4 Ecuaciones e inecuaciones

INTRODUCCIÓN

Comenzamos esta unidad diferenciando entre identidades y ecuaciones, y definiendo los conceptos asociados a cualquier ecuación: miembros, términos, coeficientes, grado, solución..., que son necesarios para desarrollar y trabajar el resto de la unidad.

Para resolver ecuaciones de primer grado aprendemos a transponer términos, resolviendo ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.

Para resolver ecuaciones de segundo grado, los alumnos han de aprender a identificarlas y distinguir entre las ecuaciones completas e incompletas, ya que las ecuaciones incompletas son más fáciles de resolver, sin necesidad de aplicar la fórmula general.

Es importante que los alumnos asimilen el método general de resolución de problemas mediante ecuaciones, aplicando todas las fases y respetando la fase de la comprobación de la solución, que los alumnos suelen obviar, para comprobar que el resultado obtenido es coherente.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *ecuación* es una igualdad algebraica que solo es cierta para algunos valores.
- La *incógnita* de una ecuación es la letra de valor desconocido.
- El *grado* de una ecuación es el mayor exponente al que está elevada la incógnita.
- La *solución* o las *soluciones* de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que se cumpla la igualdad.
- Para *resolver ecuaciones* se transponen términos y se tienen en cuenta las reglas de la suma y del producto.
- Una *ecuación de primer grado* es una expresión del tipo: $ax = b$. Su solución es $x = \frac{b}{a}$.
- Una *ecuación de segundo grado* es una expresión del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Sus soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Ecuaciones. Grado de una ecuación. Soluciones.	• La ecuación como igualdad. • Elementos de una ecuación: incógnitas, coeficientes, miembros, términos y grado.	• Identificación del grado de una ecuación. • Cálculo por tanteo de la solución de una ecuación.
2. Resolver ecuaciones de primer grado. Transposición de términos.	• Transposición de términos. • Resolución de ecuaciones.	• Resolución de ecuaciones de primer grado por transposición de términos.
3. Resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.	• Eliminación de paréntesis. • Eliminación de denominadores. • Resolución de ecuaciones de primer grado	• Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. • Comprobación de la solución de una ecuación.
4. Ecuaciones de segundo grado.	• Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. • Resolución de ecuaciones de segundo grado completas.	• Identificación de una ecuación de segundo grado. • Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas y completas.
5. Resolver problemas con ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.

4 OBJETIVO 1
ECUACIONES. GRADO DE UNA ECUACIÓN. SOLUCIONES

NOMBRE: ______________ CURSO: ______ FECHA: ______

En Matemáticas, para representar cualquier enunciado o problema, lo hacemos mediante **expresiones algebraicas** u operaciones en las que aparecen letras y números.

- Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que se cumple o es cierta para cualquier valor de las letras contenidas en ambas expresiones. Por ejemplo:
  $3 - x = 6 + x^2 - (3 + x + x^2)$ es una igualdad, que se cumple para cualquier valor de x.
- Una **ecuación** es una identidad algebraica que se cumple o es cierta solo para algunos valores de las letras. Por ejemplo:
  $x^2 + x = 2$ es una ecuación, que solo se cumple cuando x vale 1 o -2.

La **incógnita** de una ecuación es la letra con valor desconocido.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente con el que aparece la incógnita en la ecuación, una vez realizadas todas las operaciones.

La parte izquierda de la igualdad se llama **primer miembro**, y la parte derecha es el **segundo miembro**.

Cada miembro está formado por uno o más sumandos que se llaman **términos**.

La **solución** o las soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que la igualdad se cumpla.

EJEMPLO

Elementos de una ecuación

$$\underbrace{5x \quad - \quad 3(x+1)}_{1.^{\text{er}}\text{ miembro}} = \underbrace{4x \qquad -1}_{2.^{\text{o}}\text{ miembro}}$$

Términos: $5x$, $3(x + 1)$, $4x$ y -1 Incógnita: x

Coeficientes: 5, -3, 4 y -1

EJEMPLO

Grado de una ecuación

a) La ecuación $3x - 5 = 0$ es una ecuación de primer grado.
b) La ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ es una ecuación de cuarto grado.

1 **Indica el grado de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^3 + 2x^2 = 13x - 10$

b) $(7 - 2x) + (5 + 3x) = 0$

c) $3(x^2 + 2) - 4(x^2 - 1) + (x^2 + x - 5) = 0$

d) $3(x^2 - 1) - 2(x + 6 - x^2) = 0$

2 **Calcula, por tanteo, las soluciones de las ecuaciones.**
(Ten en cuenta que una ecuación tendrá tantas soluciones como sea su grado.)

a) $2x - 18 = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

d) $x^2 - 9 = 0$

e) $14 = 5 - 3x$

f) $(1 + x) + (1 - 2x) = 0$

OBJETIVO 2

RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita que cumple la ecuación.

Para resolver una ecuación de primer grado, **transponemos términos**, lo que consiste en pasar a un miembro (normalmente, al izquierdo) todos los términos con x, y al otro miembro (el derecho), todos los números o términos independientes (términos sin x).

Se deberán tener en cuenta las siguientes reglas.

- **Regla de la suma:** un término que está **sumando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **restando**, y si está **restando** pasa **sumando**.
- **Regla del producto:** un término que está **multiplicando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **dividiendo**, y si está **dividiendo** pasa **multiplicando**.

EJEMPLO

Resuelve esta ecuación de primer grado por transposición: $5x - 3 = 3x + 11$

- Sumamos 3 en los dos miembros:

$$5x - 3 + 3 = 3x + 11 + 3 \rightarrow 5x = 3x + 14$$

- Para eliminar el término con x del segundo miembro, restamos $3x$ en ambos miembros:

$$5x - 3x = 3x + 14 - 3x \rightarrow 2x = 14$$

- Para despejar la incógnita x, dividimos ambos miembros de la ecuación entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2} \rightarrow x = 7$$

1 **Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones de primer grado.**

a) $7x - 1 = 9 - 3x$

d) $75 - 37x + 25 - 12x = 318 + x - 10 + 2x$

b) $5 - 3x = 1 - x + 9 - 3x$

e) $4x - 18 + x - 7 = 25 - 5x$

c) $x - 10 = 3x - 7 + 8x - 13$

f) $5x - 30 + 35 - 10x = 45x - 20 + 65 - 10x$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 OBJETIVO 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PARÉNTESIS

Para resolver una ecuación de primer grado que contiene paréntesis, en primer lugar hay que quitarlos, poniendo atención en los cambios de signo cuando haya un signo negativo delante del paréntesis.

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$

- Quitamos los paréntesis: $2 + x - 5x + 5 = 3x + 3 + x - 4$
- Reducimos términos semejantes: $-4x + 7 = 4x - 1$
- Transponemos términos: $-4x - 4x = -1 - 7 \rightarrow -8x = -8$
- Despejamos la x: $x = \dfrac{-8}{-8} = 1$
- Comprobamos la solución: $(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$
  $(2 + 1) - 5(1 - 1) = 3(1 + 1) + (1 - 4)$
  $3 - 0 = 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow 3 = 6 - 3 = 3 \rightarrow 3 = 3$

La solución es correcta, porque el resultado final de las operaciones es el mismo número en ambos miembros de la ecuación.

1 **Resuelve las ecuaciones de primer grado, comprobando la solución.**

a) $(3 - x) + 2(x - 1) = (x - 5) + 2x$

d) $7x - (5 - x) = 4 - (x + 3)$

b) $(7 - 6x) - 5(x + 2) = 3(x + 2) - 2x$

e) $2(x - 5) - 3(1 - x) = 17$

c) $2(5 - x) = 19 - 3(x + 5)$

f) $6(12x - 81) = 80x + 2$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES

Para eliminar los denominadores, hay que calcular su mínimo común múltiplo (m.c.m.) y multiplicar los dos miembros de la ecuación por dicho valor.

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $\dfrac{x-5}{3} - 2 = \dfrac{x+1}{2} + 1$

- Calculamos el m.c.m. $(2, 3) = 6$
- Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 6:

$$\frac{6(x-5)}{3} - 6 \cdot 2 = \frac{6(x+1)}{2} + 6 \cdot 1 \qquad 2(x-5) - 12 = 3(x+1) + 6$$

- Quitamos los paréntesis: $2x - 10 - 12 = 3x + 3 + 6$
- Reducimos términos semejantes: $2x - 22 = 3x + 9$
- Transponemos términos: $2x - 3x = 9 + 22 \rightarrow -x = 31 \rightarrow x = -31$
- Comprobamos la solución: $\dfrac{x-5}{3} - 2 = \dfrac{x+1}{2} + 1 \rightarrow \dfrac{-31-5}{3} - 2 = \dfrac{-31+1}{2} + 1$

$$\frac{-36}{3} - 2 = \frac{-30}{2} + 1 \rightarrow -12 - 2 = -15 + 1 \rightarrow -14 = -14$$

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones, comprobando las soluciones.**

a) $\dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{2x+1}{3}$

b) $\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x+4}{30}$

c) $\dfrac{x}{3} + 1 = \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{2x}{6}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores, y comprueba el resultado.**

a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(x-\frac{3}{2}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{5}\left(\frac{7}{2}x+1\right)$

c) $\frac{2x+1}{3}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x-1}{6}-\frac{x}{4}$

d) $\frac{3x-1}{2}+2\left(1-\frac{x}{2}\right)=3\left(\frac{x-2}{5}\right)+3$

OBJETIVO 4

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación que se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Si los coeficientes b y c son distintos de cero, la ecuación se llama **completa**; en caso contrario, es **incompleta**.

EJEMPLO

La ecuación $3x^2 - 4x + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa, ya que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, pues $a = 3$, $b = 0$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, porque $a = 3$, $b = 0$ y $c = 0$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

  Dependiendo del valor que tenga c, la ecuación tendrá una, dos o ninguna solución.

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\,(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$

EJEMPLO

- La ecuación $2x^2 - 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = -16$.

  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

  Luego tiene dos soluciones: $x_1 = \sqrt{8}$ y $x_2 = -\sqrt{8}$

  Comprobamos que son soluciones de la ecuación:

  Si $x = \sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$ Si $x = -\sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (-\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$

- La ecuación $5x^2 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 5$ y $c = 0$.

  Tiene una única solución, $x = 0$.

- La ecuación $2x^2 + 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = 16$.

  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = -16 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-8}$

  Como no existe $\sqrt{-8}$, la ecuación no tiene solución.

1 **Halla, si es posible, las soluciones de las ecuaciones y comprueba el resultado.**

a) $4x^2 - 64 = 0$

b) $4x^2 + 64 = 0$

c) $4x^2 = 0$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado completa es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Según sea el valor del discriminante se pueden dar tres casos:

- PRIMER CASO. Si $b^2 - 4ac > 0$, existirán dos soluciones: $x_1 = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ y $x_2 = -\sqrt{b^2 - 4ac}$
- SEGUNDO CASO. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una única solución, $x = \frac{-b}{2a}$.
- TERCER CASO. Si $b^2 - 4ac < 0$, la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número real y la ecuación no tiene solución.

EJEMPLO

PRIMER CASO. En la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -8$ y $c = 15$.

Como $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

– Para $x_1 = 5$: $x^2 - 8x + 15 = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$

– Para $x_2 = 3$: $x^2 - 8x + 15 = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$

SEGUNDO CASO. En la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -10$ y $c = 25$.
Como $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Comprobamos la solución: $x^2 - 10x + 25 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$

TERCER CASO. En la ecuación $x^2 + 3x + 12 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.
Como $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 9 - 48 = -39$, y no existe $\sqrt{-39}$, la ecuación no tiene solución.

2 **Resuelve las ecuaciones de segundo grado y comprueba las soluciones.**

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones.**

a) $(x - 1)(x + 6) - 4(3x - 4) = 0$

b) $x(x - 1) + 6(x + 1) = 0$

c) $(x + 5)(x - 1) - 2(x + 1) + (x + 11) = 0$

d) $(x + 3)(x - 5) + 2(x - 17) = 0$

4 OBJETIVO 5
RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1.er Y 2.º GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Recuerda los cuatro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Leer** detenidamente el enunciado.
b) **Plantear** el problema, en este caso, la ecuación.
c) **Resolver** el problema, en este caso, la ecuación.
d) **Comprobar** el resultado.

EJEMPLO

Halla un número tal que si a sus dos terceras partes se les resta 1, obtenemos 11.

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
$\frac{2}{3}$ partes del número	$\frac{2x}{3}$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1	$\frac{2x}{3}-1$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1 **es igual** a 11	$\frac{2x}{3}-1=11$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x}{3}-1=11 \rightarrow \frac{2x}{3}=12 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x=36 \rightarrow x=18$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{2\cdot 18}{3}-1=11 \rightarrow \frac{36}{3}-1=11 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12-1=11 \rightarrow 11=11$$

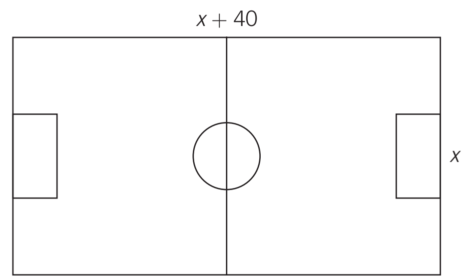
1 **Calcula tres números consecutivos cuya suma vale 24.**
(Con los números **x, x + 1** ***y*** **x + 2*****, plantea la ecuación correspondiente.)***

2 **Halla un número tal que su mitad es 5 unidades menor que su triple. A partir de la tabla, resuelve la ecuación.**

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
Su mitad	$\frac{x}{2}$
Su triple	$3x$
5 unidades menor que su triple	$3x-5$
Su mitad es 5 unidades menor que su triple	$\frac{x}{2}=3x-5$

3 **El perímetro de un campo de fútbol es 280 m, y sabemos que mide 40 m más de largo que de ancho. Halla las dimensiones (largo y ancho).**

El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados:
$P = x + (x + 40) + x + (x + 40) = 2x + 2\ (x + 40) = 280$



4 **Pepe tiene dos años más que su hermana María y tres años más que Juan. Sumando las edades de los tres, el resultado es 40. Halla la edad que tiene cada uno.**

Llamamos x = edad de Pepe, $x - 2$ = edad de María y $x - 3$ = edad de Juan

5 **El padre de los hermanos del ejercicio anterior tiene 46 años. Sabiendo que Pepe tiene 15 años, María tiene 13 años y Juan tiene 12 años, calcula cuánto tiempo ha de pasar para que la suma de las edades de los tres iguale a la edad de su padre.**

En los problemas en los que aparecen edades actuales y futuras conviene elaborar una tabla como la siguiente.

	EDAD ACTUAL	**DENTRO DE *x* AÑOS**
Pepe	15	$15 + x$
María	13	$13 + x$
Juan	12	$12 + x$
Padre	46	$46 + x$

Planteamos la ecuación:

$$15 + x + 13 + x + 12 + x = 46 + x$$

6 **La madre de Pepe, María y Juan tiene 42 años. Calcula cuántos años deben pasar para que la edad de Pepe sea la mitad que la edad de su madre.**

	EDAD ACTUAL	**DENTRO DE *x* AÑOS**
Pepe	15	$15 + x$
Madre	42	$42 + x$

Planteamos la ecuación:

$$15 + x = \frac{42 + x}{2}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 **La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Halla de qué números se trata.**

Si representamos los números por x y $x+1$, sus cuadrados serán x^2 y $(x+1)^2$.
Recuerda que el cuadrado de una suma es: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1^2$

8 **El abuelo de Pepe, María y Juan tiene una edad tal que elevada al cuadrado es igual a 160 veces la suma de las edades de sus tres nietos. Calcula la edad del abuelo.**

Tenemos en cuenta que las edades son: Pepe, 15 años; María, 13 años, y Juan, 12 años.

9 **Un campo de baloncesto tiene 1.000 m² de área. Halla sus dimensiones, sabiendo que mide 30 m más de largo que de ancho.**

Planteamos y resolvemos la ecuación de segundo grado que se obtiene al sustituir en la fórmula del área del rectángulo. Hay que tener en cuenta que la solución negativa no es válida, pues no tiene sentido una medida de longitud negativa.

10 **Si aumentamos el lado de un cuadrado en 2 m, su superficie aumenta en 16 m². Calcula lo que medía inicialmente el lado del cuadrado.**

	ANTES	DESPUÉS
Lado	x	$x+2$
Superficie	x^2	$(x+2)^2$