

TRIGONOMETRÍA

UNIDADES DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

GRADOS SEXAGESIMALES

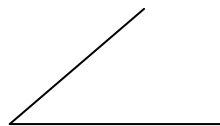
Grados, minutos y segundos : 1 grado = 60 minutos, 1 minuto = 60 segundos

GRADOS CENTESIMALES (No la utilizaremos)

Grados, minutos y segundos : 1 grado = 100 minutos, 1 minuto = 100 segundos

RADIANES

Un radian es la medida de un ángulo, cuyo radio coincide con el arco:



RELACIÓN ENTRE GRADOS SEXAGESIMALES Y RADIANES

2π radianes \Leftrightarrow 360° sexagesimales

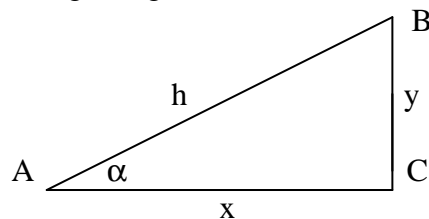
π rad \Leftrightarrow 180°

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

DEFINICIONES

Razón entre dos números o proporción entre ellos, a su cociente

Sobre un ángulo agudo α , construimos un triángulo rectángulo:



Seno de α es la razón entre la longitud del cateto opuesto a α y la longitud de la hipotenusa: $\text{sen } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{y}{h}$

Coseno de α es la razón entre la longitud del cateto contiguo a α y la longitud de la hipotenusa: $\text{cos } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{x}{h}$

Tangente de α es la razón entre la longitud del cateto opuesto a α y la longitud del cateto contiguo a α

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{y}{x}$$

Cosecante de α es la razón entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto a α :

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{h}{y}$$

Secante de α es la razón entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto contiguo a α :

$$\operatorname{sec}\alpha = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{h}{x}$$

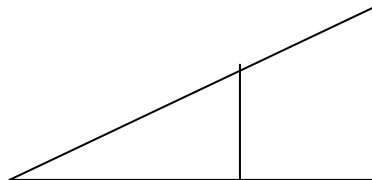
Cotangente de α es la razón entre la longitud del cateto contiguo a α y la longitud del cateto opuesto a α :

$$\operatorname{cotag}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{x}{y}$$

Estas relaciones se llaman **razones trigonométricas** del ángulo α

Nota: Como en un triángulo rectángulo los catetos siempre son menores que la hipotenusa el seno y el coseno de un ángulo toman valores entre 0 y 1.

LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEPENDEN DEL ÁNGULO PERO NO DEL TRIÁNGULO



Estos dos triángulos son semejantes, por tanto las razones trigonométricas dependen del ángulo no del triángulo.

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

- Por las definiciones:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} \quad \operatorname{cotag} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tag} \alpha} \quad \operatorname{tag} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

- Como es un triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = h^2$$

Dividiendo por x^2 , y^2 , h^2 respectivamente, obtenemos

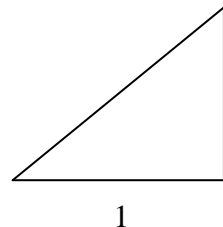
$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{h^2}{x^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2 \Rightarrow 1 + \operatorname{tag}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{h^2}{y^2} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{h}{y}\right)^2 \Rightarrow 1 + \operatorname{cotag}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} \Rightarrow \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y}{h}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°

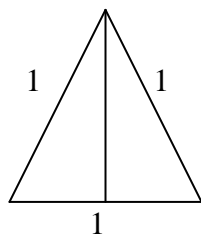
Razones trigonométricas de 45°



La hipotenusa de este triángulo rectángulo isósceles mide: $h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Por tanto: $\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{tag} 45^\circ = 1$

Razones trigonométricas de 30° y 60°



Calculamos la altura de este triángulo equilátero:

$$a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto: $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{tag} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\operatorname{tag} 60^\circ = \sqrt{3}$

UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA EN TRIGONOMETRÍA

SELECCIÓN DEL MODO DEG (GRADOS SEXAGESIMALES)

“MODE” + “4”

ANOTAR ÁNGULOS. TECLA ° ‘ ‘

La tecla ° ‘ ‘ sirve para expresar en forma decimal un ángulo dado en grados, minutos y segundos:

$$57^{\circ} 8' 24'' \Rightarrow 57^{\circ} \text{ ' ' } 8^{\circ} \text{ ' ' } 24^{\circ} \text{ ' ' } \Rightarrow 57,14 \text{ grados}$$

Precedida de la tecla “INV” hace lo contrario: pasa de grados a grados, minutos y segundos

$$57,14 \text{ grados} \Rightarrow 57,14 \text{ “INV” } \text{ ' ' } \Rightarrow 57^{\circ} 8' 24''$$

UTILIZACIÓN DE LAS TECLAS “SIN”, “COS”, “TAN”

- **Hallar la razón trigonométrica de un ángulo**

$$\text{Calcular } \sin 47^{\circ} : 47 \text{ “sin” “=”} \Rightarrow 0,731353701$$

- **Hallar un ángulo conocida una de sus razones trigonométricas**

$$\text{Si } \tan \alpha = 1,34 \text{ calcular } \alpha : 1,34 \text{ “INV” “TAN” “=”} \Rightarrow 53,26717334$$

$$\text{“INV” } \text{ ' ' } \Rightarrow 53^{\circ} 16' 2''$$

- **Hallar una razón trigonométrica conociendo otra**

$$\text{Si } \sin \alpha = 0,84 \text{ hallar } \tan \alpha : 0,84 \text{ “INV” “SIN”} \Rightarrow 57,1401962$$

$$\text{“TAN”} \Rightarrow 1,54814054$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

INTRODUCCIÓN

Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos (lados o ángulos) a partir de algunos elementos conocidos:

$$\text{Relación entre sus ángulos : } A + B + C = 180^{\circ}, A = 90^{\circ} \Rightarrow B + C = 90^{\circ}$$

$$\text{Relación entre sus lados: Teorema de Pitágoras : } x^2 + y^2 = h^2$$

Relación entre lados y ángulos: Razones trigonométricas

CONOCIDOS DOS LADOS

- El tercer lado se obtiene mediante el teorema de Pitágoras
- Uno de los ángulos agudos se halla a partir de la razón trigonométrica que lo relaciona con los dos lados conocidos.
- El otro ángulo se halla teniendo en cuenta que los dos ángulos agudos suman noventa grados.

CONOCIDOS UN LADO Y UN ÁNGULO

- El otro lado se halla mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocido
- Se aplica Pitágoras para hallar el tercer lado
- El otro ángulo se halla teniendo en cuenta que los dos ángulos agudos suman noventa grados.

ESTRATEGIA DE LA ALTURA PARA RESOLVER TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto, aplicando los métodos de resolución de triángulos rectángulos, mediante la estrategia de la altura. Consiste en elegir adecuadamente una de las alturas del triángulo de modo que, al trazarla, se obtengan dos triángulos rectángulos resolubles con los datos que se poseen.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA

CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

Trazamos una circunferencia de radio 1. Tomamos un sistema de referencia de coordenadas con el origen en el centro de la circunferencia.

Los ángulos se sitúan sobre la circunferencia del siguiente modo:

- Su vértice es el centro de la circunferencia
- Uno de los lados coincide con el semieje positivo de las X
- El otro lado se sitúa donde corresponda, abriéndose el ángulo en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

SENO Y COSENO DE UN ÁNGULO ENTRE 0° Y 360°

Si situamos un ángulo agudo, α , sobre la circunferencia goniométrica, $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$ son, respectivamente, las coordenadas x e y del punto A en el que el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia.

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUADRANTES

CUADRANTES	DIBUJO	ÁNGULO	SEN α	COS α	TAG α
1º		$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+	+	+
2º		$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	-	-
3º		$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	-	-	+
4º		$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	-	+	-

ÁNGULOS DE MEDIDAS CUALESQUIERA

Los valores comprendidos entre 0° y 360° nos permiten medir cualquier ángulo. Pero también podemos darle sentido a otras medidas. Por ejemplo, podemos interpretar 400° como una vuelta completa (360°) más un ángulo de 40° . Es decir, $400^\circ = 360^\circ + 40^\circ$. Las razones trigonométricas de 400° serán, pues, las mismas que las de 40° .

Por ello si tenemos un ángulo mayor que 360° lo dividimos entre 360° (para suprimir el número de vueltas completas) y dicho ángulo tendrá las mismas razones trigonométricas que el ángulo obtenido en el resto de dicha división.

ÁNGULOS NEGATIVOS

Si un ángulo es positivo se dibuja en sentido contrario de las agujas del reloj.
Si un ángulo es negativo se dibuja en el sentido de las agujas del reloj.

Si un ángulo es negativo y lo queremos convertir en positivo le sumamos una vuelta completa (es decir, 360°)

CALCULADORA

Para seno da un valor entre -90° y 90°

Para coseno da un valor entre 0° y 180°

Para tangente da un valor entre -90° y 90°

Habrá que tener en cuenta otro datos para ver si nos quedamos con dichos valores o hay que hacer algún cambio.

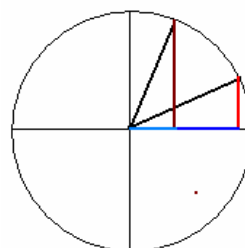
CAMBIOS DE CUADRANTE**ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS**

Dos ángulos se dice que son complementarios cuando suman 90° : Si $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\cos \beta = \cos (90 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \sin (90 - \alpha) = \cos \alpha$$

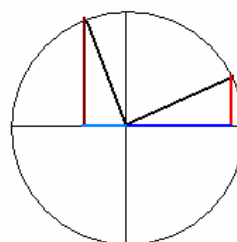
$$\text{tag } \beta = \text{tag } (90 - \alpha) = \text{ctg } \alpha$$

**ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 90° : $\beta = 90 + \alpha$**

$$\cos \beta = \cos (90 + \alpha) = - \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \sin (90 + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\text{tag } \beta = \text{tag } (90 + \alpha) = - \text{ctg } \alpha$$

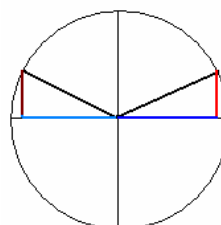
**ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS**

Dos ángulos se dice que son suplementarios si suman 180° : $\alpha + \beta = 180^\circ$

$$\cos \beta = \cos (180 - \alpha) = - \cos \alpha$$

$$\sin \beta = \sin (180 - \alpha) = \sin \alpha$$

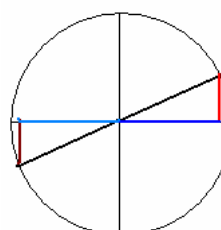
$$\text{tag } \beta = \text{tag } (180 - \alpha) = - \text{tg } \alpha$$

**ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 180° $\beta = 180 + \alpha$**

$$\cos \beta = \cos (180 + \alpha) = - \cos \alpha$$

$$\sin \beta = \sin (180 + \alpha) = - \sin \alpha$$

$$\text{tag } \beta = \text{tag } (180 + \alpha) = \text{tg } \alpha$$

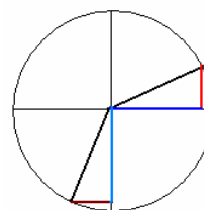


ÁNGULOS QUE SUMAN 270° $\alpha + \beta = 270^\circ$

$\cos \beta = \cos (270 - \alpha) = - \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} (270 - \alpha) = - \cos \alpha$

$\operatorname{tag} \beta = \operatorname{tag} (270 - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

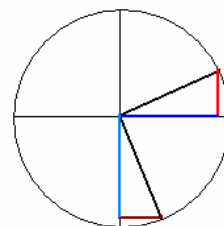


ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 270° $\beta = \alpha + 270$

$\cos \beta = \cos (270 + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} (270 + \alpha) = - \cos \alpha$

$\operatorname{tag} \beta = \operatorname{tag} (270 + \alpha) = - \operatorname{ctg} \alpha$



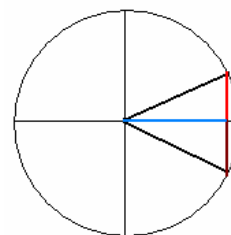
ÁNGULOS OPUESTOS

Dos ángulos son opuestos si suman 360° o 0°

$\cos (-\alpha) = \cos (360 - \alpha) = \cos \alpha$

$\operatorname{sen} (-\alpha) = \operatorname{sen} (360 - \alpha) = - \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{tag} (-\alpha) = \operatorname{tag} (360 - \alpha) = - \operatorname{tg} \alpha$

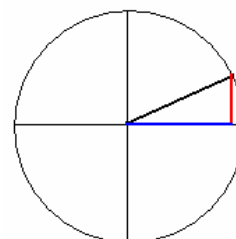


**ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN UN NÚMERO ENTERO DE VUELTAS : α
y $\alpha + 360^\circ k$. $k \in \mathbb{Z}$**

$\cos \beta = \cos (\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha$

$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} (\alpha + 360^\circ k) = \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{tag} \beta = \operatorname{tag} (\alpha + 360^\circ k) = \operatorname{tag} \alpha$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS PRINCIPALES ÁNGULOS

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\exists	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\exists	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0