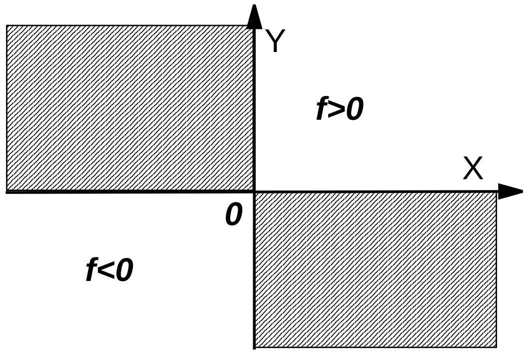


Figura 10.29: Regiones de la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

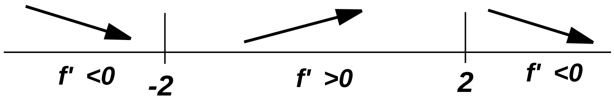


Figura 10.30: Crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

Entonces, a partir del esquema de la figura 10.30, se puede decir que hay un máximo en el punto $(2, 1)$ y hay un mínimo en el punto $(-2, -1)$.

3. Derivada segunda. $f''(x) = \dfrac{8x^3 - 96x}{(x^2+4)^3}$. Entonces los posibles puntos de inflexión,

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 96x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2\sqrt{3}$$

Estudiamos la concavidad y convexidad en los intervalos determinados por estos puntos.

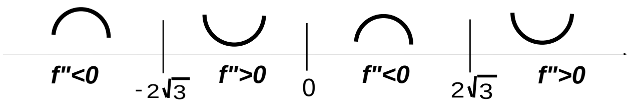


Figura 10.31: Concavidad y convexida de $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

Por tanto, hay puntos de inflexión en $(0, 0)$, $\left(-2\sqrt{3}, \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y en $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Asíntotas verticales no hay porque la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

   Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x^2+4} = 0$$

Entonces, hay asíntota horizontal en $y = 0$, a la derecha y a la izquierda, debido a la simetría impar de la función.

Asíntotas oblicuas no puede haber, ya que hay horizontal.

5. Representación gráfica. Con toda la información que hemos ido recopilando, la gráfica de la función es la de la figura 10.32.

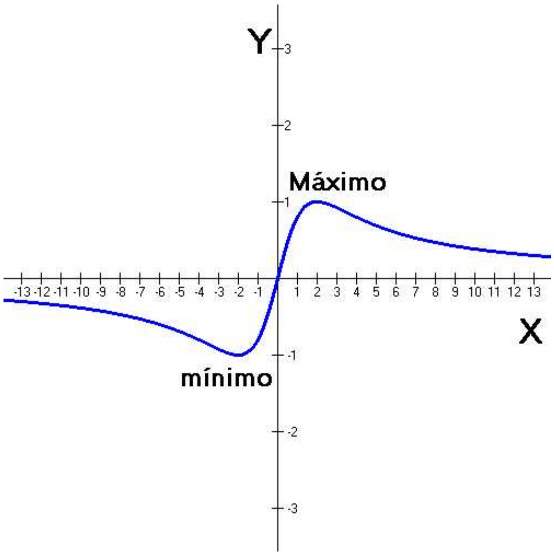


Figura 10.32: Gráfica de $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

ACTIVIDADES

13. Estudiar y representar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Recuerda

✓ Pasos para el estudio de una gráfica:

1. Propiedades globales de la función: dominio, puntos de corte, simetrías, signo.
2. Derivada primera: puntos críticos, crecimiento y decrecimiento.
3. Derivada segunda: concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
4. Asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.
5. Representación gráfica.

11 Estadística bidimensional

ÍNDICE DE CONTENIDOS

La Estadística sirve para describir datos. En cursos anteriores el alumno ha podido empezar a estudiar los rudimentos de la Estadística, en particular de la Estadística unidimensional. En esta unidad, después de un breve repaso de los conceptos estudiados anteriormente, nos vamos a ocupar de la Estadística bidimensional. En la Estadística unidimensional se estudia un grupo de datos, por ejemplo, el gasto mensual en libros de un cierto número de familias. Con la Estadística bidimensional podríamos estudiar la relación entre el gasto mensual en libros de un grupo de familias con sus ingresos mensuales, es decir, podemos estudiar la relación de dos características distintas de un determinado conjunto de individuos.

1. Estadística unidimensional

1.1. Población y muestra

Se ha llevado a cabo una encuesta a un grupo de 15 estudiantes de primero de bachillerato sobre el número de horas semanales que dedican al estudio de la asignatura de Matemáticas. Los encuestados han respondido que el número de horas que dedican al estudio de esta asignatura son:

10	8	5	3	1
8	4	4	2	1
5	6	7	8	8

Este es un ejemplo de **variable estadística unidimensional**, se dice unidimensional porque sólo estamos estudiando una característica, numérica en este caso, del grupo, el número de horas. El grupo al que se ha dirigido la encuesta, estudiantes de primero de bachillerato, se denomina **población**. La población son todos los estudiantes de primero de bachillerato de España, por ejemplo. Los datos de los 15 estudiantes que hemos recogido, son una **muestra** extraída de la población.

Una vez que tenemos una muestra de datos, el estudio de los mismos se puede llevar a cabo con dos finalidades distintas. Podemos estar interesados únicamente en sacar conclusiones sobre el número de horas que dedican al estudio de las Matemáticas los 15 estudiantes a los que hemos preguntado; esto es hacer **Estadística descriptiva**. Por otra parte, podríamos intentar sacar conclusiones sobre los hábitos de estudio de toda la población, en este caso, los estudiantes españoles de primero de bachillerato, mediante el estudio de la muestra de 15 que tenemos; esto sería hacer **Estadística inferencial** o inferencia estadística. Para este último punto de vista habría que utilizar modelos matemáticos de probabilidad, y es lo que se estudiará en el curso siguiente. En este curso y en esta unidad en particular, estudiaremos la Estadística desde el punto de vista descriptivo. En otras palabras, no pretendemos descubrir los hábitos de estudio de todos los estudiantes de primero de bachillerato, sino simplemente analizar lo que les ocurre a los 15 que hemos elegido.

Como se ha dicho en la introducción, aquí vamos a recordar cómo se calculan algunos de los parámetros asociados a una variable estadística unidimensional, que ya se estudiaron en cursos anteriores. Sólo aquellos que vamos a necesitar en el resto de la undiad didáctica.

1.2. Parámetros estadísticos

Los parámetros estadísticos asociados a una variable son ciertos números que se calculan a partir de los datos, que proporcionan información sobre el comportamiento conjunto de la variable.

Para ir recordándolos, vamos a utilizar el ejemplo de las horas de estudio de los 15 estudiantes de primero de bachillerato. Comenzamos ordenándolos de menor a mayor,

1	1	2	3	4	4	5	5	6	7	8	8	8	8	10

Si sumamos todos los datos y dividimos la suma por la cantidad de ellos que hay, obtenemos la **media** o *media aritmética*, que representaremos por $\overline{x}$. En nuestro caso,

$$\overline{x} = \frac{1+1+2+3+4+4+5+5+6+7+8+8+8+8+10}{15} = \frac{80}{15} = 5'33$$

lo que nos indica que, por término medio, estos quince estudiantes dedican 5'33 horas semanales al estudio de las matemáticas.

En general, si disponemos de los datos $x_1, x_2, \dots, x_n$, la *media* es

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

Donde n es el número de datos de que disponemos.

Para abreviar la expresión anterior, en particular la suma del numerador se utiliza el símbolo sumatorio $\sum$. Aunque lo correcto sería escribir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, para indicar que la suma es desde el primer dato x_1, hasta el enésimo x_n, escribiremos simplemente $\sum x_i$ para referirnos a la suma de todos los x_i.

Por tanto, la fórmula de la media se puede escribir de la forma siguiente:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}}$$

La media es un parámetro que mide la tendencia central de la variable estadística. Otros parámetros de tendencia central son, aunque no los usaremos en la estadística bidimensional; la **moda**, que es el dato que aparece un mayor número de veces, y la **mediana**, que es el dato que ocupa el lugar central, si previamente se han ordenado de menor a mayor.

En nuestro ejemplo, la *moda* es 8, que es el dato que aparece mayor número de veces, es decir, con mayor *frecuencia*. Y la *mediana*, dado que hay 15 datos, es el dato que ocupa el lugar octavo, $x_8 = 5$, una vez que están ordenados de menor a mayor:

MEDIANA

↓

1	1	2	3	4	4	5	**5**	6	7	8	8	8	8	10

Si el número de datos fuese par, entonces la mediana es la media aritmética de los dos datos que se encuentran en el centro.

Además de los parámetros que miden la tendencia central; media, moda y mediana, hay otros que sirven para medir cuál es la dispersión de los mismos, es decir, si están más o menos concentrados alrededor de la media. Los que vamos a recordar aquí son **varianza** y la **desviación típica**.

Varianza y desviación típica se utilizan para medir el promedio de las desviaciones de los datos con respecto de la media. Para medir esta desviación, podríamos calcular todas las diferencias entre dato y media, $(x_i - \overline{x})$, y sumarlas, para después dividir entre el número de datos. Sin embargo, este resultado sería nulo. Por esta razón, lo que se hace es utilizar los cuadrados de las diferencias, así se trata de una suma de números positivos o nulos, y no siempre dará cero.

La *varianza* es la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada dato y la media, dividida por el número de datos, se denota s^2,

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Entonces, para calcular la varianza, hay que restar la media a cada dato, después se eleva al cuadrado cada número y se suman todos, por último, se divide entre n. El proceso es algo largo, pero se puede abreviar, porque la fórmula admite una expresión más sencilla de utilizar. Se puede comprobar que la siguiente expresión proporciona el resultado, y es la que vamos a utilizar en la práctica:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

A pesar de que la varianza mide el promedio de las desviaciones de la media, como estas desviaciones se han elevado al cuadrado, no están en las mismas unidades que los datos. Por esta razón, resulta más intuitivo a la hora de interpretar la variabilidad o dispersión de los datos, utilizar otro parámetro, la *desviación típica*, que es simplemente la raíz cuadrada de la varianza, y se denota s,

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$$

Calculemos la varianza y desviación típica en nuestro ejemplo del número de horas de estudio:

La varianza la calculamos con la fórmula

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

Calculamos en primer lugar la suma de los cuadrados de los x_i,

$$\begin{aligned}
\sum x_i^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\
&= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2 + 10^2 \\
&= 1 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 64 + 64 + 64 + 100 \\
&= 538
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la fórmula de la varianza,

$$s^2 = \frac{538}{15} - 5'33^2 = 7'46$$

Por tanto, la desviación típica,

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{7'46} = 2'73$$

En resumen, la media de tiempo dedicado al estudio de la asignatura de matemáticas de los 15 alumnos analizados es $\overline{x} = 5'33$ horas; y la desviación típica es $s = 2'73$, lo que quiere decir que la mayoría de los 15 estudiantes dedica al estudio de las matemáticas un tiempo comprendido entre las $5'33 - 2'73 = 2'6$ horas y $5'33 + 2'73 = 8'06$ horas.

ACTIVIDADES

1. El número de libros leídos en el último mes por diez personas ha sido:

0	1	2	2	2	3	3	4	5	5

Calcular la media, moda, mediana, varianza y desviación típica.

Recuerda

- ✓ Una *variable estadística unidimensional* es una característica numérica de un grupo de individuos.
- ✓ Se llama *población* al conjunto de individuos del que se hace un estudio estadístico. Se llama *muestra* a un subconjunto de la población.
- ✓ Conocidos los datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de una variable estadística. Los principales parámetros estadísticos se calculan de la forma siguiente:
  - Media. Es la suma de los datos dividido entre la cantidad de ellos $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$.
  - Moda. Es el dato que aparece con mayor frecuencia.
  - Mediana. Es el dato central, si el número de datos es impar. Si el número es par, es la media de los dos datos centrales.
  - Varianza. Es el promedio de los cuadrados de las diferencias entre cada dato y su media, se puede calcular de dos formas equivalentes, aunque la segunda es más conveniente, $s^2 = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n} = \dfrac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2$.
  - Desviación típica. Es la raíz cuadrada de la varianza, mide la desviación de la media de los datos, $s = \sqrt{s^2}$.

2. Estadística bidimensional

Hemos recordado en la sección anterior algunas nociones de estadística unidimensional. Allí estudiábamos una característica numérica de un grupo de individuos. En la estadística bidimensional se trata de estudiar dos características numéricas de cada individuo.

2.1. Variables estadísticas bidimensionales

Tenemos un grupo de 8 estudiantes de primero de bachillerato que han hecho un examen de la asignatura de Matemáticas y otro de la asignatura de Física y Química, las notas, de 0 a 10, de cada alumno en cada asignatura han sido las siguientes:

x_i	2	4	5	6	7	8	8	9
y_i	3	5	4	$5'5$	5	$7'5$	8	10

donde para cada par (x_i, y_i), la nota de Matemáticas es x_i, y la de Física y Química, y_i de un alumno concreto.

Este es un ejemplo de **variable estadística bidimensional** (X, Y), donde X = *nota de Matemáticas*, Y = *nota de Física y Química*. El objeto de estudiar las dos variables de manera conjunta es el de ver qué tipo de relación hay entre ambas, si es que hay alguna.

2.2. Nube de puntos

Una primera aproximación al estudio de la relación existente entre las dos variables que constituyen una variable bidimensional es su representación gráfica. Si cada par (x_i, y_i) lo representamos como un punto en unos ejes coordenados, se obtiene una gráfica que llamaremos **nube de puntos** o *diagrama de dispersión*. Para el ejemplo anterior, la nube de puntos se ha representado en la figura 11.1.

La forma de la nube de puntos de la figura 11.1 nos sugiere que existe algún tipo de dependencia entre la nota de Matemáticas y la de Física y Química.

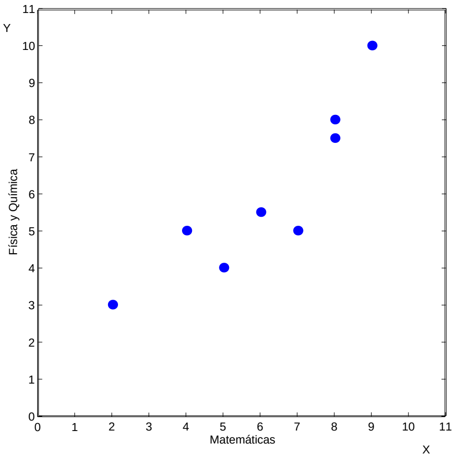


Figura 11.1: Nube de puntos

En efecto, según vemos en la figura, parece que cuando un alumno tiene una nota alta en la asignatura de Matemáticas, también la tiene en la asignatura de Física y Química. Lo mismo ocurre con alumnos que han obtenido nota baja en una de las asignaturas, también ha obtenido una nota baja en la otra. Se dice en este caso que parece existir una *dependencia linea positiva* entre las dos variables (debido a que la nube de puntos se asemeja a una recta con pendiente positiva). Mediante los paraámetros bidimensionales que estudiaremos después, veremos cómo se puede medir cuantitativamente el grado de dependencia.

La nube de puntos puede presentar muchas formas distintas, en la figuras siguientes se muestran algunas de las diferentes posibilidades.

- En la figura 11.2, los puntos parecen acumularse alrededor de una recta con pendiente positiva, como en nuestro ejemplo anterior. Diremos entonces que entre las variables, hay *dependencia lineal positiva*.

- En la figura 11.3, los puntos parecen acumularse en torno a una recta con pendiente negativa. En este caso, diremos que entre las variables, hay *dependencia lineal negativa*.

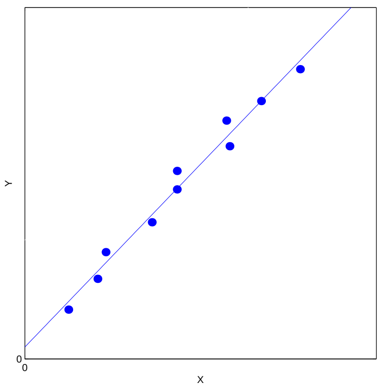


Figura 11.2: Dependencia lineal positiva

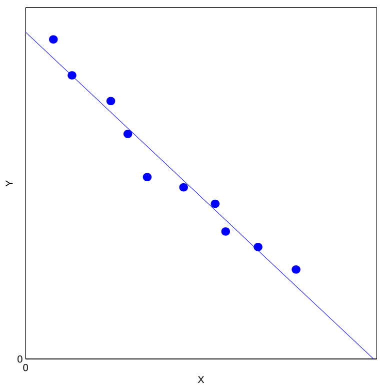


Figura 11.3: Dependencia lineal negativa

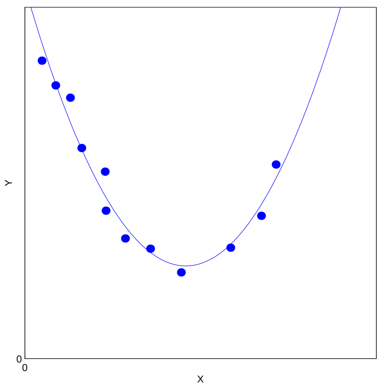


Figura 11.4: Dependencia no lineal

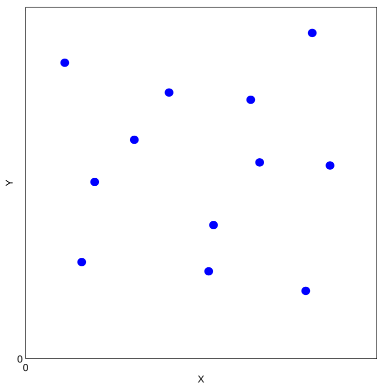


Figura 11.5: No hay dependencia

- En la figura 11.4, los puntos parecen seguir una curva, en este caso parecida a una parábola. Es decir, entre las variables parece haber algún tipo de dependencia, aunque ahora es *no lineal*.
- Por último, en la figura 11.5, los puntos están situados en el plano sin seguir ninguna pauta concreta, sin aproximarse a ninguna curva o recta que sugiera algún tipo de función. Diremos que entre las variables, *no hay dependencia*.

Pero, incluso dentro de cada uno de los casos anteriores se pueden establecer diferencias. Observemos las nubes de puntos de las figuras 11.6 y 11.7. En ambas tenemos, según acabamos de explicar, una dependencia lineal negativa. Sin embargo, son claramente distintas. Mientras que los puntos del diagrama de la figura 11.6 están prácticamente sobre la recta, en la figura 11.7, los puntos están mucho más dispersos. Para distinguir entre estas posibilidades, se dice que hay dependencia lineal *fuerte* y dependencia lineal *débil*, respectivamente.

No obstante, esta denominación de fuerte o débil resultaría ambigua si no hubiese otra posibilidad que la simple observación de la nube de puntos. Por esta razón, veremos más adelante un parámetro, el coeficiente de correlación, que establece numéricamente una medida para el grado de dependencia de las variables.

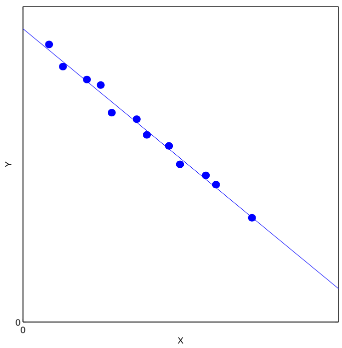


Figura 11.6: Dependencia *fuerte*

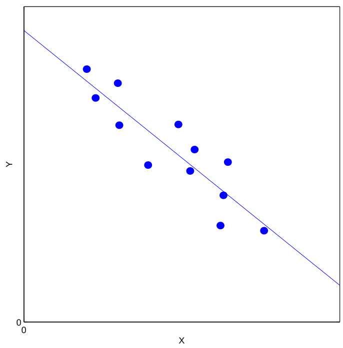


Figura 11.7: Dependencia *débil*

ACTIVIDADES

2. Dibujar las nubes de puntos correspondientes a las siguientes variables estadísticas bidimensionales. Indicar además, el tipo de dependencia entre las variables que se observa en el diagrama. Será útil para ello intentar dibujar la recta o la curva que mejor se aproxime a la nube de puntos:

a)

x_i	2	2	3	4	6	7	8	5
y_i	9	8	8	5	3	1	1	4

b)

x_i	1	1	2	4	5	6	7	8
y_i	2	3	6	7	7	6	4	2

c)

x_i	1	2	4	4	6	6	9	9
y_i	2	6	8	2	4	8	2	7

d)

x_i	1	2	2	4	5	6	7	7
y_i	1	2	3	4	6	7	8	9

Recuerda

- ✓ Una *variable estadística bidimensional* es un par de características numéricas (X, Y) de un cierto conjunto de individuos. Por ejemplo, el peso y la estatura de un grupo de personas.

- ✓ Una *nube de puntos* o *diagrama de dispersión* es la representación gráfica de los datos de una variable estadística bidimensional (X, Y). Se trata de representar los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, como puntos en un sistema de ejes coordenados.

- ✓ El aspecto de la nube de puntos sugiere la dependencia entre las variables X e Y de una variable bidimensional (X, Y):

  - Si la los puntos se acumulan en torno a una recta de pendiente positiva, se dice que hay *dependencia lineal positiva*.

  - Si se acumulan alrededor de una recta de pendiente negativa, se dice que hay *dependencia linea negativa*.

  - También puede haber dependencia *no lineal*, cuando los puntos se acumulan en torno a una curva, y puede no haber dependencia, si los puntos no siguen ninguna pauta reconocible.

3. Parámetros estadísticos bidimensionales

Como ya hemos comentado antes, el objeto de estudiar de manera conjunta dos variables estadísticas en lo que llamamos una variable bidimensional, es el de estudiar la posible dependencia de las dos variables. Para ello, además de la nube de puntos, se pueden calcular ciertos parámetros estadísticos que proporcionan información sobre el conjunto de datos. Hay unos parámetros que se refieren sólo a cada variable por separado, son las **medias** y **desviaciones típicas marginales**. Otros, que estudiaremos después, involucran a los datos de las dos variables.

3.1. Medias y desviaciones típicas marginales

Consideremos los siguientes datos correspondientes a una variable bidimensional (X, Y).

x_i	1	3	3	4	5	6	7	8	8	8
y_i	2	3	4	4	6	7	7	7	8	9

Si pensamos en los datos de la variable X de forma independiente, podemos calcular, tanto su media como su desviación típica con las fórmulas de la estadística unidimensional. Así, las medias se calculan mediante las fórmulas:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{n}} \qquad \overline{\boldsymbol{y}} = \frac{\sum \boldsymbol{y_i}}{\boldsymbol{n}}$$

donde $\sum x_i$, $\sum y_i$ son las sumas de x_i e y_i, respectivamente, y n es el número de (pares de) datos.

Para nuestro ejemplo, estas medias son:

$$\overline{x} = \frac{53}{10} = 5'3 \qquad \overline{y} = \frac{57}{10} = 5'7.$$

Las **medias marginales** admiten una interpretación gráfica importante. Si dibujamos la nube de puntos (en la figura 11.8 hemos dibujado la nube de los datos anteriores), el punto de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ se encuentra siempre en el **centro de gravedad** de la nube, esto es, el punto donde se puede suponer concentrada toda la masa.

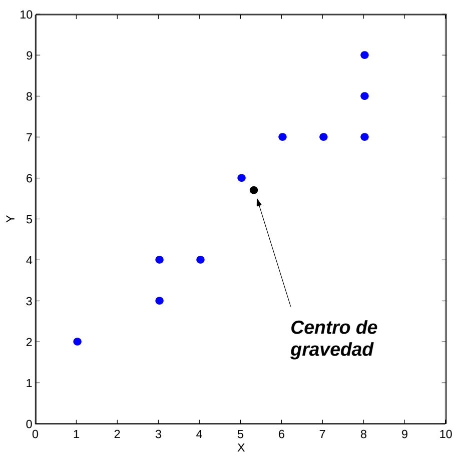


Figura 11.8: $(\overline{x}, \overline{y})$ es el centro de gravedad

ACTIVIDADES

3. Para los siguientes datos, dibujar la nube de puntos correspondiente y su *centro de gravedad*, es decir, el punto de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$:

a) $\begin{array}{c|cccc} x_i & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y_i & 6 & 5 & 3 & 2 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|cccc} x_i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$ c) $\begin{array}{c|cccc} x_i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 1 & 3 & 5 & 4 \end{array}$.

También se pueden calcular de forma separada las varianzas y las desviaciones típicas marginales, mediante las fórmulas siguientes:

- Las **varianzas marginales**:

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2 \qquad s_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{y}^2$$

- Las **desviaciones típicas marginales**:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2} \qquad s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{y}^2}$$

Vamos a calcular las varianzas y desviaciones típicas del ejemplo con el que empezábamos este apartado. Para llevar a cabo estos cálculos, y los que vendrán después, conviene organizar la información en una tabla que nos permita realizar la tarea de una manera más cómoda. Una posibilidad es organizarlo como en la tabla que se pone a continuación, en la que aparecen (de momento) cuatro columnas; x_i, y_i, que son los datos originales, y x_i^2, y_i^2, que son los datos al cuadrado. En la última fila de la tabla se ponen las sumas de todas las columnas:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	
1	2	1	4	
3	3	9	9	
3	4	9	16	
4	4	16	16	
5	6	25	36	
6	7	36	49	
7	7	49	49	
8	7	64	49	
8	8	64	64	
8	9	64	81	
53	57	337	373	$\leftarrow$ SUMAS

Y ahora sólo queda sustituir en las fórmulas.

Varianzas:

$$s_x^2 = \frac{337}{10} - 5'3^2 = 5'61$$

$$s_y^2 = \frac{373}{10} - 5'7^2 = 4'81.$$

Desviaciones típicas:

$$s_x = \sqrt{5'61} = 2'37$$

$$s_y = \sqrt{4'81} = 2'19.$$

3.2. Covarianza

La **covarianza** es el primer parámetro conjunto que vamos a estudiar, en el sentido de que involucra los datos de las dos variables. Da una idea sobre la forma en que se distribuyen los puntos alrededor del centro de gravedad $(\overline{x}, \overline{y})$. Se representa por s_{xy} y es la media de los productos de las diferencias de las coordenadas de cada punto de la nube (x_i, y_i) y las coordenadas de $(\overline{x}, \overline{y})$, es decir,

$$\boldsymbol{s_{xy} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n}}$$

Al igual que ocurría en el caso de las varianzas, la covarianza se puede calcular mediante una fórmula que es equivalente a la anterior, pero más sencilla de utilizar desde un punto de vista práctico, esta fórmula equivalente es la siguiente:

$$\boldsymbol{s_{xy} = \frac{\sum x_i . y_i}{n} - \overline{x} . \overline{y}}$$

Para utilizar esta fórmula, primero hay que calcular la suma de todos los productos $x_i.y_i$, dividir esta suma entre n y restarle el producto de las medias. A efectos prácticos, en la tabla de la que hemos hablado antes, añadimos una nueva columna, la de los productos $x_i.y_i$, cuyos componentes serán los productos de los de las columnas x_i, y_i. Para el ejemplo del apartado anterior, completando la tabla que habíamos empezado antes,

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i.y_i$
1	2	1	4	2
3	3	9	9	9
3	4	9	16	12
4	4	16	16	16
5	6	25	36	30
6	7	36	49	42
7	7	49	49	49
8	7	64	49	56
8	8	64	64	64
8	9	64	81	72
53	57	337	373	352

Entonces, la covarianza en este caso es

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i . y_i}{n} - \overline{x} . \overline{y} = \frac{352}{10} - 5'3 \cdot 5'7 = 4'99$$

Aparte de la forma en la que se calcula la covarianza que, según acabamos de ver, no reviste una especial dificultad, nos interesa saber cuál es el significado de este parámetro. Como dijimos al principio, la covarianza da una idea de cómo están distribuidos los puntos alrededor del centro de gravedad $(\overline{x}, \overline{y})$. Y esto se aprecia mediante el signo.

- Si la covarianza es un número positivo, los puntos estarán dispuestos de manera que haya dependencia lineal positiva.

- Si la covarianza es un número negativo, los puntos estarán dispuestos de manera que haya dependencia lineal negativa.

- Si la covarianza es un número próximo a cero, esto indicará que, o bien no hay dependencia entre las variables, o esta dependencia no es lineal.

Hay una explicación geométrica para lo anterior, y aunque no vamos a entrar mucho en los detalles, indicaremos que realmente la covarianza no es otra cosa que la media de los productos de las coordenadas de los puntos una vez trasladados los ejes al punto $(\overline{x}, \overline{y})$. Entonces, si cada vez que tenemos una nube de puntos, imaginamos los ejes centrados en $(\overline{x}, \overline{y})$, dependiendo de en qué cuadrante estén los puntos, los signos de los productos serán positivos o negativos. Por ejemplo, si la mayoría de los puntos se encuentran en el primer y tercer cuadrante, la media será positiva. Esto es lo que ocurre cuando hay dependencia lineal positiva.

ACTIVIDADES

4. A partir de los datos siguientes, dibujar la nube de puntos y calcular medias y la covarianza:

x_i	1	2	3	4
y_i	9	8	6	3

¿Qué tipo de dependencia hay entre las variables?

Recuerda

✓ Sea (X, Y) una variable estadística bidimensional. A partir de los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ de la varible, se pueden calcular los siguientes parámetros:

✓ *Medias marginales*:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

El punto $(\overline{x}, \overline{y})$ es el *centro de gravedad* de la nube de puntos.

✓ *Varianzas marginales:*

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2 \qquad s_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{y}^2$$

✓ *Desviaciones típicas marginales:*

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2} \qquad s_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{y}^2}$$

✓ *Covarianza:*

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i . y_i}{n} - \overline{x}.\overline{y}$$

✓ El signo de la covarianza determina el tipo de dependencia entre las variables:

- Si $s_{xy} > 0$ hay dependencia lineal positiva.

- Si $s_{xy} < 0$ hay dependencia lineal negativa.

4. Correlación

A pesar de que el signo de la covarianza indica el tipo de dependencia que hay entre las variables, no nos sirve para determinar si esta dependencia es más o menos fuerte. La razón es que su valor depende de las unidades en las que estén dados los datos. Es decir, que si una de las variables está en centímetros, por ejemplo, y pasamos estas medidas a metros, el valor de la covarianza cambia (aunque no el signo). Lo cual impide que se pueda establecer una comparación acertada entre dos dependencias lineales positivas o dos dependencias negativas.

Para evitar este problema, se utiliza otro parámetro llamado **coeficiente de correlación lineal** o *coeficiente de Pearson* (nosotros lo llamaremos simplemente coeficiente de correlación), que se define como el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas:

$$\boldsymbol{r = \frac{s_{xy}}{s_x . s_y}}$$

Veamos en primer lugar un ejemplo sencillo de cómo se calcula y, a continuación, comentaremos su significado.

Por ejemplo, queremos calcular el *coeficiente de correlación* para los datos siguientes:

x_i	1	3	4	6
y_i	1	2	5	5

En primer lugar, organizamos la información en la tabla que hemos aprendido a utilizar antes,

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i . y_i$
1	1	1	1	1
3	2	9	4	6
4	5	16	25	20
6	5	36	25	30
14	13	62	55	57

Y empezamos a calcular los parámetros estadísticos.

Medias:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{14}{4} = 3'5 \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{13}{4} = 3'25$$

Varianzas:

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{62}{4} - 3'5^2 = 3'25 \qquad s_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{y}^2 = \frac{55}{4} - 3'25^2 = 3'19$$

Desviaciones típicas:

$$s_x = \sqrt{3'25} = 1'80 \qquad s_y = \sqrt{3'19} = 1'78$$

Covarianza:

$$s_{xy} = \frac{\sum x_i . y_i}{n} - \overline{x} . \overline{y} = \frac{57}{4} - 3'5 \cdot 3'25 = 2'87$$

Por fin, el coeficiente de correlación es

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{2'87}{1'80 \cdot 1'78} = 0'89$$

ACTIVIDADES

5. Multiplicar los todos los datos anteriores por 10 y calcular el nuevo coeficiente de correlación. Es decir, ahora consideramos los datos:

x_i	10	30	40	60
y_i	10	20	50	50

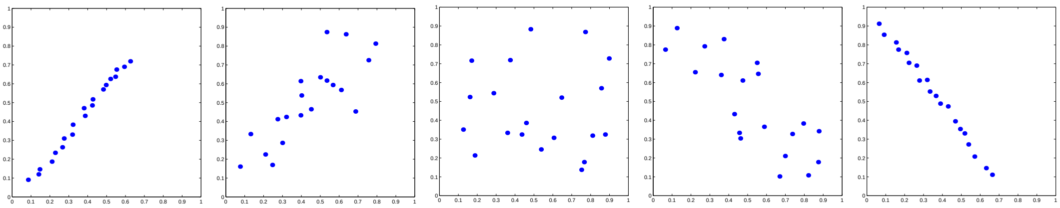
Ya sabemos calcular el coeficiente de correlación. Veamos ahora cómo lo podemos interpretar.

En primer lugar, es evidente que el signo del coeficiente de correlación y el de la covarianza coinciden, ya que las desviaciones típicas que aparecen en el denominador son siempre positivas (recordemos que las desviaciones típicas son raíces cuadradas y, por tanto, su resultado siempre es positivo.) Pero además, se puede demostrar que $r^2 \leq 1$, lo cual implica que r siempre es un número comprendido entre -1 y 1,

$$\boldsymbol{-1 \leq r \leq 1}$$

El hecho de que r esté más próximo a -1, a 1, o a 0 está directamente relacionado con la forma de la nube de puntos y, por tanto, con el tipo de dependencia entre las variables estadísticas.

En las gráficas de la figura 11.9 hemos dibujado diferentes nubes de puntos junto a los valores de sus correspondientes coeficientes de correlación.



$r = 0'98$ $\quad$ $r = 0'81$ $\quad$ $r = -0'02$ $\quad$ $r = -0'79$ $\quad$ $r = -0'99$

Figura 11.9: Coeficiente de correlación y nube de puntos

Según vemos en las figuras, cuando los valores de r son positivos, tenemos dependencia lineal positiva, tanto más fuerte, cuanto más próximo a 1 esté el valor de r. Cuando los valores de r son negativos, hay dependencia lineal negativa, tanto más fuerte, cuanto más próximo a -1 esté el valor de r. Por último, en el diagrama central tenemos un ejemplo de una nube de puntos en la que no se aprecia ninguna tendencia positiva o negativa concreta, en este caso, el valor de r está cercano a 0.

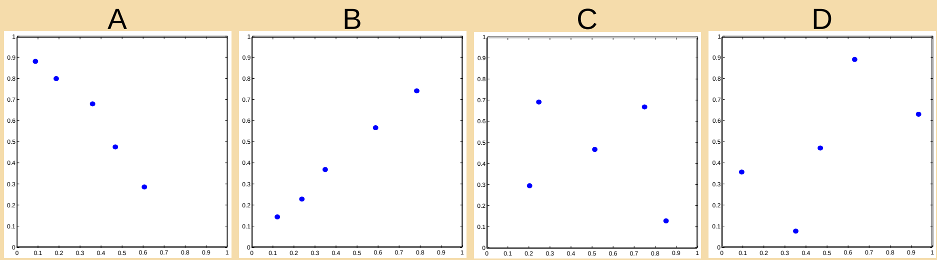
Por último, si $r = 1$ los puntos estará situados sobre una recta de pendiente positiva, es decir, no es que se parezcan a una recta, sino que están alineados. Si $r = -1$ los puntos estarán alineados en una recta con pendiente negativa. Y cuando $r = 0$, estaríamos en el caso en el que no hay absolutamente ninguna dependencia o correlación, se dice a veces que las variables son *incorreladas.*

A la hora de calcular el coeficiente de correlación hay que tener una pequeña precaución. Lo habitual es que aparezcan decimales casi desde el primer cálculo, de los cuales tomamos los 2 o los 3 primeros, bien eliminando los demás (esto se llama truncar), o bien redondeando al segundo, al tercero, etc. Sea cual sea la manera en la que lo hagamos, cuando llegamos al valor de r se han acumulado pequeños errores que, finalmente nos pueden dar un valor de r poco mayor que 1, por ejemplo, 1'001. Pero esto, teóricamente es imposible, en estos casos lo mejor es rehacer los cálculos tomando un mayor número de decimales, con el objeto de aumentar la exactitud.

ACTIVIDADES

6. Asignar a cada una de las nubes de puntos siguientes su valor del coeficiente de correlación de entre los siguientes:

$$r = 0'60; \qquad r = 0'99; \qquad r = -0'98; \qquad r = -0'26.$$



Recuerda

- ✓ El *coeficiente de correlación lineal* mide el grado de asociación lineal entre dos variables estadísticas. Se calcula mediante la fórmula

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

- ✓ Verifica $-1 \leq r \leq 1$.

  Si $r > 0$, hay dependencia lineal positiva entre las variables.

  Si $r < 0$, hay dependencia lineal negativa entre las variables.

  Si $r = 0$, no hay dependencia, las variables son incorreladas.

- ✓ La dependencia es mayor cuanto mayor sea el valor absoluto de r.

5. Regresión lineal

Si calculásemos el coeficiente de corre lación de la nube de puntos de la figur 11.10, obtendríamos un resultado positi vo. En efecto, se observa que hay una dependencia lineal positiva, ya que los puntos parecen acumularse alrededor de una recta de pendiente positiva, recta es ta que también se ha dibujado en la figu ra. Ahora bien, ¿cuál es la recta que me jor se aproxima a los puntos? Esta recta cuya ecuación vamos a aprender a calcu lar es la llamada **recta de regresión**.

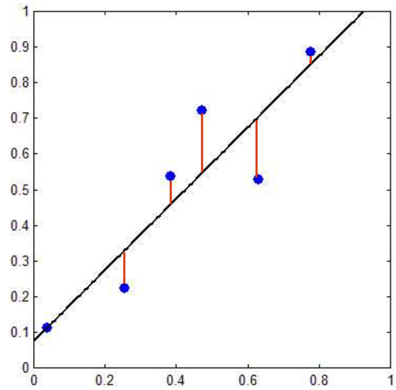


Figura 11.10: Recta de regresión

Cuando queremos estudiar la recta que mejor se aproxima a la nube de puntos, estamos haciendo *regresión lineal*. Sin embargo, hemos visto a lo largo de esta unidad otras nubes de puntos que más que acercarse a una recta, parecían aproximarse a alguna curva (una parábola por ejemplo). En este caso hablaríamos de *regresión no lineal*. En este curso sólo nos ocuparemos de la *regresión lineal*.

5.1. Rectas de regresión

Hemos dicho antes que la *recta de regresión* es la recta que mejor se aproxima a la nube de puntos. Vamos a intentar aclarar qué queremos decir con la expresión “mejor se aproxima".

Empezaremos diciendo que hay dos formas de precisar esta idea, que dan lugar a dos rectas de regresión, que se van a llamar, respectivamente, **recta de regresión de** Y **sobre** X y **recta de regresión** X **sobre** Y.

La recta de regresión de Y sobre X aparece como aquella recta que hace que las diferencias entre las ordenadas de la recta y las ordenadas de los puntos (estas diferencias son los segmentos verticales que se han dibujado en la figura 11.10, es decir, son las diferencias entre la altura del punto y la de la recta) sea, en promedio, mínima. Debido a que estas diferencias son positivas y negativas, dependiendo de que el punto esté por debajo o por encima de la recta, realmente lo que se hace es elevarlas al cuadrado, sumarlas y dividir entre el número de puntos, para calcular el promedio. Bien, pues imponiendo la condición de que este promedio sea mínimo, se puede demostrar que la ecuación que la verifica es

$$y - \overline{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})$$

La recta de regresión de X sobre Y se obtiene de manera análoga, imponiendo la condición de que sean mínimas las diferencias entre las abscisas. De esta forma, se llega a la ecuación

$$x - \overline{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \overline{y})$$

Es fácil darse cuenta de que las dos rectas de regresión pasan por el centro de masas de la nube de puntos $(\overline{x}, \overline{y})$ y además, ambas están inclinadas hacia el mismo lado, es decir, ambas tienen pendiente positiva o pendiente negativa, precisamente dependiendo de que la haya dependencia lineal positiva o negativa.

Para calcularlas es necesario calcular las medias, las varianzas y la covarianza. En el apartado siguiente vamos a ver un ejemplo.

5.2. Estimaciones con las rectas de regresión

¿Para qué sirven las rectas de regresión? Pues sirven para hacer estimaciones de una de las variables sobre la otra. Vamos a ver qué significa esto mediante un ejemplo que ya apareció cuando empezamos a hablar de variables estadísticas bidimensionales, las notas de la asignatura de Matemáticas y de la asignatura de Física y Química de un grupo de alumnos.

x_i	2	4	5	6	7	8	8	9
y_i	3	5	4	$5'5$	5	$7'5$	8	10

donde los x_i son las notas de Matemáticas y los y_i las de Física y Química.

La nube de puntos de estos datos, que ya habíamos dibujado, es la de la figura 11.11 y sugiere que cuando la nota de Matemáticas es alta, también lo es la de Física y Química; y lo mismo cuando la nota es baja.

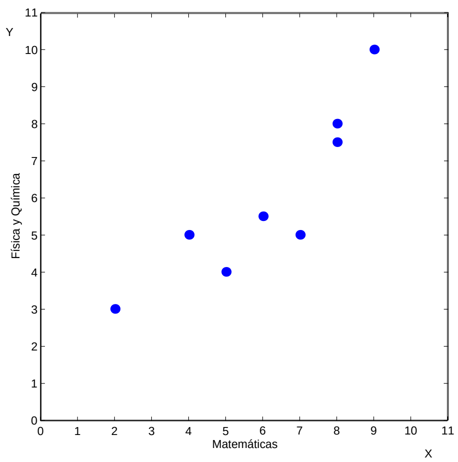


Figura 11.11: Dependencia positiva

Este grado de dependencia o de correlación la podemos cuantificar mediante el cálculo del coeficiente de correlación. Omitiremos la tabla y algunos de los cálculos que hemos repetido ya en varios ejemplos. (Se sugiere como ejercicio verificar los resultados.)

Medias:

$$\overline{x} = 6'125; \qquad \overline{y} = 6.$$

Varianzas:

$$s_x^2 = 4'8594 \qquad s_y^2 = 4'6875.$$

Desviaciones típicas:

$$s_x = 2'2044 \qquad s_y = 2'1651.$$

Covarianza:

$$s_{xy} = 4'25.$$

Coeficiente de correlación:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0'8905.$$

Lo que confirma nuestra observación sobre la nube de puntos. Existe una correlación positiva fuerte entre las dos variables.

Ahora bien, supongamos que un estudiante ha hecho los dos exámenes y sólo conoce la nota de Matemáticas que es un 6'5. ¿Qué nota puede esperar en la asignatura de Física y Química? Para hacer esta estimación es para lo que sirve la recta de regresión de Y sobre X. Calculamos su ecuación sustituyendo en la expresión

$$y - \overline{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})$$

$$y - 6 = \frac{4'25}{4'8594}(x - 6'125)$$

que, simplificando y despejando y se convierte en

$$y = 0'8746x + 0'6431$$

Ahora, para estimar la nota de Física y Química, sustituimos en la ecuación de la recta el valor $x = 6'5$, entonces, $y = 6'328$, que será aproximadamente la nota que puede obtener.

Otro estudiante sabe que ha obtenido 9 en Física y Química. ¿Qué nota puede esperar en Matemáticas? Ahora sabemos que $y = 9$ y queremos calcular x. Para este caso, es más adecuada la recta de regresión de X sobre Y, ya que queremos calcular x conocido y.

Calculamos la recta de regresión de X sobre Y sustituyendo en la expresión

$$x - \overline{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \overline{y})$$

$$x - 6'125 = \frac{4'25}{4'6875}(y - 6)$$

Simplificamos y despejamos x y obtenemos

$$x = 0'9067y + 0'685.$$

Para estimar la nota de Matemáticas, sustituimos en la ecuación de esta recta el valor $y = 9$, con lo que se obtiene $x = 8'8453$.

¿Qué fiabilidad tienen estas estimaciones? Desde luego, no se puede esperar que aporten el resultado exacto. Su exactitud dependerá precisamente del valor del coeficiente de correlación. Cuanto más próximo esté el coeficiente de correlación a -1 o a 1, mejor será la estimación. Por otra parte, hay que tener en cuenta que la estimación sólo tendrá sentido si el valor que se sustituye está en el rango de los datos que se tienen. Por ejemplo, si tenemos datos de peso y estatura de un grupo de personas y los pesos oscilan entre 60 y 70 kilogramos, no tendría sentido, con estos datos, intentar hacer una estimación de la estatura de una persona que pese 120 kilogramos.

ACTIVIDADES

7. Se ha preguntado a un grupo de personas cuántas horas semanales dedican a hacer deporte (X) y cuántas horas semanales dedican a ver la televisión. Las respuestas han sido las siguientes:

x_i	0	4	7	8	10
y_i	20	15	5	4	1

Calcular las ecuaciones de las dos rectas de regresión. Utilizando la recta adecuada, estimar el tiempo que dedicaría a ver la televisión una persona que dedica semanalmente 5 horas a hacer deporte.

Recuerda

✓ Una recta de regresión es la que mejor se ajusta a una nube de puntos. Hay dos:

Recta de regresión de Y sobre X: $y - \overline{y} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - \overline{x} = \dfrac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \overline{y})$

✓ Las rectas de regresión sirven para hacer estimaciones de una variable sobre la otra.
Si conocemos x, utilizamos la recta de regresión de Y sobre X para calcular y.
Si conocemos y, utilizamos la recta de regresión de X sobre Y para calcular x.

UNIDAD

12 Variables aleatorias: Binomial y Normal

ÍNDICE DE CONTENIDOS

La probabilidad es la parte de las matemáticas que conecta la estadística descriptiva con la estadística inferencial. Esta última, la estadística inferencial, hace uso de una herramienta fundamental, la variable aleatoria. En esta unidad didáctica haremos en primer lugar, un repaso de los elementos básicos de la teoría de la probabilidad que nos permitan entender la idea de variable aleatoria. A continuación introduciremos la idea de variable aleatoria y estudiaremos los dos ejemplos de variables aleatorias más importantes: la binomial y la normal.

1. Probabilidad

1.1. Experimentos aleatorios. Sucesos

Si dejamos caer un objeto desde una altura de 10 metros, es posible, con unos conocimientos básicos de Física, determinar lo que ocurrirá a continuación: tiempo que tardará el objeto en caer al suelo y velocidad con la que llegará. Lo mismo ocurre si ponemos a calentar agua en el fuego, se puede predecir en qué momento comenzará a hervir, se podría calcular el tiempo que tardará en evaporarse todo el agua, etc. Estos experimentos en los que, siempre que se repitan en las mismas condiciones, se puede predecir cuál será el resultado, se llaman **experimentos deterministas**.

Hay otros experimentos en los que no se puede predecir el resultado. Por ejemplo, tiramos un dado con seis caras numeradas del uno al seis. Seguro que sale un número del uno al seis, pero no podemos predecir cuál será. Lo mismo ocurre si tiramos una moneda, no podemos predecir si saldrá cara o cruz. Estos son los experimentos de los que se ocupa la probabilidad, se llaman **experimentos aleatorios**. Son experimentos cuyo resultado no se puede predecir, depende del *azar*. (Una definición precisa del azar, incluso del azar matemático, pertenece al campo de la Filosofía, aunque todos tenemos una idea intuitiva de su significado).

Si tiramos un dado, puede salir el 1, puede salir el 5, puede salir un número par, puede salir un número impar, puede salir un número mayor que 3, puede salir un número, etc. Cada una de estas posibilidades asociadas a un experimento aleatorio, en este caso el de tirar un dado, se le llama **suceso**. A los sucesos los representaremos mediante letras mayúsculas. Por ejemplo, para el lanzamiento del dado, algunos de los sucesos son

$$A = \{1\}; \quad B = \{\text{número par}\}; \quad C = \{\text{mayor que 3}\}; \quad \text{etc.}$$

El suceso $B = \{\text{número par}\}$ es un **suceso compuesto**, porque puede descomponerse en otros sucesos, ya que el hecho de que salga un número par al tirar un dado es lo mismo que decir que salga el 2, el 4 o el 6. Es decir, $B = \{\text{número par}\} = \{2, 4, 6\}$. Sin embargo, no es posible descomponer el suceso $A = \{1\}$, por esta razón se le llama **suceso elemental**.

Dado un experimento aleatorio, a la colección de todos sus sucesos elementales se le llama **espacio muestral**, y lo representaremos por la letra E. Por ejemplo, si tiramos un dado, su espacio muestral es

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si tiramos una moneda, sólo hay dos posibilidades, por tanto, su espacio muestral es

$$E = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$$

Al espacio muestral también se le llama **suceso seguro**, E, ya que incluye todas las posibilidades del experimento y, con toda seguridad, una de ellas ocurrirá, con lo que el suceso se verifica siempre. También hablaremos del **suceso imposible**, como el suceso que nunca ocurre, y lo representaremos por el símbolo $\emptyset$, que también se utiliza para representar al conjunto que no posee elementos, el conjunto vacío.

ACTIVIDADES

1. Describir el espacio muestral asociado a los siguientes experimentos aleatorios:
a) Extraemos una carta al azar de una baraja española y anotamos el palo al que pertenece la carta.
b) Abrimos al azar un libro de 200 páginas y anotamos el número de la página de la derecha.
c) Tiramos tres monedas y anotamos el número de caras.
d) Sacamos al azar una bola de una bolsa que contiene dos bolas rojas, una verde y dos azules.
e) Lanzamos una moneda tantas veces como sea necesario hasta obtener por primera vez cara.

Se llama **unión** de dos sucesos A y B, y se representa por $A \cup B$, al suceso que ocurre cuando ocurre A, ocurre B o ambos. Se llama **intersección** de dos sucesos A y B, y se representa por $A \cap B$, al suceso que ocurre cuando ocurren A y B simultáneamente.

Por ejemplo, en el experimento de extraer una carta de una baraja española, si llamamos A al suceso que consiste en extraer una carta de oros y B al suceso que consiste en elegir un as, entonces, $A \cup B$ se verifica si la carta elegida es un oro, o un as, o ambas cosas, es decir, el as de oros. Por otra parte, $A \cap B$ se verificará únicamente cuando la carta sea el as de oros.

Llamaremos suceso **contrario** de A, y lo representaremos mediante $\overline{A}$, al que ocurre cuando no ocurre A.

Se puede comprobar que se dan las siguientes propiedades con respecto de las operaciones entre sucesos que acabamos de definir:

- $A \cup \overline{A} = E$, ya que siempre ocurre o bien A o bien el contrario $\overline{A}$, por tanto es el suceso seguro.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$, ya que A y su contrario $\overline{A}$, nunca pueden ocurrir simultáneamente.
- $\overline{\overline{A}} = A$, el contrario del contrario de A es el propio A.
- $\overline{E} = \emptyset$, es decir, el contrario del suceso seguro es el suceso imposible, y por lo tanto, $\overline{\emptyset} = E$.
- $A \cap E = A$; $A \cup \emptyset = A$.
- $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$. Estas dos propiedades, que se denominan *Leyes de De Morgan*, nos dicen que el contrario de una unión es la intersección de contrarios, y el contrario de una intersección es la unión de contrarios.

Se dice que dos sucesos A y B son **sucesos incompatibles** si su intersección es el suceso imposible, es decir, $A \cap B = \emptyset$. Por ejemplo, la segunda propiedad de la lista anterior indica que un suceso y su contrario siempre son incompatibles.

1.2. Frecuencia y probabilidad

Tiramos un dado de seis caras n veces y anotamos los resultados obtenidos, si llamamos A al suceso "salir 2", el número de veces de las n que se obtiene el número 2 se llama **frecuencia absoluta** del suceso A, lo vamos a denominar n_A. El cociente entre el número de veces que se obtiene el 2 y el y el número de veces que se tira el dado, se llama **frecuencia relativa** del suceso A, que representaremos por $f_r(A)$, es decir,

$$\boldsymbol{f_r(A) = \frac{n_A}{n}}$$

Necesariamente $f_r(A)$ es un número comprendido entre 0 y 1 (pudiendo ser 0 o 1,) ya que $n_A \leq n$.

¿Qué ocurrirá con el número $f_r(A)$, cuando el número de veces que tiramos el dado sea muy grande? Suponiendo que el dado está bien equilibrado, es razonable pensar que el número de veces que se obtiene 2 será el mismo que el número de veces que se obtiene 1, igual que el número de veces que se obtiene 3, etc. Por tanto, el número de veces que se obtiene 2, tenderá a ser una sexta parte del número de veces que se tira el dado. En otras palabras, el límite de la frecuencia relativa, cuando n tiende a infinito será $\frac{1}{6}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_r(A) = \frac{1}{6}$$

Este hecho no se puede demostrar, sino que es un hecho empírico, experimental, siempre que se comprueba ocurre. De la misma manera que si tiramos una moneda equilibrada un gran número de veces, esperamos que más o menos la mitad de las veces se obtenga cara, y la otra mitad se obtenga cruz.

Este límite ideal de la frecuencia relativa de un suceso cuando el número de veces que se repite el experimento tiende a infinito es lo que podríamos llamar *probabilidad*, porque mide la mayor o menor disposición de un suceso a verificarse.

ACTIVIDADES

2. Si repetimos un experimento aleatorio n veces, ¿cuál es la frecuencia relativa del suceso seguro E y la del suceso imposible $\emptyset$?

Basándonos en las características de las *frecuencias relativas*, podemos definir la **probabilidad** como cualquier función P que hace corresponder un número real a cada suceso y que verifique las siguientes propiedades:

- $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso A.
- $P(E) = 1$, es decir, la probablidad del suceso seguro es 1.
- Si A y B son dos sucesos incompatibles, entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

A estas propiedades se les llama *axiomas de la probabilidad* y a partir de ellas se pueden deducir las siguientes propiedades, que también verifica la probabilidad:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, que nos permite calcular la probabilidad de un suceso conocida la de su contrario.
- $P(\emptyset) = 0$, es decir, la probabilidad del suceso imposible es 0.
- Si A y B son sucesos cualesquiera, compatibles, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Por lo general trabajaremos con experimentos aleatorios cuyos espacios muestrales estarán compuestos por sucesos simples igualmente probables. Para estos casos, el problema práctico del cálculo de probabilidades es bastante sencillo.

Por ejemplo, en el caso del dado, el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, está compuesto por seis sucesos elementales, todos ellos con las mismas posibilidades de ocurrir, es decir, hay la misma probabilidad de que salga 1, que de que salga 2, que de que salga 3, etc. Como $P(E) = 1$, y

$$E = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\};$$

entonces,

$$1 = P(E) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\});$$

porque los sucesos son incompatibles dos a dos (no pueden darse dos de ellos simultáneamente.) Por tanto, necesariamente la probabilidad de cada uno es $\frac{1}{6}$, para que la suma anterior sea 1.

Si queremos calcular la probabilidad de que el resultado de tirar el dado sea par,

$$P(\text{par}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Lo que hemos hecho al final es dividir el número de casos favorables a que salga par, 3, entre el número de casos posibles, que eran 6. A esta regla, que permite calcular probabilidades fácilmente, se le llama **regla de Laplace**, y se puede generalizar de la forma siguiente:

Si E es un espacio muestral compuesto por sucesos simples igualmente probables, entonces, para cualquier suceso A,

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\text{número de casos favorables a } \boldsymbol{A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de la regla de Laplace:

- Tiramos una moneda, ¿cuál es la probablidad de obtener cara?

Hay dos casos posibles: cara y cruz; y uno favorable, entonces $P(\text{cara}) = \frac{1}{2}$.

- Sacamos una carta de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de sacar un rey?

Hay 40 casos posibles, de los cuales 4 son reyes, entonces $P(\text{rey}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

- Tiramos dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cara y una cruz?

Si llamamos cara $= c$ y cruz $= +$, hay cuatro casos con las mismas posibilidades: $\{cc, c+, +c, ++\}$; de los cuales, dos son favorables, que son, $c+$ y $+c$. Por lo tanto,

$$P(\text{cara y cruz}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

ACTIVIDADES

3. Tiramos dos dados numerados del 1 al 6, y sumamos las puntuaciones obtenidas. Calcular la probabilidad de que la suma sea 10.

4. De una baraja española extraemos dos cartas consecutivamente y sin devolución, en otras palabras, sacamos la primera y, sin devolverla a la baraja, sacamos la segunda. Calcular la probabilidad de que las dos cartas extraídas sean reyes.

1.3. Probabilidad condicionada

Pensemos en el ejemplo de la actividad anterior. Tenemos una baraja española de la que extraemos dos cartas consecutivamente, sin reemplazamiento. Vamos a plantear la experiencia ahora desde otro punto de vista. Sacamos la primera carta y resulta ser un rey, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea también un rey?

Como la primera ha sido un rey y no la hemos devuelto, antes de la segunda extracción hay 39 cartas, de las cuales 3 son reyes. Por lo tanto, la probabilidad de que la segunda sea un rey es $\frac{3}{39}$.

Supongamos que la primera carta no ha sido un rey, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda lo sea?

Si la primera no ha sido un rey, antes de la segunda extracción hay 39 cartas, entre las cuales se encuentran los 4 reyes. Por tanto, la probabilidad ahora es $\frac{4}{39}$.

Lo que hemos hecho en ambos casos es calcular una **probabilidad condicionada**, es decir, hemos calculado la probabilidad de un suceso, condicionado a que otro suceso ha ocurrido. De manera más precisa, dados dos sucesos A y B, la *probabilidad de B condicionada a A*, que vamos a denotar B/A es

$$\boldsymbol{P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

siempre que $P(A) \neq 0$.

De la fórmula anterior, si despejamos la probabilidad de la instersección, tenemos

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

Esta fórmula resulta muy útil para calcular la probabilidad de un suceso compuesto por dos sucesos consecutivos. Por ejemplo, el problema de calcular la probabilidad de que dos cartas extraídas de la baraja española sin reemplazamiento sean reyes, se puede replantear de la siguiente forma:

Sea R_1 el suceso *salir rey en la primera extracción* y R_2 el suceso *salir rey en la segunda extracción*. Queremos calcular la probabilidad de que salga rey en la primera y en la segunda extracción, es decir,

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1).P(R_2/R_1)$$

Esta fórmula nos dice que la probabilidad de sacar rey en la primera y en la segunda extracción es igual a la probabilidad de que salga rey en la primera, multiplicada por la probabilidad de que salga rey en la segunda, sabiendo que la primera ha sido un rey. Entonces,

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}.$$

Si bien para ciertos sucesos el hecho de saber que ha ocurrido previamente algún otro puede ser importante, en otros casos esta información es irrelevante. Por ejemplo, en el caso anterior, supongamos que las dos cartas se extraen con reemplazamiento, esto es, después de sacada y anotada la primera carta se devuelve al mazo. Es decir, ahora al sacar la segunda carta hay 40 en la baraja, incluidos los 4 reyes. El hecho de saber que la primera carta ha sido rey o as no condiciona en modo alguno el resultado de la segunda extracción. Cuando tenemos dos sucesos para los que la verificación de uno no condiciona la del otro, decimos que los dos sucesos son *independientes*. En términos de probabilidad condicionada, se dice que A y B son dos **sucesos independientes** si

$$P(B/A) = P(B) \text{ o bien } P(A/B) = P(A)$$

Como consecuencia, si dos sucesos son independientes, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

La misma fórmula se puede aplicar cuando en lugar de dos son más los sucesos independientes dos a dos. Por ejemplo, tiramos una moneda 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que salgan 10 caras?

El resultado de cada lanzamiento es independiente de los demás. Por tanto, la probabilidad de que salgan 10 caras será el producto de las probabilidades de obtener cara en cada lanzamiento, es decir,

$$P(\text{10 caras}) = P(\text{cara en la } 1^a) \cdot P(\text{cara en la } 2^a) \ldots P(\text{cara en la } 10^a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

ACTIVIDADES

5. Tiramos un dado numerado del 1 al 6 tres veces. Calcular la probabilidad de obtener, al menos, un 3.
(Sugerencia: calcular primero la probabilidad del suceso contrario).

Recuerda

- ✓ Un *experimento determinista* es aquel del que se puede predecir el resultado final, siempre que se repita en las mismas condiciones. Un *experimento aleatorio* es aquel en el que no se puede predecir su resultado final, porque depende del azar.
- ✓ Un *suceso* es un posible resultado de un experimento aleatorio. Un *suceso elemental* es el suceso más simple posible de un experimento aleatorio.

  - El *espacio muestral* es el conjunto de todos los sucesos simples de un experimento aleatorio.
- ✓ Dados dos sucesos A y B, se llama *unión de A y B* y se denota $A \cup B$ al suceso que se verifica si se verifica A o B o ambos. Dados dos sucesos A y B, se llama *intersección de A y B* y se denota $A \cap B$ al suceso que se verifica si se verifican A y B simultáneamente. Se llama *contrario de A*, y se denota $\overline{A}$ al suceso que se verifica cuando no lo hace A.
- ✓ La *probabilidad* de un suceso A es el límite de su frecuencia relativa, cuando el número de veces que se repite el experimento tiende a infinito. También se puede definir como cualquier función P que hace corresponder un número real a cada suceso y que verifica las propiedades
  - $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso A.
  - $P(E) = 1$, es decir, la probablidad del suceso seguro es 1.
  - Si A y B son dos sucesos *incompatibles*, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- ✓ *Regla de Laplace*. Si E es un espacio muestral compuesto por sucesos simples igualmente probables, entonces, para cualquier suceso A,

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

- ✓ La *probabilidad de B condicionada a A* es $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, si $P(A) \neq 0$. Es la probablidad de que se verifique un suceso, condicionado a que ha ocurrido otro.
- ✓ Dos sucesos A y B son *independientes* si $P(B/A) = P(B)$ o bien $P(A/B) = P(A)$. Si dos sucesos son independientes, se verifica

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

2. Variables aleatorias

Tiramos dos monedas y contamos el número de caras, este número puede ser 0, 1 o 2. Hemos repetido la experiencia 5000 veces (en realidad, hemos simulado la experiencia con un ordenador) y en la tabla siguiente hemos anotado la cantidad de veces que ha salido cada uno de los resultados, es decir, la frecuencia absoluta de cada suceso:

número de caras	0	1	2
frec. absoluta	1222	2509	1269

Como la experiencia se ha repetido 5000 veces, dividiendo las frecuencias absolutas por este número, obtenemos las frecuencias relativas, y la nueva tabla es

número de caras	0	1	2
frec. relativa	$0'2444$	$0'5018$	$0'2538$

Este es un ejemplo de **distribución de frecuencias** (relativas en este caso.) Obsérvese que la suma de las frecuencias relativas es 1, que es la frecuencia relativa del suceso seguro,

$$f_r(0) + f_r(1) + f_r(2) = 0'2444 + 0'5018 + 0'2538 = 1$$

Según vimos en la sección anterior, si aumentamos indefinidamente el número de veces que repetimos el experimento, las frecuencias relativas acabarán tendiendo a la probabilidad de cada uno de los sucesos. Dado que el espacio muestral que se obtiene al tirar dos monedas es

$$E = \{cc, c+, +c, ++\},$$

las probabilidades de los diferentes números de caras son:

$$P(0) = 0'25 \qquad P(1) = 0'5 \qquad P(2) = 0'25$$

Tenemos ahora, una **distribución de probabilidad**, que es el límite de la distribución de frecuencias relativas cuando el número de veces que se repite la experiencia tiende a infinito.

número de caras	0	1	2
probabilidad	$0'25$	$0'5$	$0'25$

También la suma de todas las probabilidades es 1.

Tanto la distribución de frecuencias, como la distribución de probabilidad están asociadas a una **variable aleatoria**, que en este caso es $X =$ *número de caras*. En general, una *variable aleatoria* es una ley o función que toma valores asociados a un cierto experimento aleatorio.

El ejemplo anterior, la variable $X =$ *número de caras*, es un ejemplo de **variable aleatoria discreta**. Se llama así a las variables aleatorias que sólo pueden tomar un cierto número de valores, bien finito, $X = 0, 1, 2$, como el ejemplo anterior, o si el número es infinito, de manera que entre cada dos no haya posibilidad de encontrar un tercero, por ejemplo, si los valores de la variable son $X = 0, 1, 2, 3, \ldots$ No obstante, los ejemplos de variables aleatorias discretas que estudiaremos serán siempre del primer tipo, es decir, con un número de valores posibles finito.

Cuando la variable puede tomar todos los valores de un cierto intervalo de números reales, entonces se dice que es una **variable aleatoria continua**. Por ejemplo, si elegimos una judía verde al azar y medimos su longitud en centímetros, la variable $X =$ *longitud en cm*, es una variable aleatoria continua.

ACTIVIDADES

6. De las siguientes variables aleatorias, indicar cuál es discreta y cuál es continua:
a) El número de llamadas telefónicas que recibe una determinada centralita entre las 9 y las 10 horas de un día elegido al azar.
b) Tiramos dos dados y sumamos sus puntuaciones.
c) La hora a la que llega el autobús a una parada, de la que sabemos que está comprendida entre las 5 y las 5 y media de la tarde.
d) El peso de una persona elegida al azar.
e) La cuantía del primer premio de un sorteo de lotería primitiva en euros.
f) El número de coches de una familia escogida al azar.

Recuerda

- ✓ Una *distribución de frecuencias* es el recuento de frecuencias de cada resultado cuando se ha realizado un experimento aleatorio varias veces.
- ✓ Una *distribución de probabilidad* es un recuento de probabilidad de cada resultado posible asociado a un cierto experimento aleatorio.
- ✓ Una *variable aleatoria* es una ley o función que toma valores asociados a los resultados de un experimento aleatorio.
- ✓ Una variable aleatoria es *discreta* cuando sólo puede tomar un cierto número de valores, o bien cuando, aunque esos valores sean infinitos, entre cada dos, no se puede encontrar un tercero.
- ✓ Una variable aleatoria es *continua* cuando puede tomar valores en un cierto intervalo de números reales.

3. Variables aleatorias discretas: la distribución Binomial

Ya hemos visto lo que es una variable aleatoria discreta. En esta sección vamos a estudiar sus características principales y el ejemplo más importante de variable discreta, la distribución Binomial.

3.1. Características de una variable aleatoria discreta

Volvamos al ejemplo del lanzamiento de dos monedas. Si consideramos la variable aleatoria X = *número de caras*, esta variable aleatoria discreta podía tomar los valores $X = 0, 1, 2$. La función que asigna a cada valor de la variable su probabilidad correspondiente se llama **función de probabilidad**. En este caso, como hemos visto antes,

$$P(X=0)=0'25 \qquad P(X=1)=0'5 \qquad P(X=2)=0'25$$

Si denotamos por x_i los valores que puede tomar la variable, y p_i las probablidades respectivas de cada uno de los valores, es decir, $P(X=x_i)=p_i$; la función de probabilidad se puede representar en la tabla siguiente:

x_i	p_i
0	$0'25$
1	$0'5$
2	$0'25$

Para que una función de probablidad de una variable aleatoria discreta esté bien definida es preciso que la suma de todas las probablidades sea 1, es decir,

$$\sum p_i = 1.$$

Al igual que las variables estadísticas, las variables aleatorias también tienen asociados ciertos parámetros que permiten describirlas. Los vamos a estudiar a continuación.

Se llama **media**, *esperanza matemática* o *valor esperado* de una variable aleatoria discreta X al número

$$\boxed{\boldsymbol{\mu=\sum x_i.p_i}}$$

Es decir, la suma de los productos de los valores de la variable x_i por sus probabilidades correspondientes p_i. En nuestro ejemplo,

$$\mu=\sum x_i.p_i = 0\cdot 0'25+1\cdot 0'5+2\cdot 0'25=1.$$

Este valor es el análogo a la media $\overline{x}$ de una variable estadística unidimensional. Es el valor que esperamos obtener como promedio si el experimento aleatorio se repite un número de veces muy alto.

Se llama **varianza** de una variable aleatoria discreta X al número

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma^2=\sum (x_i-\mu)^2.p_i}}$$

La varianza de una variable aleatoria es análoga a la varianza de una variable estadística. También se puede simplificar su cálculo mediante la fórmula

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma^2=\sum x_i^2.p_i-\mu^2}}$$

En nuestro ejemplo,

$$\sigma^2=\sum x_i^2.p_i-\mu^2 = 0^2\cdot 0'25+1^2\cdot 0'5+2^2\cdot 0'25-1^2=0'5.$$

Por último, se llama **desviación típica** de una variable aleatoria discreta X a la raíz cuadrada de su varianza, es decir,

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma=\sqrt{\sum x_i^2.p_i-\mu^2}}}$$

Que en nuestro ejemplo es $\sigma = \sqrt{0'5} = 0'707$.

ACTIVIDADES

7. Consideramos la siguiente tabla, que es la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta:

x_i	1	2	3	4
p_i	$0'2$	$0'1$	$0'3$	p

a) Calcular el valor de p para que la función de probabilidad esté bien definida.
b) Calcular su media, varianza y desviación típica.

3.2. Distribución Binomial

Tenemos un experimento aleatorio que sólo produce dos posibilidades que vamos a llamar *éxito* y *fracaso*. La probabilidad de *éxito* es p y la de *fracaso* es $1-p=q$. Repetimos la experiencia n veces, cada vez que se repite el resultado es independiente del anterior. Si llamamos $X =$ *número de éxitos de los* n, entonces se dice que X es una variable aleatoria que sigue una **distribución Binomial**, lo que indicaremos de la forma $X \sim B(n,p)$, donde n es el número de veces que se repite la experiencia y p es la probabilidad de obtener *éxito* cada vez que se repite. Es evidente que la Binomial es una variable aleatoria discreta, ya que los valores que puede tomar son $X = 0,1,2,3,\ldots,n$.

Quizá la situación más sencilla en la que aparece la *Binomial* sea en el lanzamiento de una moneda. Por ejemplo, lanzamos una moneda $n = 4$ veces. Cada vez que la lanzamos puede salir cara con probabilidad $p = \dfrac{1}{2}$, o cruz con probablidad $q = 1-p = \dfrac{1}{2}$. Si consideramos *éxito* al hecho de salir cara, la variable aleatoria $X =$ *número de caras* sigue una binomial $B(4,\frac{1}{2})$.

Vamos a calcular su función de probabilidad:

- $P(X=0) = P(\text{4 cruces}) = P(++++) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$; ya que las cuatro pruebas son independientes.

- $P(X=1) = P(\text{1 cara y 4 cruces}) = P(c+++) + P(+c++) + P(++c+) + P(+++c)$
  $= 4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$; donde $c+++;\quad +c++;\quad ++c+\quad +++c$ son los diferentes órdenes en que pueden aparecer la cara y las cruces.

- $P(X=2) = P(\text{2 caras y 2 cruces})$
  $= P(cc++) + P(+c+c) + P(c+c+) + P(++cc) + P(c++c) + P(+cc+)$

$= 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$; también aquí hemos considerado las diferentes formas de ordenar las dos caras y las dos cruces, que son seis en total.

- $P(X = 3) = P(3 \text{ caras y } 1 \text{ cruz}) = P(1 \text{ cara y } 3 \text{ cruces}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$.
- $P(X = 4) = P(4 \text{ caras}) = P(4 \text{ cruces}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Por una parte, se puede comprobar que la suma de estas probabilidades es 1, con lo que la función de probabilidad está bien definida; y por otra, los factores por los que aparece multiplicado $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ en cada caso son

$$1, 4, 6, 4, 1$$

que es la cuarta fila del *triángulo de Tartaglia*, ya estudiado en el curso anterior.

Recordemos que el triángulo de Tartaglia es el siguiente, en el que cada número se obtiene mediante la suma de los dos que están inmediatamente sobre él.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}$$

Por otra parte, también se ha estudiado que los elementos de cualquier fila enésima de este triángulo se pueden calcular mediante los *números combinatorios*

$$\binom{n}{0}; \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; \dots \binom{n}{n}$$

donde cada número combinatorio se calcula

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

($n!$ es n factorial. Por ejemplo, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.)

En general, se puede comprobar que la función de probabilidad de la Binomial $B(n, p)$ viene dada por

$$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

que es la probabilidad de que se produzcan k éxitos, con $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

La dificultad a la hora de resolver un problema asociado a la Binomial no está en la utilización de la fórmula, sino en la identificación de la Binomial adecuada. Veamos un par de ejemplos:

- En un examen de tipo test hay 10 preguntas de respuesta alternativa. Cada una de ellas tiene 4 posibles opciones, de las cuales hay que elegir una. Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de responder correctamente a dos de ellas?

Cada vez que respondemos a una pregunta del examen, podemos acertar con probabilidad $p = \frac{1}{4}$, o fallar con probabilidad $q = 1 - p = \frac{3}{4}$. Si consideramos la variable aleatoria $X =$ *número de respuestas correctas*, la variable X sigue una Binomial $B(10, \frac{1}{2})$.

Entonces, queremos calcular la probabilidad $P(X = 2)$, aplicando la fórmula anterior

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0'2816.$$

- En una biblioteca el 10 % de los libros son de matemáticas. Elegimos 5 libros al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos cogido más de 3 libros de matemáticas?

Cada vez que escogemos un libro tenemos una probabilidad $p = 0'10$ de elegir uno de matemáticas, y una probabilidad $q = 1 - p = 0'90$ de elegir un libro que no sea de matemáticas. Si consideramos la variable aleatoria
$X =$ *número de libros de matemáticas elegidos*, la variable X sigue una binomial $B(5, 0'1)$.

Queremos calcular la probabilidad de que haya más de 3 de matemáticas, es decir, $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5)$. Por tanto, hay que utilizar la fórmula de la función de probabilidad de la Binomial dos veces,

$$\begin{aligned} P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) &= \binom{5}{4} \cdot 0'1^4 \cdot 0'9^1 + \binom{5}{5} \cdot 0'1^5 \cdot 0'9^0 \\ &= 0'00045 + 0'00001 = 0'00046. \end{aligned}$$

Como cabía esperar, una probabilidad muy baja. Pues ya era muy difícil, con sólo un 10 %, elegir un sólo libro de matemáticas.

La deducción de las fórmulas para el cálculo de la media, varianza y desviación típica de una binomial no es difícil pero sí bastante laboriosa, por lo que no la vamos a describir aquí. Diremos simplemente cuáles son las fórmulas:

Si $X \sim B(n, p)$, su media es

$$\boldsymbol{\mu = n \cdot p}$$

Su varianza es

$$\boldsymbol{\sigma^2 = n \cdot p \cdot q}$$

Y su desviación típica

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

ACTIVIDADES

8. Tiramos cinco veces un dado numerado del 1 al 6:
a) Calcular la probabilidad de obtener sólo un 6.
b) Calcular la probabilidad de obtener al menos un 6.
c) Calcular la probabilidad de que salga 6 en los cinco lanzamientos.

9. Un examen de tipo test consta de 20 preguntas, cada una de ellas con 4 opciones, de las cuales sólo una es la correcta. Un estudiante que no se ha preparado el examen responde al azar. ¿Cuántas respuestas cabe esperar que acertará?

Recuerda

- ✓ Se dice que X sigue una distribución Binomial y se escribe $X \sim B(n,p)$, si repitiendo un experimento aleatorio n veces, de manera que cada vez sólo hay dos posibilidades: *éxito* con probabilidad p y su contrario, *fracaso* con probabilidad $1-p=q$; X representa el *número de éxitos de los* n.
- ✓ La función de probabilidad de la Binomial viene dada por

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

  que es la probabilidad de que se produzcan k éxitos, con $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- ✓ Su media es $\mu = n \cdot p$; su varianza es $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$; y su desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

4. Variables aleatorias continuas: la distribución Normal

Una variable aleatoria continua es una variable que toma sus valores entre cualquiera de los contenidos en un intervalo de números reales. Mientras que la probabilidad en una variable discreta viene determinada por su función de probabilidad, en las variables continuas la probabilidad viene determinada por la llamada función de densidad, que estudiaremos a continuación. La más importante de las variables aleatorias continuas es la distribución Normal, que también estudiaremos aquí.

4.1. Función de distribución de una variable aleatoria continua

Supongamos que tenemos un grupo muy numeroso de alumnos que han conocido la nota final de una determinada asignatura. Supongamos también que esta nota se ha determinado teniendo en consideración muchos factores, y no únicamente un examen, por ejemplo, la entrega de trabajos, la participación en clase, la realización de varios controles, etc. Todo ello hará que, si la calificación está comprendida entre 0 y 10 como suele ser habitual, la nota final de un alumno concreto pueda ser casi cualquier número real del intervalo $[0, 10]$. Si elegimos un alumno al azar y consideramos su nota, la variable aleatoria $X =$ *nota final* es un ejemplo de variable aleatoria continua. Los posibles valores que puede tomar la variable X son todos los números reales del intervalo $[0, 10]$ (al menos, teóricamente.)

Ahora bien, ¿cómo son las probabilidades asociadas a esta variable? En primer lugar, dadas las posibilidades, no parece que tenga mucho sentido preguntarse por la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya obtenido, por ejemplo, un 4'589 de nota final. Tendrá sentido más bien, preguntarse por un determinado rango de posibilidades, es decir, tendrá sentido preguntarse por la probabilidad de que un alumno haya obtenido una nota superior a 5, o entre 2 y 8, o menor que 8, etc. Esto es una característica de las variables aleatorias continuas, *las probabilidades puntuales son nulas*, es decir, $P(X = 4'589) = 0$, y lo mismo para cualquier otro valor.

Por todo lo anterior, en las variables aleatorias continuas, estaremos más interesados en cómo está *distribuida* la probabilidad a lo largo del intervalo en el que toma valores, que en las probabilidades de valores concretos, que son todas nulas. Esta distribución de la probabilidad viene determinada por lo que se denomina precisamente **función de distribución**, que se define:

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}}$$

En otras palabras, $F(x)$ es la probabilidad de que la variable X tome un valor inferior o igual a x.

Para entender mejor el significado de la función de distribución, vamos a intentar imaginar cómo es la función de distribución de la variable aleatoria del ejemplo de la nota final del examen.

En primer lugar, hay unos valores evidentes,

$$F(10) = P(X \leq 10) = 1$$

ya que, con toda seguridad la nota de cualquier alumno será menor o igual que 10. Y lo mismo ocurrirá para valores mayores que 10, es decir, también la probabilidad de que alguien saque una nota inferior a 11 será 1.

$$F(0) = P(X \leq 0) = 0$$

ya que, nadie sacará una nota inferior a 0, y teóricamente nadie obtendrá 0, por lo que comentamos antes de las probabilidades puntuales (aunque lamentablemente sabemos que algunas veces ocurre.) Lo que sí ocurre, con toda seguridad, es que $F(-1) = P(X \leq -1) = 0$, y lo mismo para cualquier otro valor negativo.

Ya sabemos entonces que la función $F(x)$ vale 0 en $x = 0$ y vale 1 en $x = 10$. Sólo falta ver qué ocurre entre 0 y 10.

Aunque no tengamos datos de la probabilidad de obtener una calificación menor o igual que 3, por ejemplo, seguro que es más probable obtener una nota menor o igual que 4, y esto a su vez menos probable que obtener una nota menor o igual que 5, etc.

En otras palabras, a medida que aumentemos las posibilidades de nota, aumentará la probabilidad. Esto hace que la función de distribución verifique

$$F(1) \leq F(2) \leq F(3) \leq F(4) \leq \text{etc.},$$

y lo mismo para cualquier otro valor. Y, como bien sabemos, esto significa que la función de distribución es *creciente*. Concluyendo, la función de distribución es creciente y crece desde el 0 al 10. Entonces, una posible gráfica sería la de la figura 12.1.

El hecho de que la función sea continua se deduce precisamente del hecho de que la variable aleatoria también sea continua. Si no lo fuese, la variable podría no tomar todos los valores del intervalo $[0, 10]$. (Aunque no lo hemos estudiado, por su escaso interés en este curso, las variables aleatorias discretas también tienen una función de distribución, que se define exactamente de la misma forma, pero en aquel caso la función de distribución no es continua).

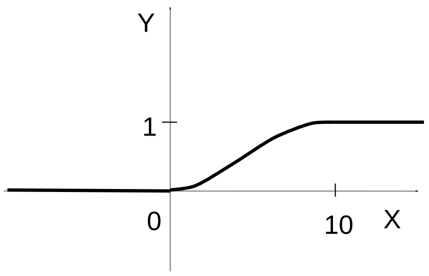


Figura 12.1: Gráfica de $F(x)$

Salvo lo del intervalo $[0, 10]$, que puede ser cualquier otro, todo lo anterior se puede aplicar a cualquier función de distribución de cualquier variable aleatoria continua:

La función de distribución $F(x)$ asociada a una variable aleatoria continua X es una función continua, creciente, no nula (ya que es una probabilidad) y su gráfica crece desde 0 a 1.

ACTIVIDADES

10. Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dibujar la gráfica y calcular las siguientes probabilidades, bien con la fórmula de la función, bien con la gráfica:
a) $P(X \leq \frac{1}{2})$,   b) $P(X > \frac{1}{4})$, (utilizar el contrario)   c) $P(X = \frac{3}{4})$.

4.2. Función de densidad de una variable aleatoria continua

En las variables aleatorias discretas utilizábamos la *función de probabilidad* para calcular las probabilidades asociadas a la variable. Para las variables aleatorias continuas disponemos de la *función de distribución*, aunque utilizaremos más a menudo el equivalente a la función de probabilidad de las discretas, que aquí se llama **función de densidad** de probabilidad.

La *función de densidad* de una variable aleatoria continua X no es más que la derivada de su función de distribución, la denotaremos por $f(x)$. Entonces,

$$\boldsymbol{f(x) = F'(x)}$$

Veamos las características y propiedades de esta nueva función:

- Dado que la función de distribución $F(x)$ es creciente, $f(x) \geq 0$, ya que la derivada de una función creciente siempre es mayor o igual que 0. Esto hace que su gráfica siempre se encuentre por encima del eje de abscisas.

- Se puede demostrar que las probabilidades asociadas a la variable X son las áreas por debajo de la gráfica de $f(x)$, de hecho se verifica que la probabilidad $P(a < X \leq b)$ es el área que hay entre el eje $0X$ y la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ (ver figura 12.2). Lo expresaremos de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{P(a < X \leq b) = \text{Área}(f(x), [a, b])}$$

(Con los conocimientos de este curso no podemos justificar esta propiedad, que es la más importante, se deriva de un importante teorema del Cálculo Integral, que será estudiado en el próximo curso, de hecho, el área que hemos mencionado antes se calcula mediante una *integral*).

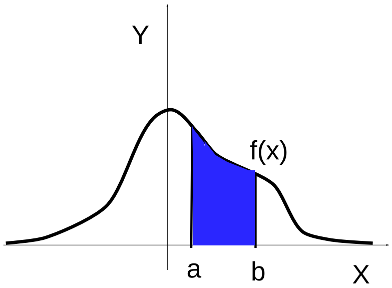


Figura 12.2: Función de densidad $f(x)$

- Admitiendo la propiedad anterior, se puede deducir otra característica de la función de densidad. Si la probabilidad es el área que hay por debajo de la curva, necesariamente

el área total por debajo de la función de densidad siempre es 1.

Por otra parte, como las probabilidades puntuales son nulas, es decir, $P(X = b) = 0$, a la hora de calcular la probabilidad $P(a < X \leq b)$ es indiferente que las desigualdades sean estrictas o no, es decir,

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

Lo único que importa es el área que hay por debajo de la gráfica, no si los extremos están o no incluidos.

Todas las ideas anteriores son ciertamente complicadas de entender en una primera lectura. Sin embargo, las vamos a revisar en un caso práctico, que es el objeto de esta sección. Se trata del estudio del ejemplo más importante de variable aleatoria continua: la distribución Normal.

4.3. Distribución Normal

La **distribución Normal** es una variable aleatoria continua que aparece asociada a multitud de fenómenos. En un tiempo se pensó que prácticamente todos los fenómenos estadísticos se podían ajustar a esta distribución, de ahí el nombre que se le puso, “normal", de hecho, si un fenómeno no la verificaba, se decía que era un fenómeno “anormal". Hoy en día sabemos que, sobre todo aquellas variables en las que intervienen multitud de factores independientes, siguen una variable, si no normal, muy parecida. Entre los ejemplos que se pueden citar se encuentran: casi todas las características naturales de los seres vivos, como su longitud o su peso; multitud de fenómenos sociales y económicos como la tasa de natalidad, la distribución de la renta; etc. Todos son casos en los que intervienen multitud de factores independientes entre sí. Por ejemplo, en la estatura de una persona influyen factores genéticos, hábitos alimenticios, etc.

Vamos a describir su función de densidad y veremos cómo se pueden calcular probabilidades relacionadas con ella.

Se dice que X es una variable aleatoria continua que sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica σ, lo que denotaremos $X \sim N(\mu, \sigma)$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

En primer lugar, hay que señalar que no es preciso en absoluto aprender la fórmula que acabamos de ver. Lo importante es conocer su gráfica, que vamos a describir ahora. En la figura 12.3 hemos representado la gráfica de la función $f(x)$ para valores dados de μ y σ.

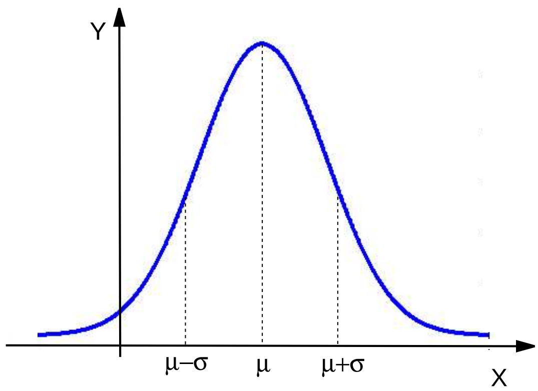


Figura 12.3: Función de densidad de la normal $N(\mu, \sigma)$

- La función cumple $f(x) \geq 0$, es decir, su gráfica siempre se encuentra por encima del eje $0X$.

- Tiene forma de campana, de hecho se le suele llamar *campana de Gauss*.

- Tiene un máximo absoluto en el punto $x = \mu$.
- Tiene dos puntos de inflexión que se encuentran en $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.
- La gráfica es simétrica con respecto de la recta vertical que pasa por su máximo.
- El eje X es asíntota horizontal de $f(x)$.
- El área por debajo de su gráfica es 1.

Según dijimos en el apartado anterior, para calcular probabilidades asociadas a una Normal, sería preciso calcular áreas sobre los intervalos correspondientes por debajo de la gráfica anterior. Sin embargo, esto no es sencillo, entre otras cosas porque la integral de la función de densidad de la Normal, que es la herramienta con la que habría que calcular el área, no se puede calcular de manera exacta. Lo único que se puede hacer es aproximarla numéricamente. Sin embargo, se puede comprobar que si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces la variable

$$\boldsymbol{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

es una Normal $N(0, 1)$, es decir, una Normal de media $\mu = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$. A la Normal $N(0, 1)$ se le llama **normal estándar** y para este caso particular los valores de las áreas, es decir, los valores de su función de distribución están tabulados, por lo que no es preciso calcularlos cada vez. El proceso mediante el cual pasamos de una Normal $X \sim N(\mu, \sigma)$ a una Normal estándar $Z \sim N(0, 1)$ se llama **tipificación de la variable**.

Resumiendo, para calcular probabilidades de una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$, primero hay que tipificar la variable, y después hay que utilizar la tabla de la Normal estándar para determinar los valores de la probabilidad. Veamos cómo se hacen las dos cosas.

Tipificación de la variable

Sea $X \sim N(3, 2)$ y supongamos que queremos calcular $P(X \leq 4)$, entonces, en la expresión $X \leq 4$ restamos la media y dividimos por la desviación típica en ambos lados de la desigualdad:

$$P(X \leq 4) = P\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{4-3}{2}\right) = P(Z \leq 0'5)$$

donde $Z \sim N(0, 1)$ que al ser la Normal estándar se podrá calcular mediante los valores de la tabla como veremos después.

Si la probabilidad a calcular fuese de la forma $P(-2 < X < 3)$, por ejemplo, tendríamos que restar la media y dividir por la desviación típica en los tres miembros de la desigualdad, de la forma siguiente:

$$P(-2 < X < 3) = P\left(\frac{-2-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{3-3}{2}\right) = P(-2'5 < Z < 0)$$

donde, nuevamente, $Z \sim N(0, 1)$.

Uso de la tabla de la Normal estándar $N(0,1)$

Supongamos entonces que la variable ya está tipificada y tenemos que calcular una probabilidad que está en términos de Z, con $Z \sim N(0,1)$. La tabla de la normal estándar, que se ha incluido en el apartado siguiente tiene tabulados con cuatro decimales los valores de las probabilidades (o áreas, según la gráfica que se adjunta con la tabla) correspondientes a $P(Z \leq k)$ para valores de k comprendidos entre 0 y 3'89. Para valores de k mayores que 3'89, la probabilidad es prácticamente 1, por lo que no es preciso que estén en la tabla. Vamos a ir viendo con ejemplos las diferentes posibilidades:

$P(Z \leq 2'65)$
El área que queremos calcular es el que se ha coloreado en la figura 12.4. Este área se puede encontrar directamente en la tabla, para ello hay que buscar el número en el que coinciden la fila 2'6 y la columna 0'05, que es 0'9960. Por tanto, $P(Z \leq 2'65) = 0'9960$.

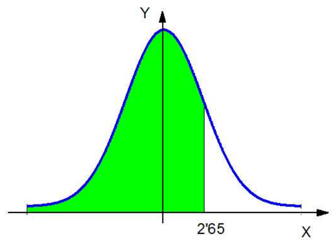


Figura 12.4: $P(Z \leq 2'65)$

$P(Z \leq -2'65)$
El área que queremos calcular es el que se ha coloreado en la figura 12.5. La tabla sólo nos ofrece valores del área a la derecha de $Z = 0$. Sin embargo, como la gráfica de la función de densidad es simétrica, el área desde $-\infty$ hasta -2'65 es igual que el área desde 2'65 hasta $+\infty$, y esta última la podemos calcular mediante el contrario:
$P(Z \leq -2'65) = P(Z > 2'65) = 1 - P(Z \leq 2'65) = 1 - 0'9960 = 0'0004$.

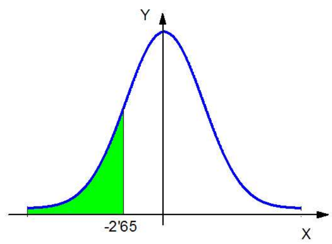


Figura 12.5: $P(Z \leq -2'65)$

(Recordemos que a la hora de calcular el área es indiferente que las desigualdades sean o no estrictas).

$P(2'21 < Z \leq 3'34)$
El área que queremos calcular ahora es el que se ha coloreado en la figura 12.6, comprendido entre 2'21 y 3'34. Para calcular este área basta con restar al área hasta 3'34, el área hasta 2'21. Es decir,
$P(2'21 < Z \leq 3'34) = P(Z \leq 3'34) - P(Z \leq 2'21) = 0'9996 - 0'9864 = 0'0132$.

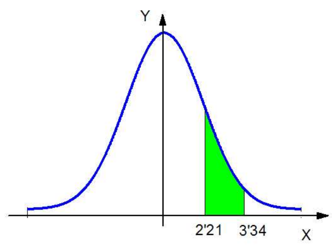


Figura 12.6: $P(2'21 < Z \leq 3'34)$

$P(-3'34 < Z \leq -2'21)$
El área que queremos calcular ahora es el que se ha coloreado en la figura 12.7, y debido a la simetría de la función de densidad, este área es exactamente igual a la de la figura 12.6, que ya hemos calculado antes. Por tanto,
$P(-3'34 < Z \leq -2'21) = P(2'21 < Z \leq 3'34) = 0'0132.$

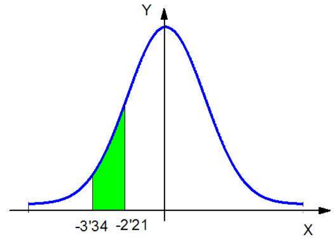


Figura 12.7: $P(-3'34 < Z \leq -2'21)$

Para acabar, veamos el caso en el que el área a calcular sea la comprendida entre un número negativo y uno positivo.

$P(-2'01 < Z \leq 3'14)$
El área que queremos calcular ahora es el que se ha coloreado en la figura 12.8. Procedemos como en los casos anteriores,
$P(-2'01 < Z \leq 3'14) = P(Z \leq 3'14) - P(Z \leq -2'01)$
$= P(Z \leq 3'14) - P(Z > 2'01) =$
$= P(Z \leq 3'14) - (1 - P(Z \leq 2'01)) = 0'9970.$

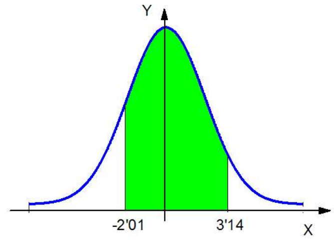


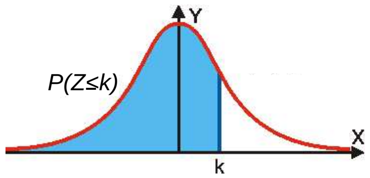
Figura 12.8: $P(-2'01 < Z \leq 3'14)$

ACTIVIDADES

11. La estatura de un grupo de personas sigue una normal $N(1'72, 0'3)$ medida en metros. Elegimos una persona al azar del grupo. Calcular la probabilidad de que:
a) su estatura sea mayor que 1'80.
b) su estatura esté comprendida entre 1'70 y 1'75.

12. Las notas finales de una asignatura en una universidad siguen una normal de media $\mu = 5'5$ y desviación típica $\sigma = 0'6$.
a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado la asignatura? ¿Qué porcentaje de alumnos aproximadamente han aprobado la asignatura?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar haya sacado una nota superior a 8?

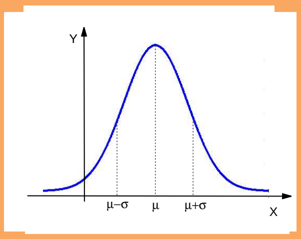
4.4. Tabla de la normal estándar $\mathbf{N(0,1)}$



k	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999

Recuerda

- ✓ Una *variable aleatoria continua* es aquella que puede tomar todos los valores de un intervalo de números reales.
- ✓ La *función de distribución* de una variable aleatoria continua es $F(x) = P(X \leq x)$. Su gráfica es no negativa, continua y crece desde el 0 al 1.
- ✓ La *función de densidad* de una variable aleatoria continua es la derivada de su función de distribución, $f(x) = F'(x)$. Sirve para calcular probabilidades asociadas a la variable, mediante el cálculo de áreas por debajo de su gráfica.
- ✓ La *distribución Normal* $N(\mu, \sigma)$ es el ejemplo más importante de variable aleatoria continua. Su función de densidad es la de la gráfica siguiente:



- ✓ El cálculo de probabilidades asociadas a la Normal se hace utilizando la tabla de la Normal estándar $N(0, 1)$, previa tipificación de la variable, mediante el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Acotada. Una función es acotada, si lo es superior e inferiormente.

Acotada inferiormente (sucesión). La sucesión a_n es *acotada inferiormente*, si $M \leq a_n$, para todo n. Se dice que M es una *cota inferior* de a_n.

Acotada superiormente (sucesión). La sucesión a_n es *acotada superiormente*, si $a_n \leq K$, para todo n. Se dice que K es una *cota superior* de a_n.

Acotada superiormente o inferiormente (función). Una función es acotada superiormente o inferiormente, si tiene alguna cota superior o inferior.

Afijo. Se llama afijo del número complejo $z = a + bi$ al punto de coordenadas (a, b) representado en el plano complejo.

Ángulo. Un ángulo es cada una de las regiones en las que dividen al plano dos semirrectas con un origen común.

Ángulo recto. Un ángulo recto es el menor de los ángulos formados por dos rectas perpendiculares.

Ángulos complementarios. Dos ángulos son complementarios si suman 90^0.

Ángulos suplementarios. Dos ángulos son suplementarios si suman 180^0.

Asíntota horizontal. Es una recta horizontal a la que tiende una función cuando alguno de los límites en el infinito es finito.

Asíntota oblicua. Es una recta de la forma $y = mx + n$ a la que tiende una función cuando $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$.

Asíntota vertical. Es una recta vertical a la que tiende una función cuando uno de los límites laterales (o los dos), en el punto en el que está la asíntota, es infinito.

Binomio de Newton. Se llama binomio de Newton a la expresión $(A+B)^n$, que se puede desarrollar utilizando los coeficientes del triángulo de Tartaglia.

Bisectriz de un ángulo. La bisectriz de un ángulo formado por dos rectas r y s es el lugar geométrico de los puntos X del plano que están a la misma distancia de la recta r que de la recta s.

Centro de gravedad. El centro de gravedad de una nube de puntos es el punto de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$.

Centro radical. El centro radical de tres circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuya potencia con respecto de cada una de las tres circunferencias es la misma. Si existe, es un punto. Punto en el que se cortan los tres ejes radicales.

Circunferencia. Una circunferencia es una sección cónica, que además es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano que equidistan de un punto fijo $O(a, b)$, que es el centro de la circunferencia. La distancia entre cada punto X y el centro O, es un número constante r, que es el radio de la circunferencia.

Circunferencia goniométrica. La circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio 1, centrada en el origen. Se utiliza como marco para referir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Coeficiente de correlación lineal. Se llama coeficiente de correlación lineal al cociente de la covarianza entre el producto de las desviaciones típicas marginales, es decir, $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x . s_y}$.

Combinación lineal. El vector $\vec{z}$ es una combinación de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, etc., si es igual a la suma de los vectores anteriores multiplicados por escalares, es decir, $\vec{z} = k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} + \ldots$

Composición de funciones. Componer dos funciones es aplicar una tras otra. La composición de la función f primero, con la función g después, se calcula $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Cóncava. Una función es cóncava si, dibujando una cuerda que una dos puntos de su gráfica de la función, los puntos de la cuerda siempre quedan por *debajo* de los puntos de la gráfica.

Conjugado. El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.

Convexa. Una función es convexa si, dibujando una cuerda que una dos puntos de su gráfica de la función, los puntos de la cuerda siempre quedan por *encima* de los puntos de la gráfica.

Continua en un punto (función). Una función f es continua en un punto $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Contrario. El suceso contrario de A es el suceso que ocurre cuando no ocurre A, y se representa $\overline{A}$.

Convergente. Una sucesión es convergente si tiene límite.

Cosecante. La cosecante de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo, $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$. También se cumple $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Coseno. El coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y su hipotenusa, $\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$.

Coseno de una suma. El coseno de una suma se calcula mediante la fórmula $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Cota inferior (superior). A es una cota superior de la función f, si para todo x de su dominio de definición, se cumple $f(x) \leq A$. B es una cota inferior de la función f, si para todo x de su dominio de definición, se cumple $f(x) \geq B$.

Cotangente. La cotangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto, $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$. También se cumple $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Covarianza. La covarianza de una variable estadística bidimensional es la media de los productos de las diferencias de las coordenadas de cada punto de la nube (x_i, y_i) y las coordenadas de $(\overline{x}, \overline{y})$, es decir, $s_{xy} = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n} = \dfrac{\sum x_i.y_i}{n} - \overline{x}.\overline{y}$.

Creciente (función). Se dice que una función es creciente, cuando al aumentar su abscisa x, aumenta su ordenada y.

Creciente (sucesión). Una sucesión a_n es creciente si cada término es menor o igual que el siguiente, es decir, si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n.

Cuadrante. Un cuadrante es cada una de las cuatro regiones en las que los ejes coordenados dividen al plano.

Decimales exactos. Son decimales exactos los números racionales que se obtienen de una división entre dos enteros en la que el último resto es 0, de forma que la cantidad de cifras decimales es finita. Por ejemplo, 5'89.

Decimales periódicos mixtos. Son decimales periódicos mixtos los números racionales cuya parte decimal está formada por una parte que no se repite y otra que sí lo hace. Por ejemplo, $2'535353535...$

Decimales periódicos puros. Son decimales periódicos puros los números racionales cuya parte decimal está formada por alguna cifra, o algún grupo de cifras, el periodo, que se repite. Por ejemplo, $4'21212121...$

Decreciente (función). Se dice que una función es decreciente, cuando al aumentar su abscisa x, disminuye su ordenada y.

Decreciente (sucesión). Una sucesión a_n es decreciente si cada término es mayor o igual que el siguiente, es decir, si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.

Densidad. La propiedad de densidad de los números racionales y los reales significa que entre dos números distintos, siempre es posible encontrar un tercero, y por tanto, infinitos.

Derivación implícita. La derivación implícita es una técnica de derivación que consiste en obtener la derivada de una función y definida implícitamente, es decir, que aparece en una expresión pero sin estar despejada.

Derivada (en un punto). La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a una función en ese punto.

Derivada (función derivada). La función derivada es una expresión que proporciona el valor de la derivada de la función f en un punto genérico x cualquiera.

Derivada lateral. Las derivadas laterales son cada uno de los dos límites laterales que aparecen al calcular la derivada en un punto.

Desviación típica (de una variable aleatoria). La desviación típica de una variable aleatoria es la raíz cuadrada de su varianza.

Desviación típica (de una variable estadística). La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza, $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}}$.

Desviaciones típicas marginales. Las desviaciones típicas marginales de una variable estadística bidimensional (X, Y) son las respectivas raíces cuadradas de las varianzas marginales.

Dirección. La dirección de un vector es la determinada por la recta sobre la cual se apoya el vector.

Discriminante. El discriminante de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es el número $\Delta = b^2 - 4ac$.

Discontinuidad en un punto. Una función tiene una discontinuidad en un punto cuando en ese punto la función no es continua.

Discontinuidad evitable. Se tiene una discontinuidad evitable en un punto cuando existe el límite de la función en el punto, pero no coincide con el valor de la función en ese punto, o éste simplemente no existe.

Discontinuidad inevitable de salto finito. Se tiene una discontinuidad inevitable de salto finito cuando existen los límites laterales, pero son distintos.

Discontinuidad inevitable de salto infinito. Se tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito cuando alguno de los límites laterales, o ambos, es infinito.

Distancia. La distancia entre los números reales a y b es el número $|b - a|$.

Distancia entre dos puntos. La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se calcula mediante la fórmula
$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Distribución binomial. Se dice que X sigue una distribución binomial y se escribe $X \sim B(n, p)$, si repitiendo un experimento aleatorio n veces, de manera que cada vez sólo hay dos posibilidades: *éxito* con probabilidad p y su contrario, *fracaso* con probabilidad $1 - p = q$; X representa el *número de éxitos de los* n.

Distribución de frecuencias. Una distribución de frecuencias es el recuento de frecuencias de cada resultado cuando se ha realizado un experimento aleatorio varias veces.

Distribución normal. La distribución normal es el ejemplo más importante de variable aleatoria continua, su función de densidad viene dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Distribución de probabilidad. Una distribución de probabilidad es un recuento de probabilidad de cada resultado posible asociado a un cierto experimento aleatorio.

Divergente. Una sucesión es divergente si no tiene límite.

Dominio de definición. El dominio de definición de una función f es el conjunto de todos los números reales x, tales que $f(x)$ existe. Se denota $\operatorname{dom}(f)$.

Ecuación. Una ecuación es una igualdad en la que aparece una letra que representa un número, que hay que calcular, llamada incógnita.

Ecuación bicuadrada. Una ecuación bicuadrada es una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Ecuación continua. La ecuación continua de la recta es $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{x-p_2}{v_2}$, donde $P(p_1, p_2)$ es un punto de la recta y $\vec{v}(v_1, v_2)$ es un vector de dirección de la recta.

Ecuación explícita. La ecuación explícita de la recta es $y = mx + n$, donde m es su pendiente y n su ordenada en el origen.

Ecuación exponencial. Una ecuación exponencial es una ecuación en la que aparecen potencias y la incógnita se encuentra en algún exponente.

Ecuación general. Se llama ecuación general o implícita de la recta a la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ que verifican todos los puntos (x, y) de la recta.

Ecuación logarítmica. Una ecuación logarítmica es una ecuación en la que la incógnita aparece en una expresión con logaritmos.

Ecuación paramétrica. La ecuación paramétrica (o ecuaciones paramétricas) de la recta es $\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases}$ donde $P(p_1, p_2)$ es un punto de la recta y $\vec{v}(v_1, v_2)$ es un vector de dirección de la recta.

Ecuación de primer grado. Una ecuación de primer grado es toda ecuación que se puede reducir a la forma $ax = b$.

Ecuación punto-pendiente. La ecuación punto-pendiente de la recta es $y - p_2 = m(x - p_1)$, donde $P(p_1, p_2)$ es un punto de la recta y m es su pendiente.

Ecuación de segundo grado. Una ecuación de segundo grado es toda ecuación que se puede reducir a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Ecuación trigonométrica. Una ecuación trigonométrica es una ecuación en la que aparecen razones trigonométricas.

Ecuación vectorial. La ecuación vectorial de la recta es $(x, y) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$, donde $P(p_1, p_2)$ es un punto de la recta y $\vec{v}(v_1, v_2)$ es un vector de dirección de la recta.

Eje radical. El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencias con respecto de las dos circunferencias. Cuando existe, es una recta perpendicular a la recta que une los dos centros de la circunferencia.

Elipse. Una elipse es una sección cónica, y además, es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es constante. Estos puntos se llaman focos de la elipse.

Entorno de un punto. Se llama *entorno* de centro el número a y radio $r > 0$ al conjunto de números reales x, tales que la distancia de x al centro del entorno a, es menor que r. Simbólicamente, $E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$.

Escalar. Un escalar es un número real. Cuando se habla de números reales y vectores, se utiliza esta denominación para distinguir a los números reales.

Estadística descriptiva. Cuando el objetivo del estudio estadístico es el análisis de los datos de los que se dispone.

Estadística inferencial. Cuando el objetivo del estudio estadístico es el de sacar conclusiones acerca de una población, mediante el estudio de una muestra de esa población.

Excentricidad. La excentricidad, de una elipse o de una hipérbola, es la razón entre c y a, es decir, $e = \frac{c}{a}$. En el caso de la elipse se verifica $0 < e < 1$, y en el caso de la hipérbola $e > 1$.

Experimento aleatorio. Un experimento aleatorio es un experimento en el que no se puede predecir su resultado, sino sólamente describir varios posibles. Por ejemplo, tirar una moneda.

Experimento determinista. Un experimento determinista es aquel en el que se puede predecir su resultado final, incluso sin realizarlo. Por ejemplo, si se deja caer un objeto desde una determinada altura, se puede predecir el tiempo que tardará en llegar al suelo y la velocidad con la que lo hará.

Expresión conjugada. La expresión conjugada de $P + Q$ es $P - Q$.

Extremos. Extremos relativos, son los máximos y mínimos relativos. Extremos absolutos, son los máximos y mínimos absolutos.

Frecuencia absoluta. Se llama frecuencia absoluta de un suceso A al número de veces que ocurre este suceso, n_A, cuando el experimento se repite n veces.

Frecuencia relativa. Se llama frecuencia relativa del suceso A al cociente entre la frecuencia absoluta y el número de veces que se repite el experimento. Es decir, $f_r(A) = \frac{n_A}{n}$.

Función. Una función f es una regla que relaciona la variable x con la variable y, de tal forma que a cada valor de x corresponde un *único* valor de y. Esta relación se expresa mediante la fórmula $y = f(x)$.

Función constante. Una función constante es la que, para cualquier valor de x, siempre toma el mismo valor constante. Por ejemplo, $y = 2$, $y = -4$, etc.

Función continua. Una función es continua cuando lo es en todos sus puntos.

Función cuadrática. Una función cuadrática es una función polinómica de grado 2, por ejemplo, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Función definida a trozos. Una función definida a trozos es una función construida a partir de trozos de otras.

Función de densidad. La función de densidad de una variable aleatoria continua X es la derivada de su función de distribución $f(x) = F'(x)$.

Función derivable (en un punto). Una función es derivable en un punto si se puede calcular su derivada en ese punto.

Función de distribución. Se llama función de distribución de una variable aleatoria a la función $F(x) = P(X \leq x)$. En el caso de las variables aleatorias continuas, esta función siempre es continua, creciente, no nula (ya que es una probabilidad) y su gráfica crece desde 0 a 1.

Función exponencial. Se llama función exponencial de base $a > 0$ a la función $f(x) = a^x$. Cuando se dice función exponencial, sin especificar la base, se entiende que la base es el número e, es decir, la función $f(x) = e^x$.

Función identidad. Se llama función identidad a la función $I(x) = x$, que verifica que, para cualquier función f, $f \circ I = I \circ f = f$.

Función impar. Una función es impar si, para todo x de su dominio, $f(-x) = -f(x)$. Su gráfica es simétrica con respecto del origen.

Función inversa. Dada una función f, su función inversa es otra función f^{-1}, tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$, donde $I(x) = x$ es la función identidad. Su gráfica es simétrica con respecto de la recta $y = x$.

Función inyectiva. Una función f es inyectiva si para cada dos puntos distintos a y b se cumple $f(a) \neq f(b)$. Geométricamente, que una función sea inyectiva significa que cualquier recta horizontal dibujada a través de la gráfica sólo puede cortarla en un único punto.

Función irracional. Una función irracional es una función cuya fórmula es una raíz de un polinomio. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{3x^3 - 4}$.

Función logarítmica. La función logarítmica, $y = \log_a(x)$, es la función inversa de la función exponencial, $y = a^x$. Cuando la base es el número e se escribe $y = \ln(x)$.

Función par. Una función es par si para todo x de su dominio, $f(-x) = f(x)$. Su gráfica es simétrica con respecto del eje Y.

Función periódica. Una función es periódica de periodo T si $f(x) = f(x+T)$ para todo x.

Función polinómica. Una función polinómica es aquella cuya fórmula es un polinomio. Por ejemplo, $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x + 1$.

Función de probabilidad. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X es la que asigna a cada valor x_i de la variable su probabilidad correspondiente p_i, es decir, $P(X = x_i) = p_i$.

Función de proporcionalidad inversa. La función de proporcionalidad inversa es la función de la forma $f(x) = \frac{k}{x}$, donde k es una constante distinta de cero.

Función racional. Una función racional es la que es un cociente de dos polinomios. Por ejemplo, $f(x) = \frac{3x+1}{2x-7}$.

Función trigonométrica. Las funciones trigonométricas son las que se definen a partir de las razones trigonométricas.

Función valor absoluto. La función valor absoluto es la que asigna a cada número real x su valor absoluto $|x|$.

Gráfica de una función. La gráfica de una función f es el conjunto de puntos (x, y) tales que $y = f(x)$.

Hipérbola. Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano tales que la diferencia (en valor absoluto) de sus distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, es constante. Estos puntos se llaman focos de la hipérbola.

Imagen. La imagen del punto $x = a$ mediante la función f es el valor $f(a)$. La imagen de la función f es el conjunto de todas las imágenes $f(x)$ cuando x recorre el dominio de definición de la función. Se denota, $\text{im}\,(f)$.

Imaginario puro. Un número complejo z es imaginario puro si es de la forma $z = bi$, es decir, $\text{Re}(z) = 0$.

Indeterminación. Una indeterminación es una operación que puede aparecer entre límites, que puede dar lugar a diferentes resultados.

Índice de la raíz. El índice de una raíz es un número natural n del radical $\sqrt[n]{a}$.

Inecuación. Una inecuación es una desigualdad en la que aparece alguna letra, que representa un número, llamada incógnita, que queremos calcular.

Intersección. Se llama intersección de dos sucesos A y B, y se representa por $A \cap B$, al suceso que ocurre cuando ocurren A y B simultáneamente.

Intervalo abierto. El intervalo abierto (a, b) es el conjunto de números reales que se puede describir de la forma $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Intervalo cerrado. El intervalo cerrado $[a, b]$ es el conjunto de números reales que se puede describir de la forma $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Límite (de una función en un punto.) El límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a es L, si a medida que x se aproxima al número a, $f(x)$ se aproxima al número L. Se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Límite de una sucesión. El límite de la sucesión a_n, cuando n tiende a ∞, es el número L, si a_n está próximo a L siempre que n sea lo suficientemente grande. En cuyo caso, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Límites laterales. Los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \to a$ son los números a los que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda o por la derecha. Se llaman límite por la izquierda y límite por la derecha, respectivamente. Para que el límite de la función exista, es preciso que existan los límites laterales y sean iguales.

Linealmente dependientes. Dos vectores son linealmente dependientes cuando uno de ellos se puede escribir como combinación lineal del otro, en cuyo caso son paralelos.

Linealmente independientes. Dos vectores son linealmente independientes cuando no son linealmente dependientes, es decir, ninguno de ellos se puede escribir como combinación lineal del otro, en cuyo caso no son paralelos.

Logaritmo. Un logaritmo es la operación inversa de una potencia, $a^p = b \Leftrightarrow \log_a b = p$ donde $a > 0$.

Logaritmo decimal. Un logaritmo decimal es un logaritmo en base 10.

Logaritmo neperiano. Un logaritmo neperiano es un logaritmo en base el número e.

Lugar geométrico. Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que tienen una propiedad común.

Máximo absoluto. Una función f alcanza en x_0 un máximo absoluto si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x del dominio de definición de la función.

Máximo relativo. Una función f alcanza en x_0 un máximo relativo si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x cerca de x_0.

Media. Se llama media o media aritmética de un conjunto de datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a la suma de todos ellos dividida entre el número total de datos n, es decir,
$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{\sum x_i}{n}$.

Media de una variable discreta. La media, esperanza matemática o valor esperado de una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $P(X = x_i) = p_i$ es el número $\mu = \sum x_i . p_i$.

Mediana. La mediana es el dato que ocupa el lugar central. Si el número de datos es par, entonces se toma como mediana la media aritmética de los dos datos centrales.

Medias marginales. Las medias marginales de una variable estadística bidimensional (X, Y) son las medias de cada una de las dos variables calculadas por separado, es decir, $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$, $\overline{y} = \dfrac{\sum y_i}{n}$.

Mediatriz de un segmento. La mediatriz de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos X del plano que se encuentran a la misma distancia de A que de B.

Método de Gauss. El método de Gauss sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales, es una generalización del método de reducción que transforma el sistema inicial en un sistema triangular, que es más sencillo de resolver que el sistema inicial.

Método de reducción. El método de reducción sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales, consiste en la eliminación (reducción) de una de las incógnitas sumando las ecuaciones, multiplicadas si fuera necesario por alguna constante.

Método de sustitución. El método de sustitución sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales, consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.

Mínimo absoluto. Una función f alcanza en x_0 un mínimo absoluto si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x del dominio de definición de la función.

Mínimo relativo. Una función f alcanza en x_0 un mínimo relativo si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x cerca de x_0.

Moda. La moda es el dato que aparece mayor número de veces.

Módulo. El módulo de un número complejo $z = a + bi$ es el número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Módulo (de un vector.) El módulo de un vector es la longitud del segmento que lo define. Si tiene coordenadas $\vec{v}(v_1, v_2)$, se calcula mediante la fórmula $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Monótona. Una función es monótona cuando es creciente o decreciente en todo su dominio. Se dice, en cada caso, que la función es *monótona creciente* o *monótona decreciente.*

Muestra. Subconjunto de datos estadísticos que se extrae de una población, por ejemplo, mediante una encuesta.

Normal estándar. La normal estándar es la normal de media 0 y desviación típica 1, se denota $N(0, 1)$ y sus valores están tabulados.

Nube de puntos. Una nube de puntos o diagrama de dispersión es la representación gráfica de los datos de una variable estadística bidimensional (X, Y). Se trata de representar los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, como puntos en un sistema de ejes coordenados.

Número e. El número e es el límite $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, su valor aproximado es $e = 2'718281828459\ldots$

Números complejos. El conjunto de los números complejos está constituido por todos los números de la forma $a + bi$, donde a y b

son números reales, se denota $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Números enteros. Los números enteros son los números naturales, junto con el 0 y los negativos. El conjunto de los números enteros se denota $\mathbb{Z}$ y sus elementos son
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$.

Números irracionales. Los números irracionales son los que no son racionales, esto es, no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros.

Números naturales. Los números naturales se representan mediante el símbolo $\mathbb{N}$, son los que se utilizan para contar,
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Números racionales. Los números racionales son todos los números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son ambos enteros, y además q es distinto de 0. Simbólicamente, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\right\}$.

Números reales. Los números reales son el conjunto formado por los números racionales y los irracionales, es decir, al conjunto de todos los números decimales posibles, se representa $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irracionales}\}$.

Ordenada en el origen. La ordenada en el origen de una recta es la altura en la que la recta corta al eje de ordenadas, al eje Y.

Parámetro. Se llama parámetro a la variable t que aparece en las formas vectorial y paramétrica de las ecuaciones de la recta. Cada valor de t determina un punto de la recta. Un parámetro en general, es una variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno mediante un valor numérico.

Parábola. Una parábola es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ del plano que equidistan de una recta r, llamada directriz, y un punto F, que es el foco de la parábola.

Parte imaginaria. Dado un número complejo $z = a + bi$, se llama parte imaginaria al número b y se escribe $\text{Im}(z) = b$.

Parte real. Dado un número complejo $z = a + bi$, se llama parte real al número a y se escribe $\text{Re}(z) = a$.

Pendiente. La pendiente de la recta es un número que mide la inclinación de la recta. Se puede calcular a partir de las coordenadas de un vector de dirección, si $\vec{v}(v_1, v_2)$ es un vector de dirección, su pendiente es $m = \frac{v_2}{v_2}$, también se cumple $m = \operatorname{tg} \alpha$, donde α es el ángulo que forma la recta con la horizontal, medido en sentido positivo.

Período. El periodo T de una función periódica es la longitud del intervalo a partir del cual la función vuelve a repetir todos sus valores.

Plano complejo. Plano en el que se representan los números complejos, el eje horizontal es el eje real, donde se representa la parte real del número; y el eje vertical es el eje imaginario, donde representamos la parte imaginaria del número complejo.

Población. Conjunto de individuos del que se hace un estudio estadístico.

Potencia. Se llama potencia de un punto P con respecto de una circunferencia $\mathcal{C}$ al número $\text{Pot}_{\mathcal{C}}(P) = d^2 - r^2$; donde d es la distancia del punto P al centro de la circunferencia, y r es el radio de la circunferencia.

Probabilidad. La probabilidad de un suceso A es el límite de su frecuencia relativa, cuando el número de veces que se repite el experimento tiende a infinito. También se puede definir como cualquier función P que hace corresponder un número real a cada suceso y que verifica las propiedades

- $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso A.
- $P(E) = 1$, es decir, la probablidad del suceso seguro es 1.
- Si A y B son dos sucesos incompatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Probabilidad condicionada. La probabilidad de B condicionada a A es $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, si $P(A) \neq 0$.

Producto escalar. El producto escalar entre dos vectores viene dado por la expresión

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, donde α es el ángulo que forman los dos vectores.

Progresión aritmética. Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir del anterior, sumándole una cantidad fija que llamamos diferencia.

Progresión geométrica. Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir del anterior, multiplicándolo por una cantidad fija que llamamos *razón*.

Punto anguloso. Un punto anguloso es un punto en el que no existe derivada aun siendo la función continua.

Punto crítico (punto singular). Es un punto en el que la derivada de la función es nula o no existe.

Punto de inflexión. Punto de la gráfica de una función en el que hay un cambio de curvatura, de cóncava a convexa, o de convexa a cóncava.

Radián. Un radián es la medida de un ángulo central en una circunferencia, de tal forma que el arco que abarca el ángulo tenga la misma longitud que el radio de la circunferencia.

Radicando. El radicando de un radical $\sqrt[n]{a}$ es el número real a. Si n es par, sólo puede ser un número positivo. Si n el impar, a puede ser cualquier número real.

Raíces. Las raíces de una ecuación son las soluciones de la ecuación.

Razones trigonométricas. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo, en un triángulo rectángulo son las proporciones entre los lados del triángulo. Se llaman seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente. Estas razones se pueden extender también a un ángulo cualquiera.

Recta normal. La recta normal a una función en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente, su ecuación es $y - f(a) = \dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$.

Recta real. La recta real es la recta en la que se representan los números reales. Se supone que cada número es un punto en la recta.

Recta tangente. La recta tangente a la gráfica de la función f en $x = a$, es la recta de ecuación $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

Rectas de regresión. Se llama recta de regresión en general, a la recta que mejor se aproxima a una nube de puntos. Hay dos, la *recta de regresión de Y sobre X* $y - \overline{y} = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})$; y la *recta de regresión de X sobre Y* $x - \overline{x} = \dfrac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \overline{y})$.

Redondeo. Redondear un número decimal es utilizar una aproximación hasta una determinada cifra decimal, esta cifra se elige dependiendo del valor de la siguiente. Por ejemplo, para redondear a la segunda cifra decimal, se mira a la tercera; si ésta es mayor o igual que 5, se aumenta una unidad la segunda, si es menor que 5, se deja como está.

Reducción al absurdo. Una demostración por reducción al absurdo consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere probar, hasta llegar a alguna afirmación que sepamos que es falsa, con lo cual, nuestra suposición inicial también ha de ser falsa.

Regla de Laplace. La regla de Laplace sirve para calcular de una manera práctica la probabilidad de un suceso de un espacio muestral cuyos sucesos elementales sean equiprobables (tengan la misma probabilidad). Si E es un espacio muestral compuesto por sucesos simples igualmente probables, entonces, para cualquier suceso A,
$P(A) = \dfrac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$.

Regla de la cadena. La regla de la cadena es una regla que sirve para derivar composiciones de funciones. Si $y = f(g(x))$, entonces $y' = f'(g(x)).g'(x)$.

Regla del paralelogramo. La regla del paralelogramo es un procedimiento geométrico para sumar dos vectores. Consiste en hacerlos coincidir en sus orígenes y dibujar la diagonal del paralelogramo formado por los dos vectores comenzando en el mismo punto en el que se han unido los vectores (ver la figura 7 de la unidad 5).

Regla de Ruffini. La regla de Ruffini es un procedimiento que sirve para dividir un polinomio entre otro de la forma $(x - a)$.

Relación fundamental de la trigonometría. Se llama relación fundamental de la trigonometría a la identidad $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Resolver. Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita.

Secante. Una secante es una recta que corta a la gráfica de una función en dos puntos.

Secante (trigonométrica). La secante de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo, $\sec \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$. También se cumple $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$.

Seno. El seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y su hipotenusa, $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$.

Seno de una suma. El seno de una suma se calcula mediante la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$.

Sentido. El sentido de un vector es el indicado por la flecha. Cada dirección tiene dos sentidos.

Sistema de ecuaciones lineales. Un sistema de ecuaciones lineales es un grupo de ecuaciones de primer grado, con un grupo de incógnitas que deben verificarse simultáneamente.

Sistema sexagesimal. El sistema sexagesimal es un sistema de medida de ángulos en el que un ángulo recto mide 90 grados (90^0), un grado mide 60 minutos $(60')$ y un minuto mide 60 segundos $(60''.)$

Sucesión de números reales. Una sucesión de números reales es un conjunto de infinitos números reales ordenados.

Suceso. Un suceso es un posible resultado (observable) de un experimento aleatorio. Los sucesos se representan con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$

Suceso compuesto. Un suceso compuesto es el que se puede descomponer en otros sucesos.

Suceso elemental. Un suceso elemental es aquel que no puede descomponerse en otros sucesos.

Suceso imposible. El suceso imposible es el que nunca se verifica, se representa mediante el símbolo $\emptyset$.

Suceso seguro. El suceso seguro es el que se verifica siempre, está constituido por todos los elementos del espacio muestral E.

Sucesos incompatibles. Dos sucesos A y B son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Sucesos independientes. Dos sucesos A y B son independientes si $P(B/A) = P(B)$ o bien $P(A/B) = P(A)$. Si dos sucesos son independientes, también se verifica $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Superficie cónica. Una superficie cónica (de revolución) es la que se genera haciendo girar en el espacio, una recta (generatriz) oblicua a otra que es el eje de revolución. (Las dos rectas deben cortarse en un punto.)

Tabla de valores. Una tabla de valores de una función es un conjunto de pares (x, y), donde cada y lo obtenemos sustituyendo un valor x del dominio en la función.

Tangente. La tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$. También se cumple $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$.

Tasa de Variación Media. La Tasa de Variación Media de una función f en un intervalo $[a, b]$ es el número $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Teorema del coseno. El teorema del coseno afirma que en un triángulo cualquiera de ángulos A, B y C, con lados opuestos a, b y c, se verifica $a^2 = b^2+c^2-2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos A$, y también las dos fórmulas: $b^2 = a^2+c^2-2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot}\cos B$ y $c^2 = a^2+b^2-2{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}\cos C$.

Teorema de Pitágoras. El teorema de Pitágoras afirma que, en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Teorema del Resto. El teorema del Resto afirma que el valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$, es decir, $P(a)$ coincide con el resto de dividir $P(x)$ entre $(x-a)$.

Teorema de los senos. El teorema de los senos afirma que en un triángulo cualquiera de ángulos A, B y C, con lados opuestos a, b y c, se verifica $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$

Término. Se llama término a cada uno de los números que componen una sucesión, y se denotan $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$.

Término general. El término general de una sucesión es la fórmula que nos permite calcular un término cualquiera de la sucesión, se denota a_n.

Tipificación de la variable. Si X sigue una variable $N(\mu,\sigma)$, entonces la variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sigue una normal estándar $N(0,1)$. Se llama tipificación de la variable al paso de X a Z.

Triángulos semejantes. Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales. Cuando dos triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales.

Unidad imaginaria. Se llama unidad imaginaria al número $i = \sqrt{-1}$ que verifica $i^2 = 1$.

Unión. Se llama unión de dos sucesos A y B, y se representa por $A \cup B$, al suceso que ocurre cuando ocurre A, ocurre B o ambos.

Valor absoluto. El valor absoluto del número x es $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Variable aleatoria. Una variable aleatoria es una ley o función que toma valores asociados a los resultados de un experimento aleatorio.

Variable aleatoria continua. Una variable aleatoria es continua cuando puede tomar valores en un cierto intervalo de números reales.

Variable aleatoria discreta. Una variable aleatoria es discreta cuando sólo puede tomar un cierto número de valores, o bien cuando, aunque esos valores sean infinitos, entre cada dos, no se puede encontrar un tercero.

Variable estadística bidimensional. Una variable estadística bidimensional es un par de características numéricas (X,Y) de un cierto conjunto de individuos. Por ejemplo, el peso y la estatura de un grupo de personas.

Variable estadística unidimensional. Una variable estadística unidimensional es una característica numérica de un cierto conjunto de individuos, por ejemplo, el peso de un grupo de personas. Es unidimensional porque sólo pensamos en una característica.

Varianza (de una variable aleatoria.) La varianza de una variable aleatoria discreta X con función de probabilidad $P(X = x_i) = p_i$ es el número $\sigma^2 = \sum x_i^2.p_i - \mu^2$.

Varianza (de una variable estadística.) La varianza es la media de los cuadrados de las diferencias de cada dato y la media. Se calcula con la fórmula $s^2 = \dfrac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}$, aunque para calcularla se suele utilizar la fórmula equivalente $s^2 = \dfrac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}$.

Varianzas marginales. Las varianzas marginales de una variable estadística bidimensional (X,Y) son las varianzas de cada una de las variables calculadas por separado, es decir,

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2;\ s_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \overline{y}^2.$$

Vector de dirección. Un vector de dirección de una recta es cualquier vector que tenga la dirección de la recta. Se puede calcular a partir de dos puntos cualesquiera de la recta.

Vector (libre.) Un vector libre es un segmento orientado caracterizado únicamente por su módulo, dirección y sentido.

Vector normal. El vector normal a una recta de ecuación $ax+by+c=0$ es $\vec{n}(a,b)$, que es perpendicular a la recta.

Vector nulo. El vector nulo es el vector de coordenadas $\vec{0}(0,0)$. Verifica, $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$.

Vector de posición. El vector de posición de un punto A es el vector que une el origen de coordenadas O, con el punto A, es decir, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$.

Velocidad instantánea. La velocidad instantánea es la derivada del espacio con respecto del tiempo.