9 Funciones

INTRODUCCIÓN

La representación gráfica de las funciones es la forma más adecuada de entender la relación entre las variables. Estas gráficas se usan en diferentes disciplinas para interpretar y deducir las leyes que rigen determinados fenómenos.

Uno de los objetivos principales de esta unidad es que los alumnos tengan clara la relación entre la representación gráfica de una función y su expresión algebraica, y que sean capaces de realizar ambas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función*: correspondencia entre variables que asocia a una de ellas, como máximo, un único valor de la otra.
- *Variable independiente*: puede tomar cualquier valor. *Variable dependiente*: su valor depende del valor que tome la variable independiente.
- *Dominio*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. *Recorrido*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
- *Función discontinua*: presenta uno o varios puntos en los que una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer las expresiones de una función.	• Formas de expresar la relación entre dos variables.	• Obtención de unas expresiones de una función a partir de otras.
2. Calcular el dominio y el recorrido de una función.	• Variable independiente y variable dependiente. • Dominio y recorrido de una función.	• Cálculo del dominio y el recorrido de una función.
3. Distinguir entre funciones continuas y discontinuas.	• Función continua. • Función discontinua.	• Diferenciación de ambos tipos de funciones.
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos de una gráfica.	• Función creciente y función decreciente. • Máximos y mínimos.	• Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. • Determinación de los máximos y mínimos.
5. Puntos de corte con los ejes.	• Puntos de corte con el eje *Y*. • Puntos de corte con el eje *X*.	• Cálculo de los puntos de corte con ambos ejes.
6. Conocer las funciones definidas por trozos de recta.	• Funciones definidas por trozos de recta.	• Representación de una función definida a trozos.

9 OBJETIVO 1
CONOCER LAS EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

- **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema.
- **Mediante tablas:** los valores de la variable independiente y sus valores asociados para la variable dependiente se organizan en forma de tabla.
- **Mediante gráficos:** nos dan una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación en unos ejes de coordenadas.
- **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** con ella podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente, y viceversa.

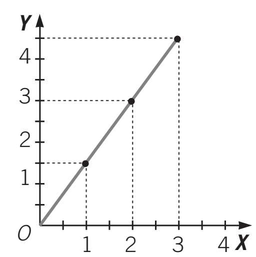
EJEMPLO

El precio de las naranjas es 1,50 €/kg. Vamos a expresarlo de las maneras que acabamos de explicar.

- **Mediante un texto:** el importe que se paga es el producto de 1,50 € por el número de kilogramos adquiridos.
- **Mediante una tabla:** el número de kilogramos es la variable independiente y el importe es la variable dependiente.

KILOGRAMOS DE NARANJAS	1	2	3	…
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	…

- **Mediante un gráfico:** representamos la situación mediante puntos en un sistema de ejes de coordenadas.



- **Mediante una fórmula:** si llamamos P al importe en euros y n al número de kilos de naranjas, la fórmula es: $P = 1,5 \cdot n$.

1 **En un aparcamiento vemos la siguiente tarifa de precios. Obtén la tabla, el gráfico y la fórmula que expresan la relación entre el tiempo (número de horas) que permanece el coche en el aparcamiento y el dinero que se abona.**

TARIFAS

1.ª hora o fracción .... 2 €

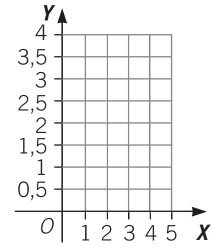
Cada hora adicional o fracción .... 1,50 €

Máximo: 10 € por 24 horas

La **gráfica** de una función es la representación del conjunto de puntos que definen esa función.

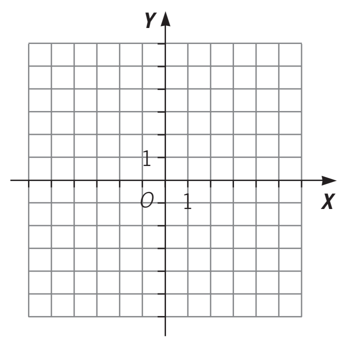
2 **La tabla expresa la relación entre los litros de leche adquiridos y su precio. Obtén la gráfica y la fórmula que representa la relación entre ambas magnitudes.**

LITROS DE LECHE	PRECIO (€)
1	0,75
2	1,50
3	2,25
4	3



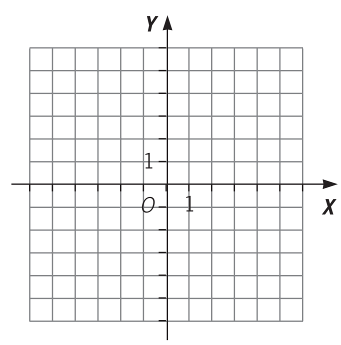
3 **Dada la función mediante la fórmula $y = 3x - 1$, obtén su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



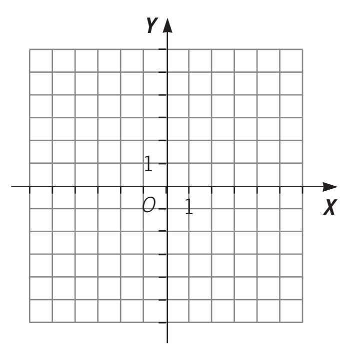
4 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^2 - 1$, halla su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



5 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^3 + 1$, determina su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



9 OBJETIVO 2
CALCULAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función** $y = f(x)$ es una relación entre dos magnitudes o variables, tal que a cada valor de la variable independiente x se le asocia, como máximo, un único valor de la variable dependiente y.

Para indicar que a cada valor de x se le asocia un único valor de y se escribe: $x \rightarrow f(x)$.

Se llama **original** al valor x, e **imagen** al valor y; o también puede ser el valor y la **imagen** y el valor x su **antiimagen**.

El conjunto de valores que puede tomar la variable x se llama **dominio** de la función, y el conjunto de valores que puede tomar la variable y se denomina **recorrido** de la función.

EJEMPLO

Halla el dominio y el recorrido de las funciones.

a) $f(x) = -5x - 2$ En este caso, la variable independiente x puede tomar cualquier valor real, y para cada uno de esos números reales se obtiene un valor real de la variable dependiente y. Así, tenemos que: Im $f = \mathbb{R}$, Dom $f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ En este caso, la variable independiente x puede tomar cualquier valor real, salvo aquel valor para el que se anula el denominador, ya que no existe la división entre cero. Por tanto, el dominio es: Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$.

El recorrido es todos los números reales, Im $f = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ En este caso, la variable independiente puede tomar cualquier valor real positivo mayor o igual que cero, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Así, el dominio es Dom $= \mathbb{R}^+$. El recorrido es el conjunto de los números reales positivos, $R = \mathbb{R}^+$.

1 **Sea la función $f(x)$ que asocia a cada número real su doble más 5 unidades.**

a) Halla su fórmula o su expresión algebraica.

b) Calcula $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Obtén la antiimagen de $\dfrac{16}{3}$.

d) Determina su dominio y su recorrido.

2 **Dada la relación que asocia a cada número real el inverso de la resta de ese número menos 3:**

a) Determina si es o no una función y, en caso de serlo, obtén su fórmula.

b) Halla $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Calcula la antiimagen de $\dfrac{1}{4}$.

d) Determina su dominio y su recorrido.

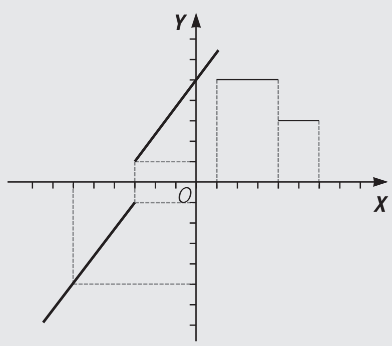
OBJETIVO 3

DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

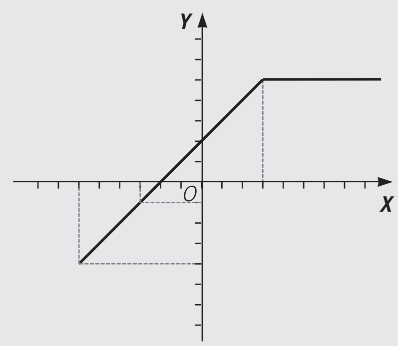
FUNCIÓN NO CONTINUA

Una función no es continua si tiene puntos en los cuales una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente. Esos puntos se denominan puntos de discontinuidad.



FUNCIÓN CONTINUA

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, no presenta puntos de discontinuidad.



1 **En una tienda de fotocopias tienen la siguiente lista de precios.**

CANTIDAD	PRECIO POR COPIA
Menos de 10	0,06 €
De 11 a 20	0,04 €
De 21 a 50	0,03 €
Más de 50	0,02 €

Represента la función que relaciona el número de fotocopias realizadas y el importe total.

¿Es una función continua?

2 **La tarifa por la bajada de bandera en un taxi es 2 € y por cada 500 metros recorridos hay que abonar 0,50 €.**

a) Construye la tabla de valores y representa la función.
b) ¿Es una función continua o discontinua?
c) Calcula el precio de un recorrido de 3 km.

OBJETIVO 4

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA GRÁFICA

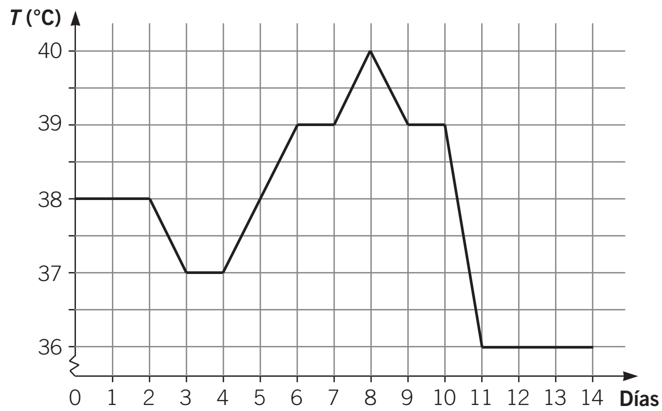
NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dados una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_1) - f(x_2) > 0$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2.
- Si $f(x_1) - f(x_2) < 0$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2.

EJEMPLO

La temperatura de un enfermo evolucionó a lo largo de 14 días según se muestra en el gráfico siguiente.



a) ¿En qué días subió la temperatura?

b) ¿En qué días permaneció constante?

c) ¿Y en qué días bajó?

d) ¿Cuál fue la temperatura máxima alcanzada? ¿En qué día la alcanzó?

e) ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada? ¿En qué día la alcanzó?

f) Si le dieron una pastilla los días en que la temperatura subió por encima de 38 ºC, ¿qué días tomó la pastilla?

a) Vemos que la temperatura subió los días 5.º, 6.º y 8.º. Los intervalos de crecimiento de la función son (4, 6) y (7, 8).

b) Permaneció constante los días 1.º, 2.º, 4.º, 7.º, 10.º, 12.º, 13.º y 14.º.

c) La temperatura descendió los días 3.º, 9.º y 11.º. Los intervalos de decrecimiento de la función son (2, 3), (8, 9) y (10, 11).

d) La temperatura máxima fue de 40 °C, y la alcanzó el día 8.º.

e) La temperatura mínima fue de 36 °C. La alcanzó el undécimo día y la mantuvo hasta el final.

f) Tomó la pastilla los días 6.º, 7.º, 8.º, 9.º, 10.º y 11.º.

1 **Representa una función definida por los siguientes valores.**

$f(x = 0) = 2$	$f(2) = 1$	$f(4) = 3$	$f(6) = 6$	$f(8) = 4$
$f(1) = 2$	$f(3) = 3$	$f(5) = 5$	$f(7) = 4$	$f(9) = 2$

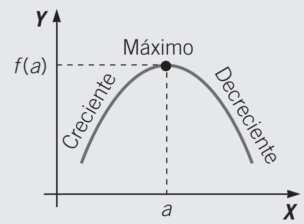
a) ¿En qué tramos la función es creciente?

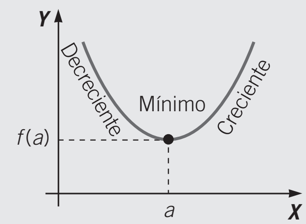
b) ¿En qué tramos es decreciente?

c) ¿Y en qué tramos es constante?

d) ¿Tiene algún punto de discontinuidad?

- Una función tiene un **máximo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función es creciente, y a la derecha, la función es decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función es decreciente, y a la derecha, la función es creciente.





2 **Dada la función $y = x^2 - 1$, construye su tabla de valores, represéntala y estudia si es continua o discontinua, su crecimiento y decrecimiento, y si tiene máximos y mínimos.**

3 **En la siguiente tabla aparecen las temperaturas medias registradas durante un año en una localidad.**

MES	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
T **(°C)**	4	9	11	16	15	22	26	25	22	14	11	7

a) Dibuja una gráfica a partir de la tabla.
b) La función representada, ¿es continua?
c) Di cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) ¿Tiene algún máximo o mínimo?

9 OBJETIVO 5
PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

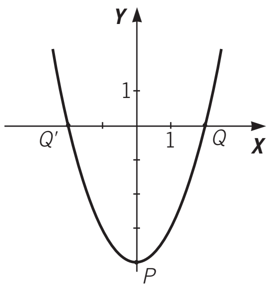
Los puntos en los que la función $y = f(x)$ corta a los ejes se calculan de esta manera.

- **Puntos de corte con el eje *Y*:** haciendo $x = 0$ se obtiene $f(0)$. Los puntos de corte son del tipo $P(0, f(0))$.
- **Puntos de corte con el eje *X*:** haciendo $f(x) = 0$ se obtiene el valor o los valores correspondientes de x. Los puntos de corte son del tipo $Q(x, 0)$.

EJEMPLO

La función $f(x) = x^2 - 4$ tiene estos puntos de corte.

- Con el eje *Y*, si $x = 0 \rightarrow y = 0 - 4 = -4$.
  Tiene un único punto de corte con el eje *Y*: $P(0, -4)$.
- Con el eje *X*, si $y = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$.
  Tiene dos puntos de corte con el eje *X*: $Q(2, 0)$ y $Q'(-2, 0)$.



1 **Dadas las siguientes funciones, resuelve.**

1.° Construye su tabla de valores y dibuja la función.
2.° Determina su dominio y su recorrido.
3.° Di cuáles son sus intervalos de crecimiento o decrecimiento, y si tienen algún máximo o mínimo.
4.° Halla los puntos de corte con los ejes, si los hubiera.

a) $f(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{-x + 6}{3}$

CONOCER LAS FUNCIONES DEFINIDAS POR TROZOS DE RECTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

EJEMPLO

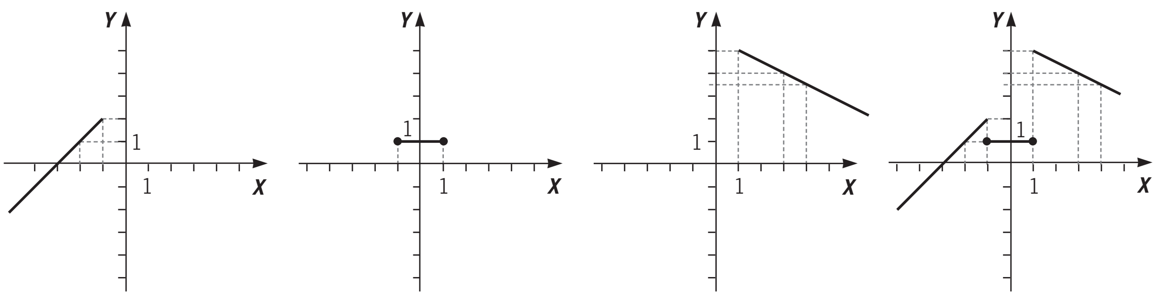
Consideramos la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Esta función tiene tres trozos rectos que determinan el dominio formado por los números reales.
Para cada intervalo construimos su tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	−4	−3	−2
f(x)	−1	0	1

x	−1	0	1
f(x)	1	1	1

x	2	3	4
f(x)	9/2	4	7/2



Señalamos con un punto (•) para indicar que el punto está incluido en dicho trozo de recta.

La función $f(x)$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, es creciente en el primer trozo y decreciente en el tercero.

1 **Representa la función.**

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -4 \\ -\dfrac{1}{2}x - 3 & \text{si } -4 \le x < 0 \\ \dfrac{2}{5}x - 3 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{si } 2 \le x < 4 \\ -5 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

2 **Representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \leq 0 \\ x - 7 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 7x & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ 7x - 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$