1 Números enteros

INTRODUCCIÓN

Los conceptos que se estudian en esta unidad ya han sido tratados en cursos anteriores. A pesar de ello, es importante volverlos a repasar, pues los alumnos suelen cometer errores al operar con este tipo de números.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Los *números enteros* son los números naturales precedidos de los signos + y −. El mayor de dos números naturales se sitúa siempre más a la derecha en la recta numérica.
- Podemos realizar *operaciones* aritméticas con los números enteros: sumar, restar, multiplicar y dividir.
- Los *múltiplos de un número* contienen al número una cantidad exacta de veces. Los *divisores de un número* son aquellos que caben exactamente en él una serie de veces.
- Un *número primo* solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad. Los números que tienen más de dos divisores se llaman *compuestos*.
- *Descomponer* un número *en factores primos* es expresar dicho número como producto de distintos números primos elevados a exponentes.
- El *máximo común divisor* (m.c.d.) de dos números es el mayor de los divisores comunes de ambos.
- El *mínimo común múltiplo* de dos números es el menor de los múltiplos comunes de ambos.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el valor de cada una de las cifras de un número.	• Valor de cada cifra en función de la posición que ocupa. • Expresión polinómica de un número.	• Identificación de la posición que ocupa cada cifra en un número y su valor. • Desarrollo de un número en forma polinómica.
2. Representar y operar con números enteros.	• Representación de los números enteros. • Valor absoluto de un número entero. • Operaciones con números enteros.	• Localización de números enteros sobre las divisiones de una recta. • Obtención del valor absoluto de números enteros. • Operaciones con números enteros.
3. Hallar el máximo común divisor (m.c.d.) de dos números.	• Máximo común divisor (m.c.d.) de dos números.	• Obtención de los divisores de dos números y selección del mayor divisor común.
4. Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números.	• Mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números.	• Obtención de los primeros múltiplos de dos números y selección del menor múltiplo común.
5. Resolver problemas de m.c.m. y m.c.d.	• Problemas reales resolubles mediante el m.c.m. y el m.c.d.	• Resolución de problemas reales calculando el m.c.m. o el m.c.d. de varios números.

1 OBJETIVO 1
RECONOCER EL VALOR DE CADA UNA DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

En un número, el **valor** de cada cifra depende de la **posición** que ocupe.
Una cifra escrita a la izquierda de otra cifra representa unidades de un orden inmediato superior.

EJEMPLO

En el número 3.125.479,275:

3 representa las unidades de millón.
1 representa las centenas de millar.
2 representa las decenas de millar.
5 representa las unidades de millar.
4 representa las centenas.
7 representa las decenas.
9 representa las unidades.
2 representa las décimas.
7 representa las centésimas.
5 representa las milésimas.

EXPRESIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO
Un número es el resultado de sumar los valores de posición de cada una de sus cifras.

EJEMPLO

$$\mathbf{3.025.079} = 3 \cdot 10^6 + ... + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + ... + 7 \cdot 10 + 9$$
$$\mathbf{35{,}012} = 3 \cdot 10 + 5 + ... + 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

La cifra 0 no aporta valor al número, independientemente de la posición que ocupe.

1 **Identifica las cifras y escribe en forma polinómica los siguientes números.**

a) 83
8 ⟶ decenas 3 ⟶ unidades
$83 = 8 \cdot 10 + 3$

b) 511,3
5 ⟶ centenas 1 ⟶ decenas
1 ⟶ __________ 3 ⟶ décimas
$511{,}3 = 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 1 + 3 \cdot 10^{-1}$

c) 2.305,74
2 ⟶ unidades de millar 3 ⟶ centenas 0 ⟶ __________
5 ⟶ __________ 7 ⟶ __________ 4 ⟶ centésimas
$2.305{,}74 = 2 \cdot 10^3 +$ ______ $+$ ______ $+ 7 \cdot$ ______ $+ 4 \cdot 10^{-2}$

d) 3.003.303,303
3 ⟶ unidades de millón 3 ⟶ unidades de millar 3 ⟶ centenas
3 ⟶ unidades 3 ⟶ décimas 3 ⟶ milésimas
$3.003.303{,}303 = 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot$ ______ $+ 3 \cdot$ ______ $+ 3 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot$ ______

REPRESENTAR Y OPERAR CON NÚMEROS ENTEROS 1

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Representamos los números enteros positivos y negativos sobre una recta dividida en intervalos de la misma longitud.

–4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

EJEMPLO

Representa y ordena, de menor a mayor, los siguientes números enteros: 7, –1, –3, 5, 0, 1, –7 y 2.

Los representamos sobre la recta:

–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7

Su ordenación es inmediata: $-7 < -3 < -1 < 0 < 1 < 2 < 5 < 7$

1 **Representa y ordena estos números enteros: –4, –5, 4, 5, –2, 2, –7 y 7.**

2 **Indica el signo < (menor que) o > (mayor que), según corresponda en cada caso.**

a) $-5 > -7$

b) $0 \; \square \; 9$

c) $5 \; \square \; 7$

d) $-5 \; \square \; -1$

e) $-3 \; \square \; 0$

f) $4 \; \square \; 1$

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

- El valor absoluto de un entero positivo es él mismo: $|3| = 3$, $|7| = 7$
- El valor absoluto de un entero negativo es su opuesto: $|-3| = 3$, $|-15| = 15$

3 **Opera y halla el valor absoluto de los números enteros.**

a) $|3 - 5| = |-2| = 2$

b) $|3 - 7 + 2 - 5| = |\square| = \square$

c) $|(-1) \cdot (4 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$

d) $|(2 - 3) \cdot (7 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$

e) $|(-4) : (7 - 8)| = |(-4) : (\square| = |\square| = \square$

4 **Efectúa las siguientes operaciones con números enteros.**

a) $[(-2)^2 + 2^3] : (-2) = [\square + \square] : (-2) = \square : (-2) = -6$

b) $3 \cdot [1 - 4 + 2] - (-3) \cdot [5 - (7 - 3)] = 3 \cdot (\square) - (-3) \cdot [5 - \square] = \square + \square = \square$

c) $[(-2)^2 \cdot 6^2] : 3^2 = [4 \cdot 36] : 9 = \square : 9 = 16$

d) $|(-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-3 + 5)| = |(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2| = |-\square - \square| = |\square| = 7$

e) $|[(-5 + 3) \cdot 5] : (2 - 7)| = |[(-2) \cdot 5] : (-5)| = |(\square) : (-5)| = 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5 **Completa con el número que falta.**

a) $21 + \square = -33$ b) $65 - \square = -9$ c) $\square - 53 = 6$ d) $-\square - (-3) = 11$

6 **Completa con números que hagan cierta la igualdad.**

a) $-(\square + 2) = 12$ c) $-3 - (-\square + 1) = 9$

b) $3 - (5 - \square) = 7$ d) $-(-\square - 4) = 13$

7 **La suma de dos números enteros es −2 y uno de ellos es 4, ¿cuál es el otro?**

8 **Si la diferencia de dos números enteros es −3 y el minuendo es 5, ¿cuál es el sustraendo?**

9 **Si el producto de dos números enteros es −16 y uno es 8, ¿cuál es el otro?**

10 **El producto de dos números enteros es −24. ¿Qué números enteros pueden ser sus factores?**

11 **Expresa los siguientes números enteros como producto de otros números enteros.**

a) -9 c) -35 e) 55

b) 8 d) -72 f) -24

12 **Busca los números que hacen ciertas estas igualdades.**

a) $4 \cdot \square = (-2) \cdot 8$ c) $5 \cdot \square \cdot 2 = -100$

b) $-3 \cdot \square = 9 \cdot (-4)$ d) $(-4) \cdot (-8) \cdot \square = -128$

13 **¿Cuánto tiene que valer la letra *a* en cada caso?**

a) $14 : (-a) = -2$ d) $-56 : a = -8$

b) $18 : (-a) = 9$ e) $a : (-2) = 5$

c) $-25 : (-a) = 5$ f) $a : 7 = -7$

14 **Si $a = 7$ y $b = -8$, calcula el valor de:**

a) $|a|$ d) $|-b|$

b) $|b|$ e) $|a + b|$

c) $|-a|$ f) $|a - b|$

15 **Deduce los posibles valores de la letra *a*.**

a) $|a| = 7$

b) $|-a| = 2$

c) $|a + 3| = 4$

d) $|2 - a| = 5$

16 **Continúa las igualdades hasta que tengan cinco términos.**

a) $-4 = -5 + 1 = \ldots$

b) $5 = -9 + 14 = \ldots$

c) $-8 = 4 - 12 = \ldots$

17 **Encuentra los errores de estas igualdades.**

a) $(-3) + (-5) - (-8) = -3 - 5 - 8 = -8 - 8 = -(8 - 8) = 0$

b) $-9 - (-8) - (-7 - 2) = -9 + 8 + 7 - 2 = -1 + 7 - 2 = -6 - 2 = -8$

c) $5 - [-6 + 7 - (-2)] = 5 + 6 - 7 + 2 = 11 - 5 = 6$

d) $4 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = -12 - 10 = -22$

e) $4 - 5 \cdot (-2) = (-1) \cdot (-2) = 2$

f) $7 \cdot (-3 - 2) = -21 - 2 = 23$

18 **En un centro comercial hemos aparcado el coche en el 2.º sótano. Para ir a la 4.ª planta, ¿cuántos pisos tenemos que subir?**

19 **Pedro debe 30 € a Juan y 12 € a María. ¿Cuánto dinero debe en total?**

20 **Una persona que pesa 76 kg está siguiendo una dieta que le permitirá adelgazar 2 kg por semana. Si mantiene el régimen durante tres semanas, ¿cuánto pesará al cabo de ese tiempo?**

21 **Un equipo de fútbol ha subido tres puestos la última jornada y bajó uno en la anterior. Si antes estaba en la séptima posición de la tabla, ¿en qué puesto está situado ahora?**

22 **Carlos ha preparado helado de limón. Al terminarlo, este tenía una temperatura de 12 °C, y al congelarlo descendió a 18 °C bajo cero. ¿Cuál ha sido la variación de temperatura?**

1 OBJETIVO 3
HALLAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.) DE DOS NÚMEROS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El máximo común divisor de dos números es el **mayor** de sus **divisores comunes**.

EJEMPLO

Sean los números 12 y 42. Sus divisores son:

Div (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
Div (42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

Divisores comunes = {1, 2, 3, **6**}

Luego el máximo común divisor de 12 y 42 es: m.c.d. (12, 42) = 6

¿Cómo lo vamos a hallar?

Para hallar el máximo común divisor de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en sus **factores primos**.

2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** de ambos, elevados al **menor exponente**.

EJEMPLO

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \qquad \text{m.c.d. } (12, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

1 **Halla el máximo común divisor de estos números, descomponiendo en factores primos.**

a) 21 y 105

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$21 = 3 \cdot 7$ $\qquad 105 = 3 \cdot \square \cdot \square$

m.c.d. (21, 105) = $\square \cdot \square = 21$

b) 33 y 44

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ 11 & \_\_ \\ 1 & \end{array}$$

$33 = 3 \cdot \square$ $\qquad 44 = 2^2 \cdot \square$

m.c.d. (33, 44) = 11

c) 60 y 210

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{array}$$

$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$ $\qquad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.d. (60, 210) = $\square \cdot \square \cdot \square = 30$

d) 45 y 80

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$45 = 3^2 \cdot \square$ $\qquad 80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.d. (45, 80) = 5

OBJETIVO 4

HALLAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.) DE DOS NÚMEROS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El mínimo común múltiplo de dos números es el **menor** de sus **múltiplos comunes**.

EJEMPLO

Sean los números 12 y 42. Sus múltiplos son: Múltiplos de 12 = {0, 12, 24, 36, 48, 60, **84**, 96, ...}

Múltiplos de 42 = {0, 42, **84**, 126, ...}

Luego el mínimo común múltiplo de 12 y 42 es: m.c.m. (12, 42) = 84

¿Cómo lo vamos a hallar?

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en **factores primos**.

2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** y **no comunes** a ambos que estén elevados al **mayor exponente**.

EJEMPLO

12	2
6	2
3	3
1	

$12 = 2^2 \cdot 3$

42	2
21	3
7	7
1	

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

m.c.m. $(12, 42) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

1 **Halla el mínimo común múltiplo de estos números, descomponiendo en factores primos.**

a) 21 y 105

21	3
7	7
1	

105	3
35	5
7	7
1	

$21 = \square \cdot \square$ $105 = \square \cdot \square \cdot \square$

m.c.m. $(21, 105) = \square \cdot \square \cdot \square = 105$

b) 33 y 88

33	3
11	11
1	

88	2
44	__
__	__
11	__
1	

$33 = 3 \cdot \square$ $88 = 2^3 \cdot \square$

m.c.m. $(33, 88) = \square \cdot \square \cdot \square = 264$

c) 60 y 210

60	__
30	__
15	__
5	__
1	

210	__
105	__
35	__
7	__
1	

$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$ $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.m. $(60, 210) = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = 420$

d) 45 y 80

45	3
15	__
__	__
1	

80	__
__	__
__	__
__	__
5	5
1	

$45 = 3^2 \cdot \square$ $80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.m. $(45, 80) = \square \cdot \square \cdot \square = 720$

1 OBJETIVO 5
RESOLVER PROBLEMAS DE m.c.d. Y m.c.d.

1 **Alejandro tiene unas 150 fotografías de los jugadores de su equipo de fútbol. Quiere pegarlas en un álbum y puede hacerlo en grupos de 8, 9 y 12 con la misma cantidad de fotografías, y utilizando todas. ¿Cuántas fotografías tiene Alejandro?**

2 **Se quieren distribuir 264 litros de leche entera y 176 litros de leche desnatada en cajas con el mismo contenido de cada una de ellas. Calcula el contenido que debe tener cada una de las cajas, empleando toda la leche, en el mayor número de cajas posible.**

3 **Enfrente de la casa de Antonio pasa un tren con dirección Zaragoza cada 30 minutos y otro con dirección Gijón cada 18 minutos. Si ha visto cruzarse a los dos trenes a las 10:00 de la mañana, di a qué hora volverán a cruzarse.**

4 **Luis viaja a Barcelona cada 15 días y su hermana Marta lo hace cada 20 días. ¿Cuándo coincidirán de nuevo en Barcelona, sabiendo que la última vez que lo hicieron fue el 2 de octubre?**

5 **En una carretera han puesto farolas en ambos lados. En un lado están colocadas cada 12 metros y en el otro cada 18 metros. Sabiendo que las primeras farolas de cada lado están situadas una enfrente de la otra, ¿qué distancia debemos recorrer para encontrar dos farolas una frente a otra?**

2 Números racionales

INTRODUCCIÓN

Los conceptos que se estudian en esta unidad ya han sido tratados en cursos anteriores. A pesar de ello, es importante volverlos a repasar, pues los alumnos suelen cometer errores al operar con este tipo de números.

RESUMEN DE LA UNIDAD

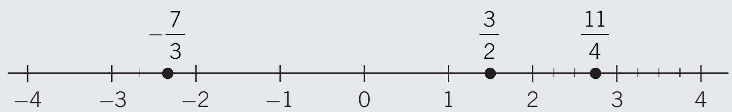
- Una *fracción* consta de numerador y denominador, separados por una raya de fracción.
- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{d}{c}$ son *equivalentes* si se cumple que $a \cdot c = b \cdot d$.
- *Fracción irreducible* es aquella fracción que no se puede simplificar más.
- Un número *a*, llamado *base*, elevado a un *exponente n* es igual al resultado de multiplicar *a* por sí mismo *n* veces: a^n.
- Un número en *notación científica* es un número entero o decimal, con una sola cifra entera (del 1 al 9), multiplicado por una potencia de base 10.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Representar y operar con números racionales.	• Representación de los números racionales. • Operaciones con números racionales.	• Localización de números fraccionarios entre números enteros (divisiones de una recta). • Operaciones con fracciones.
2. Expresar un número decimal en forma de fracción.	• Transformación de un número decimal en una fracción.	• Transformaciones de números decimales en fracciones.
3. Operar con potencias: multiplicación, división y potencia de una potencia.	• Potencias: base y exponente. • Multiplicación de potencias de la misma base. • División de potencias de la misma base. • Potencia de una potencia. • Potencias de exponente negativo.	• Expresión del producto de varios factores iguales como potencia. • Producto y división de potencias de la misma base. • Potencia de una potencia. • Utilización de las reglas de las operaciones combinadas con potencias. • Operaciones con potencias de exponente negativo.
4. Expresar un número en notación científica.	• Notación científica.	• Transformación de un número en forma decimal a notación científica.
5. Realizar operaciones en notación científica.	• Sumas y restas de números con iguales o diferentes exponentes en la potencia de 10. • Productos y cocientes de números con iguales o diferentes exponentes en la potencia de 10.	• Sumas y restas de números, sacando como factor común 10 elevado al exponente común, o elevado al menor de los exponentes no comunes. • Multiplicaciones y divisiones de números, sumando o restando los exponentes de 10.

2 OBJETIVO 1
REPRESENTAR Y OPERAR CON NÚMEROS RACIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Representamos los números racionales sobre una recta, en la que los números fraccionarios están comprendidos entre los números enteros.



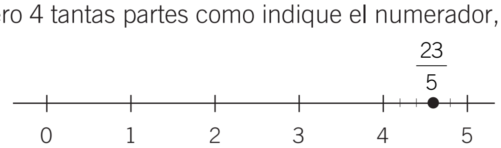
Para ver cómo se representa un número fraccionario mostramos un ejemplo. Así, para representar el número $\frac{138}{30}$ seguimos estos pasos.

1.º Simplificamos la fracción hasta obtener su fracción irreducible: $\frac{138}{30} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5}$

2.º Calculamos la parte entera y la parte decimal: $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$

3.º Tomamos sobre la recta el intervalo formado por los dos números enteros entre los que está comprendido el número, en este caso [4, 5], y lo dividimos en un número de partes igual que el denominador de la fracción, en este caso, en 5 partes.

Marcamos desde el número 4 tantas partes como indique el numerador, en este caso 3:



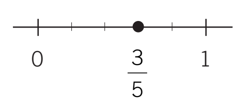
1 **Representa los siguientes números fraccionarios.**

a) $\frac{540}{900}$

1.º Simplificamos: $\frac{540}{900} = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{3}{5}$

2.º Calculamos: $\frac{3}{5} = 0 + \frac{\ }{\ }$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, 1].
Lo dividimos en 5 partes iguales.
Marcamos 3 partes e indicamos la posición.

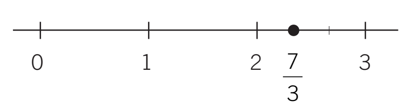


b) $\frac{420}{180}$

1.º Simplificamos: $\frac{420}{180} = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{\ }{\ } = \frac{7}{3}$

2.º Calculamos: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{\ }{\ }$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [2, 3].
Lo dividimos en 3 partes iguales.
Marcamos 1 parte e indicamos la posición.

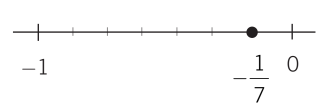


c) $-\frac{210}{1.470}$

1.º Simplificamos: $-\frac{210}{1.470} = -\frac{\ }{\ } = -\frac{\ }{\ } = -\frac{\ }{\ } = -\frac{1}{7}$

2.º Calculamos: $-\frac{1}{7} = 0 - \frac{1}{7}$

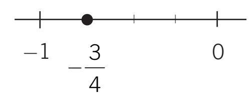
3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, –1],
y representamos la fracción.



d) $-\dfrac{450}{600}$ 1.º Simplificamos: $-\dfrac{450}{600} = -\dfrac{\;}{\;} = -\dfrac{\;}{\;} = -\dfrac{\;}{\;} = -\dfrac{3}{4}$

2.º Calculamos: $-\dfrac{3}{4} = 0 - \dfrac{3}{4}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, −1] y representamos la fracción.



SUMA (O RESTA) DE NÚMEROS RACIONALES

Para sumar (o restar) fracciones con **distinto** denominador, las reducimos a **común** denominador y luego sumamos sus numeradores.

EJEMPLO

Efectúa: $\mathbf{\dfrac{3}{5} - 2 + \dfrac{17}{3}}$

Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores: m.c.m. (3, 5) = 15

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15} \qquad 2 = \frac{2 \cdot 15}{15} = \frac{30}{15} \qquad \frac{17}{3} = \frac{17 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{85}{15}$$

$$\frac{3}{5} - 2 + \frac{17}{3} = \frac{9}{15} - \frac{30}{15} + \frac{85}{15} = \frac{9 - 30 + 85}{15} = \frac{64}{15}$$

2 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $4 - \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{2}$ m.c.m. (2, 3) =

$$4 = \frac{4 \cdot \square}{\square} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot \square}{3 \cdot \square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot \square}{2 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$4 - \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{\;}{\;} - \frac{\;}{\;} - \frac{\;}{\;} = \frac{\; - \; - \;}{\;} = \frac{5}{6}$$

b) $\dfrac{5}{2} - \left[1 - \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}\right)\right]$ m.c.m. (3, 4) = 12

Efectuamos primero la suma del paréntesis:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot \square}{12} + \frac{1 \cdot \square}{12} = \frac{\square + \square}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{2} - \left[1 - \frac{11}{12}\right] = \frac{5}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5 \cdot \square}{12} - \frac{1}{12} = \frac{\square - \square}{12} = \frac{29}{12}$$

c) $3 - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$ m.c.m. (3, 5) = 15

Efectuamos primero la resta del paréntesis:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{15} - \frac{1 \cdot \square}{15} = \frac{\square - \square}{15} = \frac{2}{15}$$

$$3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot \square}{15} - \frac{2}{15} = \frac{43}{15}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

PRODUCTO (O COCIENTE) DE NÚMEROS RACIONALES

- Para multiplicar dos fracciones, efectuamos el producto de los numeradores y lo dividimos entre el producto de los denominadores.
- Para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda.

EJEMPLO

$$\mathbf{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}} = \frac{1\cdot 5}{3\cdot 7} = \frac{5}{21}$$

$$\mathbf{\frac{1}{3}:\frac{5}{7}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5} = \frac{1\cdot 7}{3\cdot 5} = \frac{7}{15}$$

$$\mathbf{\frac{2}{5}:3} = \frac{2}{5}:\frac{3}{1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2\cdot 1}{5\cdot 3} = \frac{2}{15}$$

3 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)}{5}\cdot\frac{7}{2} = \frac{\square\cdot(\square)\cdot\square}{\square\cdot\square\cdot\square} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\right):\frac{(-3)}{7} = \left(\frac{\square}{\square}\right)\cdot\frac{7}{(-3)} = \frac{\square\cdot\square}{\square\cdot(-3)} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\left[3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]:\left[(-5):\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{\square\cdot(-2)}{\square}\right]:\left[(-5)\cdot\frac{2}{1}\right] = \left(\frac{\quad}{\quad}\right):\left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \left(\frac{\quad}{\quad}\right)\cdot\left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \frac{3}{100}$

d) $\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{7}\right)\cdot\left(7:\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}\right)\cdot\left(7\cdot\frac{2}{1}\right) = \left(\frac{\quad}{\quad}\right)\cdot\left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \frac{\quad}{\quad}$

POTENCIA DE UN NÚMERO RACIONAL

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

EJEMPLO

$$\left(-\mathbf{\frac{3}{5}}\right)^{\mathbf{3}} = \frac{(-3)^3}{5^3} = \frac{-27}{125}$$

4 **Haz estas operaciones.**

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\square - \square}{200} = \frac{\quad - \quad}{200} = \frac{667}{200}$

b) $5 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 5 - \frac{1}{\quad} = \frac{\quad - \quad}{27} = \frac{134}{27}$

c) $3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 + \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad + \quad - \quad}{36} = \frac{113}{36}$

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS RACIONALES

La jerarquía de las operaciones es:

- Primero se hacen las operaciones de los paréntesis.
- Después, se calculan las potencias, si las hubiera.
- A continuación, se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
- Por último, se resuelven las sumas y restas.
- Siempre se opera respetando el orden en que están escritas las operaciones, de izquierda a derecha.

EJEMPLO

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)$$

Hay dos bloques, con los que debemos operar por separado:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{15}{10}+\frac{2}{10}=\frac{17}{10}$$

$$3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 7\cdot 2}{7\cdot 2}-\frac{1\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{1\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{42}{14}-\frac{2}{14}+\frac{7}{14}=\frac{42-2+7}{14}=\frac{47}{14}$$

Operamos y simplificamos:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{10}:\frac{47}{14}=\frac{17\cdot 14}{10\cdot 47}=\frac{238}{470}=\frac{119}{235}$$

5 **Efectúa las operaciones.**

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{7-4}\right]=\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^3=0$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{\quad+\quad}{3}\right)-\left(\frac{\quad+\quad}{4}\right)+\left(\frac{\quad-\quad}{12}\right)=\frac{\quad}{\quad}-\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=$

$=\frac{\quad-\quad+\quad}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

c) $\dfrac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{\quad+\quad}{7}}{\frac{\quad+\quad}{14}}=\frac{\quad}{7}\cdot\frac{14}{\quad}=\frac{308}{70}=\frac{154}{35}=\frac{22}{5}$

d) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(3-\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{5}\right)=\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{2}-\frac{\quad}{5}=\frac{\quad+\quad-\quad}{30}=-\frac{16}{30}$

e) $\left(2-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right):\left(4-\frac{2}{3}\right)=\frac{\quad}{5}\cdot\frac{\quad}{2}:\frac{\quad}{3}=\frac{\quad}{5}\cdot\frac{\quad}{2}\cdot\frac{3}{\quad}=\frac{189}{100}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 OBJETIVO 2
EXPRESAR UN NÚMERO DECIMAL EN FORMA DE FRACCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para expresar un número fraccionario en **forma decimal**, y viceversa, se divide el numerador entre el denominador.

EJEMPLO

a) $\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{20}} = 2{,}45 \rightarrow$ Decimal exacto

b) $\frac{\mathbf{86}}{\mathbf{11}} = 7{,}8181\ldots = 7{,}\overset{\frown}{81} \rightarrow$ Decimal periódico puro

c) $\frac{\mathbf{87}}{\mathbf{66}} = 1{,}31818\ldots = 1{,}3\overset{\frown}{18} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

Para pasar un número en forma decimal a fracción, y viceversa, operamos de manera diferente en cada uno de los tres casos anteriores.

EJEMPLO

a) Decimal exacto:

$$2{,}4625 = \frac{24.625}{10.000} = \frac{4.925}{2.000} = \frac{985}{400} = \frac{197}{80}$$

b) Decimal periódico puro:

Se resta la parte entera

$$3{,}\overset{\frown}{45} = \frac{345 - 3}{99} = \frac{342}{99} = \frac{114}{33} = \frac{38}{11}$$

Se ponen tantos 9 como cifras tenga la parte periódica

Cifras de la parte entera y la parte decimal no periódica

c) Decimal periódico mixto:

$$3{,}21\overset{\frown}{7} = \frac{3.217 - 321}{900} = \frac{2.896}{900} = \frac{1.448}{450} = \frac{724}{225}$$

Se ponen tantos 9 como cifras tenga la parte periódica y tantos 0 como cifras tenga la parte anteperiódica

1 **Obtén la fracción generatriz de los siguientes números.**

a) $0{,}87 = \frac{87}{100}$

b) $0{,}\overset{\frown}{3} = \text{——} = \frac{1}{3}$

c) $3{,}15\overset{\frown}{27} = \frac{31.527 - 315}{9.900} =$

$= \text{——} = \text{——} = \text{——}$

d) $2{,}\overset{\frown}{45} = \text{——} = \text{——} = \frac{27}{11}$

e) $0{,}0\overset{\frown}{15} = \text{——} = \text{——} = \frac{1}{66}$

f) $-235{,}75 = -\text{——} = -\text{——} = -\text{——}$

g) $6{,}\overset{\frown}{2} = \frac{-}{} = \text{——}$

2 **Expresa en forma decimal las fracciones y en forma fraccionaria los decimales.**

a) $\frac{9}{8}$

b) $7,35$

c) $13,\widehat{7}$

d) $8,9\widehat{1}$

e) $\frac{48}{10}$

f) $\frac{9}{11}$

g) $0,278$

h) $6,1\widehat{6}$

i) $18,57$

j) $2,26\widehat{5}$

k) $\frac{101}{90}$

l) $1,0435$

m) $1,\widehat{274}$

n) $0,31\widehat{5}$

ñ) $0,01\widehat{23}$

3 **Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando tu respuesta y poniendo ejemplos en el caso de que no sean ciertas.**

a) Cualquier número decimal puede expresarse en forma de fracción.

b) Cualquier número entero puede expresarse como una fracción.

c) En un número decimal periódico, las cifras decimales se repiten indefinidamente después de la coma.

d) Si un número decimal tiene como período la cifra 0, es un número entero.

e) Una fracción se puede expresar siempre como un número decimal.

2 OBJETIVO 3
OPERAR CON POTENCIAS: MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN Y POTENCIA DE UNA POTENCIA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

POTENCIA

Un número a, llamado base, elevado a un exponente n es igual al resultado de multiplicar a por sí mismo n veces:

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}^{n \text{ veces}} = a^n$$ Se lee: «a elevado a n».

a^n →
- ***n*: exponente**, indica cuántas veces se multiplica la base por ella misma.
- ***a*: base**

EJEMPLO

$\mathbf{6 \cdot 6 \cdot 6} = 6^3$

Se lee: «seis elevado a tres».

1 **Completa.**

a) $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = \square$ «________________»

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \square$ «________________»

c) $\square = 13^5$ «________________»

d) $\square = \square$ «Siete elevado a cuatro»

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS

- Como las potencias son multiplicaciones, se va a trabajar con ellas cuando multiplicamos o dividimos:

$$3^4 \cdot 3^3 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}\cdot\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^7$$

$$5^2 \cdot 5^4 = \overbrace{5 \cdot 5}\cdot\overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^{6} \leftarrow \textbf{exponente}$$

- Las potencias han de tener la **misma base** para unificar el exponente.

$3^2 \cdot 5^4 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (no se puede poner con el mismo exponente)

- La fórmula general para **multiplicar potencias de la misma base** es:

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

2 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $10^2 \cdot 10^5 =$

b) $7^4 \cdot 7^2 = 7^{\square}$

c) $11^3 \cdot 11^2 \cdot 11 =$

d) $3^2 \cdot 3^6 =$

e) $3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 =$

f) $\square \cdot 3^5 = 3^7$

g) $11^3 \cdot 11^3 =$

h) $19^5 \cdot 19^7 =$

i) $2^2 \cdot \square = 2^5$

DIVISIÓN DE POTENCIAS

- Para dividir potencias con igual base, se deja la base y se restan los exponentes: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- La división entre potencias de distinta base no se puede realizar, y debe quedar indicada.

EJEMPLO

$$7^5 : 7^2 = \frac{7^5}{7^2} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$$

3 **Opera con las siguientes potencias.**

a) $5^6 : 5^4 = \frac{5^6}{5^4} = \frac{\qquad\qquad}{} = 5 \cdot 5 = \square$

b) $3^7 : 3^4 = \frac{\square}{\square} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \square \cdot \square \cdot \square = \square$

c) $11^5 : 11^3 =$

d) $13^6 : 13^2 =$

e) $7^2 : 7^3 =$

4 **Realiza estas divisiones.**

a) $3^5 : 3^4 = \square$

b) $\square : 7^2 = 7^5$

c) $4^6 : \square = 4^3$

d) $12^7 : 12^4 = \square$

e) $5^7 : \square = 5^2$

f) $6^{12} : 6^5 = \square$

- A veces se combinan las operaciones de multiplicación y división. En estos casos, se realizan las distintas operaciones, paso a paso:

$$\frac{3^2 \cdot 3^5 \cdot 3}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^2$$

$$\frac{5^6 \cdot 5^3}{5^2 \cdot 5^3} = \frac{5^9}{5^5} = 5^4$$

- Hay que tener en cuenta que solo se puede operar cuando se unifiquen las bases de las potencias:

$$\frac{7^2 \cdot 7^3 \cdot 5^2}{7^2 \cdot 7} = \frac{7^5 \cdot 5^2}{7^3} = 7^2 \cdot 5^2$$

5 **Completa las siguientes operaciones.**

a) $(2^5 \cdot 2^4) : (2^3 \cdot 2^2) = \frac{\qquad\qquad}{} = \frac{2^{\square}}{2^{\square}} = \square$

b) $(11^5 \cdot 11^2 \cdot 11^3) : (11^4 \cdot 11) =$

c) $(10^5 : 10^2) \cdot 10^5 = \frac{\square}{\square} \cdot \square = \square$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Si elevamos una potencia a otra potencia, el resultado es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes:

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

EJEMPLO

$\mathbf{(7^2)^3} = (7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

$\mathbf{(5^4)^2} = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^8$

6 **Completa las siguientes operaciones.**

a) $(7^3)^4 = 7^{\square}$

b) $(3^3)^{\square} = 3^{15}$

c) $(6^2)^{\square} = 6^{12}$

d) $(9^3)^{\square} = 9^{15}$

e) $(4^2)^{\square} = 4^8$

f) $(2^5)^2 = 2^{\square}$

g) $(5^3)^4 = 5^{\square}$

h) $(10^2)^3 = 10^{\square}$

Hay también operaciones combinadas que presentan las tres operaciones estudiadas hasta el momento.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Multiplicación	**División**	**Potencia de una potencia**

EJEMPLO

$$\mathbf{(2^5 \cdot 2^4) : (2^2)^3} = \frac{2^5 \cdot 2^4}{(2^2)^3} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3$$

7 **Realiza estas operaciones.**

a) $(3^5 : 3^2)^3 = \left(\dfrac{\square}{\square}\right)^3 = (\square)^3 =$

b) $(5^7 : 5^3) \cdot (5^6 : 5^2) = \dfrac{\square}{\square} \cdot \dfrac{\square}{\square}$

c) $(10^3)^4 : (10^2 \cdot 10^3) =$

d) $(4^2)^3 \cdot (4^5)^2 =$

e) $(6^5 : 6^2) \cdot (6^3)^4 =$

POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

- Al efectuar una división de potencias, el resultado puede ser una potencia de exponente negativo:

$$7^3 : 7^5 = \frac{7^3}{7^5} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$$

- Si hay exponentes negativos, podemos transformarlos en una fracción: $\frac{1}{a^n}$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

- En general, las potencias de exponente negativo se definen: $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$
- Las potencias de exponente negativo cumplen las propiedades que ya conocemos para las potencias de exponente natural.

8 **Opera con potencias de exponentes negativos.**

a) $5^2 \cdot 3^{-2} = 5^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5^2}{3^{\square}} = \frac{25}{\square}$

b) $5^2 \cdot 5^{-7} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot \frac{1}{\square} \cdot 5^3 = \frac{5^2 \cdot 5^3}{\square} = \square$

c) $6^3 \cdot 2^{-4} = 6^3 \cdot \frac{1}{\square} = (2 \cdot 3)^3 \cdot \frac{1}{\square} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{\square} = \square$

$\boxed{6 = 2 \cdot 3}$

d) $4^3 \cdot 2^{-3} \cdot 8 = 4^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 8 = (2 \cdot 2)^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 2^3 = \frac{\square}{\square} =$

$\boxed{4 = 2 \cdot 2}$

$\boxed{8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3}$

9 **Expresa en forma de potencia de la base indicada en cada caso.**

OPERACIÓN	BASE	RESULTADO
$9^{-7} \cdot 9^{11}$	3	
$4^6 : 8^{-3}$	2	
$(25^9)^{-3}$	5	
$(16^{-5} : 4^3)^{-2}$	2	
$(49^{-3})^4 : 7^{-6}$	7	

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 OBJETIVO 4
EXPRESAR UN NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para expresar un número en notación científica, lo escribimos con una sola cifra, distinta de cero, como parte entera y las otras cifras decimales, multiplicado por una potencia de 10 con exponente igual a:

- el número de cifras que hemos pasado a la parte decimal, o
- menos el número de posiciones que hemos saltado para conseguir que la primera cifra sea entera.

EJEMPLO

5.438 $= 5{,}438 \cdot 10^3$	3 cifras hemos tenido que pasar a decimales.
34,7 $= 3{,}47 \cdot 10^1$	1 cifra hemos tenido que pasar a decimal.
800 $= 8 \cdot 10^2$	2 cifras hemos tenido que pasar a decimales.
0,00748 $= 7{,}48 \cdot 10^{-3}$	3 saltos hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 7, esté en la parte entera.
0,356 $= 3{,}56 \cdot 10^{-1}$	1 salto hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 3, esté en la parte entera.
0,0691 $= 6{,}91 \cdot 10^{-2}$	2 saltos hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 6, esté en la parte entera.

1 **Expresa en notación científica los siguientes números.**

a) $2.000.000 = 2{,}000000 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6$

b) 4.000 = __________

c) 100 = __________

d) 700 = __________

e) 10 = __________

f) 80.000 = __________

g) 5.000.000 = 5 · __________

2 **Expresa en notación científica estos números con parte entera y parte decimal.**

a) $990{,}85 = 9{,}9085 \cdot 10^2$

b) 340 = 3,4 · __________

c) 655,1 = 6,551 · __________

d) 567.765,22 = __________

e) 15,35 = __________

f) 340,05 = 3,4005 · __________

g) 37,986 = 3,7986 · __________

h) 4,4 = __________

i) 3,45 = __________

3 **Expresa los números decimales en notación científica.**

a) $0{,}0567 = 5{,}67 \cdot 10^{-2}$

b) 0,000045 = 4,5 · __________

c) 0,0000061 = __________

d) 0,093 = __________

e) 0,367 = 3,67 · __________

f) 0,0073 = __________

g) 0,000101 = __________

h) 0,0007 = __________

i) 0,4765 = __________

OBJETIVO 5

REALIZAR OPERACIONES EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para efectuar operaciones con números expresados en notación científica, hay que seguir unas sencillas reglas, que vamos a ver con ejemplos y para hacerlo después con calculadora, es importante aprender a calcular primero sin ella, pues funciona según las mismas reglas.

EJEMPLO

1.er CASO: cuando las potencias de 10 están elevadas al **mismo exponente**, un número entero positivo o negativo.

Efectúa la suma $13{,}42 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$.

En este caso, las dos potencias de 10 están elevadas al mismo exponente: 5, de forma que podemos **sacar factor común**. El resultado se da en notación científica.

$$13{,}42 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 = (13{,}42 + 4) \cdot 10^5 = 17{,}42 \cdot 10^5 = 1{,}742 \cdot 10^6$$

1 **Haz las siguientes sumas y restas en notación científica.**

a) $6 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^3 = (\_\_ - \_\_ + \_\_) \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^3$

b) $[101{,}17 \cdot 10^2 - 5{,}87 \cdot 10^2] \cdot 3 = [(\_\_\_\_ - \_\_\_\_) \cdot 10^2] \cdot 3 = [\_\_\_\_ \cdot 10^2] \cdot 3 = 2{,}859 \cdot 10^4$

c) $(33{,}3 \cdot 10 + 2{,}5 \cdot 10 - 6{,}7 \cdot 10) \cdot \dfrac{2}{7} = [(\_\_\_\_ + \_\_\_\_ - \_\_\_\_) \cdot 10] \cdot \dfrac{2}{7} =$

$= [\_\_\_\_ \cdot 10] \cdot \dfrac{2}{7} = 8{,}31 \cdot 10$

EJEMPLO

2.º CASO: cuando las potencias de 10 están elevadas a **distintos exponentes enteros positivos**.

Efectúa la resta $6{,}74 \cdot 10^5 - 2{,}85 \cdot 10^3$.

Observa que, en este caso, las dos potencias de 10 están elevadas a números distintos: 5 y 3, de manera que no podemos sacar factor común directamente. Hay que expresar los dos números en función de la **potencia de menor valor**, en este caso 3.

$2{,}85 \cdot 10^3$

$6{,}74 \cdot 10^5 = 6{,}74 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 674 \cdot 10^3$

$6{,}74 \cdot 10^5 - 2{,}85 \cdot 10^3 = 674 \cdot 10^3 - 2{,}85 \cdot 10^3 = (674 - 2{,}85) \cdot 10^3 = 671{,}15 \cdot 10^3$

Una vez efectuada la operación, convertimos el resultado en notación científica:

$671{,}15 \cdot 10^3 = 6{,}7115 \cdot 10^5$

2 **Haz las siguientes sumas y restas en notación científica.**

a) $2{,}71 \cdot 10^3 - 1{,}9 \cdot 10^2 + 5{,}43 \cdot 10^4 = 2{,}71 \cdot 10 \cdot 10^2 - 1{,}9 \cdot 10^2 + 5{,}43 \cdot 10^2 \cdot 10^2 =$

$= \_\_\_\_ \cdot 10^2 - \_\_\_\_ \cdot 10^2 + \_\_\_\_ \cdot 10^2 = (\_\_\_\_ - \_\_\_\_ + \_\_\_\_) = 568{,}2 \cdot 10^2$

b) $3{,}76 \cdot 10^4 - 5{,}78 \cdot 10^3 = 3{,}76 \cdot 10 \cdot 10^3 - 5{,}78 \cdot 10^3 = \_\_\_\_ \cdot 10^3 - \_\_\_\_ \cdot 10^3 =$

$= (\_\_\_\_ - \_\_\_\_) \cdot \_\_\_\_ = 31{,}82 \cdot 10^3$

c) $5{,}25 \cdot 10^4 + 60{,}4 \cdot 10^3 = \_\_\_\_ \cdot 10 \cdot 10^3 + \_\_\_\_ \cdot 10^3 = 5{,}854 \cdot 10^5$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2

EJEMPLO

3.er CASO: cuando las potencias de 10 están elevadas a **distintos exponentes**, con números enteros negativos.

Efectúa la suma $2,5 \cdot 10^{-5} + 9,6 \cdot 10^{-4}$.

En este caso, las dos potencias de 10 están elevadas a distintos números enteros negativos: -5 y -4, por lo que para sacar factor común elegimos el mayor de ellos, -4, y procedemos así:

$$2,5 \cdot 10^{-5} = 2,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4}$$
$$9,6 \cdot 10^{-4}$$
$$2,5 \cdot 10^{-5} + 9,6 \cdot 10^{-4} = 2,5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4} + 9,6 \cdot 10^{-4} = 0,25 \cdot 10^{-4} + 9,6 \cdot 10^{-4} =$$
$$= (0,25 + 9,6) \cdot 10^{-4} = 9,85 \cdot 10^{-4}$$

3 **Haz estas sumas y restas en notación científica.**

a) $2,32 \cdot 10^{-3} - 3,76 \cdot 10^{-4}$

Como $10^{-4} = 10^{-1} \cdot 10^{-3}$, resulta que:

$2,32 \cdot 10^{-3} - 3,76 \cdot 10^{-4} = 2,32 \cdot 10^{-3} - 3,76 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} = (2,32 - 0,376) \cdot 10^{-3} = 1,944 \cdot 10^{-3}$

b) $7,9 \cdot 10^{-6} + 5,5 \cdot 10^{-5} = \_\_\_ \cdot \_\_\_ \cdot \_\_\_ + \_\_\_ \cdot \_\_\_ = \_\_\_ \cdot \_\_\_ + \_\_\_ \cdot \_\_\_ =$

$= (\_\_\_\_ + \_\_\_\_) \cdot 10^{-5} = 6,29 \cdot 10^{-5}$

c) $3 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} =$

$= (\_\_\_ - 2 + \_\_\_ - \_\_\_) \cdot 10^{-3} = -1,677 \cdot 10^{-3}$

EJEMPLO

Efectúa el producto $(6,2 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^3)$.

Multiplicamos los números: $6,2 \cdot 4 = 24,8$; y por otro lado, multiplicamos las potencias: $10^5 \cdot 10^3 = 10^8$

$$(6,2 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^3) = 24,8 \cdot 10^8 = 2,48 \cdot 10^9$$

Efectúa la división $(6,2 \cdot 10^5) : (4 \cdot 10^3)$.

Dividimos los números: $6,2 : 4 = 1,55$; y por otro lado, dividimos las potencias: $10^5 : 10^3 = 10^2$

$$(6,2 \cdot 10^5) : (4 \cdot 10^3) = 1,55 \cdot 10^2$$

4 **Realiza los productos y cocientes en notación científica.**

a) $(5 \cdot 10^4) \cdot (12 \cdot 10^7) = (5 \cdot 12) \cdot 10^{4+7} = 60 \cdot 10^{11}$

b) $(34,4 \cdot 10^{-5}) \cdot (6,1 \cdot 10^4) = (\_\_\_ \cdot \_\_\_) \cdot 10^{\_\_} = 209,84 \cdot 10^{-1}$

c) $(60 \cdot 10^5) : (3 \cdot 10^6) = (60 : 3) \cdot 10^{\_\_} = 20 \cdot 10^{-1}$

5 **Efectúa las operaciones combinadas en notación científica.**

a) $[(3 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^5) : (5 \cdot 10^3)] - [(2 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^4] = (2 \cdot 10^{\_\_}) - (-3 \cdot 10^0) =$

$= 200 + 3 = 203 = 2,03 \cdot 10^2$

b) $(6 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) = (6 \cdot 10^{-3}) : [(\_\_\_ - \_\_\_ - \_\_\_) \cdot 10^{-3}] =$

$= (6 \cdot 10^{-3}) : (\_\_\_ \cdot 10^{-3}) = 2 \cdot 10^0 = 2$

3 Números reales

INTRODUCCIÓN

En la unidad anterior se estudiaron los números racionales o fraccionarios y se aprendió a compararlos, operar con ellos y utilizarlos para resolver problemas. En esta unidad se verán los números fraccionarios expresados en forma decimal.

Lo más importante de la unidad es conseguir que los alumnos identifiquen y trabajen con los distintos tipos de números que aparecen en la unidad, distinguiendo los diferentes números decimales: exacto, periódico puro, periódico mixto e irracional. El concepto de los números irracionales puede resultar complicado a los alumnos por la aparición de infinitas cifras que no se repiten, por lo que es importante practicar, poniendo ejemplos de racionales e irracionales y pidiendo a los alumnos que los clasifiquen.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Los *números irracionales* son números decimales no exactos y no periódicos.
- El conjunto de los *números reales* lo forman los números racionales e irracionales.
- *Truncar* las cifras decimales de un número hasta un orden determinado consiste en cambiar por ceros las cifras que vienen a continuación de dicho orden.
- *Redondear* un número decimal es estimar si se suma o no una unidad a la cifra que ocupa la posición a la que se va a redondear el número.
- *Raíz n-ésima de un número:* $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer e interpretar intervalos en la recta real.	• Intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos y semicerrados.	• Representación gráfica de intervalos en la recta real.
2. Aproximar un número decimal.	• Aproximación por truncamiento y redondeo.	• Truncamiento y redondeo de un número decimal hasta un orden.
3. Calcular el error que se comete al aproximar un número decimal.	• Error absoluto. • Cota o margen de error. • Error relativo.	• Obtención de los errores absoluto y relativo al aproximar un número decimal. • Determinación de la cota de error.
4. Operar con radicales.	• Transformación de radicales en potencias. • Multiplicación y división de radicales. • Racionalización de denominadores.	• Expresión de números escritos en forma de raíces en potencias. • Operaciones con radicales. • Multiplicación por el conjugado del denominador.

3 OBJETIVO 1
RECONOCER E INTERPRETAR INTERVALOS EN LA RECTA REAL

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

1 **Halla un número racional que pertenezca al intervalo $\left[\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right]$.**

2 **Escribe cuatro intervalos encajados que definan los números.**

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{11}$

3 **Representa en la recta estos intervalos.**

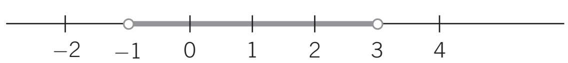
a) $(-2, 4]$ c) $x > 8$ e) $-3 < x \leq 1$ g) $|x| < 5$

b) $[-3, 5]$ d) $x \leq 3$ f) $-2 \leq x < 1$ h) $|x| \geq 3$

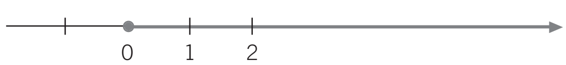
4 **Expresa los siguientes intervalos con paréntesis o corchetes.**

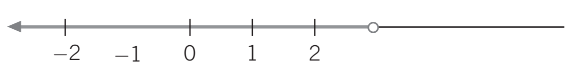
a) 

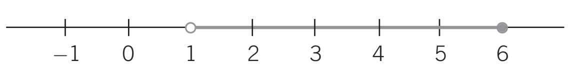
b) 

c) 

5 **Expresa con *x* y los signos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$ los intervalos.**

a) 

b) 

c) 

6 **Escribe cinco intervalos encajados que definan π.**

OBJETIVO 2

APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

Para **truncar** las cifras decimales de un número hasta un orden determinado eliminamos las cifras que vienen a continuación de dicho orden.

EJEMPLO

5,751 truncado a las décimas es 5,7.
0,837 truncado a las centésimas es 0,83.
12,3146 truncado a las milésimas es 12,314.

1 **Trunca los números decimales a la cifra de las décimas, centésimas y milésimas.**

a) 0,2765	b) 12,34	c) 8,7521	d) 361,4938
0,2	______	______	______
0,27	______	______	______
0,276	______	______	______

Para **redondear** un número decimal hasta un orden determinado vemos si la cifra del siguiente orden es menor que 5 o mayor o igual que 5 y, en función de eso, dejamos la cifra anterior como está o la incrementamos en una unidad.

EJEMPLO

5,751 redondeado a las décimas es 5,8.
0,837 redondeado a las centésimas es 0,84.
12,3146 redondeado a las milésimas es 12,315.

2 **Redondea los números decimales a las décimas, centésimas y milésimas.**

a) 0,2765	b) 12,3453	c) 8,7521	d) 361,4932
0,3	______	______	______
0,28	______	______	______
0,277	______	______	______

3 **Efectúa las operaciones con números decimales, y redondea el resultado a las centésimas.**

a) $(1{,}367 + 4{,}875) \cdot 2 = \_\_\_\_\_\_ \cdot 2 = \_\_\_\_\_\_ = 12{,}48$

b) $(3{,}642 - 2{,}485) - (9{,}675 + 1{,}476) = \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = -9{,}99$

c) $\left(\frac{43{,}764}{2{,}15} \cdot 3{,}831\right) - \left(\frac{74{,}772}{13{,}57} \cdot 5{,}63\right) = \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = 46{,}959 = 46{,}96$

d) $\sqrt{37} - \sqrt{22} = \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = 1{,}39$

e) $\frac{35{,}732 - 20{,}189}{63{,}562 - 18{,}987} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0{,}349 = 0{,}35$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 OBJETIVO 3
CALCULAR EL ERROR QUE SE COMETE AL APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **error absoluto** que cometemos al aproximar un número decimal es igual al valor absoluto de la diferencia entre el número dado y el número aproximado. Se representa por $\boldsymbol{E_a}$.

EJEMPLO

Sea el número 3,5765. ¿Qué error absoluto se comete al aproximarlo a las centésimas?

Podemos aproximar el número de dos maneras: truncándolo o redondeándolo.

Si lo truncamos a las centésimas, el número es 3,57; y el error absoluto sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

Si lo redondeamos a las centésimas, el número es 3,58; y el error absoluto sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}58| = 0{,}0035$$

Como el error cometido al redondear es menor, esta forma de aproximación es mejor que el truncamiento.

1 **Calcula el error que cometemos al aproximar los siguientes números decimales a las milésimas.**

a) 35,3277

Por truncamiento queda 35,327.
$E_a = |35{,}3277 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0007$

Por redondeo queda 35,328.
$E_a = |\_\_\_\_\_\_ - 35{,}3277| = 0{,}0003$

b) 107,8912

Por truncamiento queda: __________
$E_a = |107{,}8912 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0002$

Por redondeo queda: __________
$E_a = |107{,}8912 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0002$

El máximo error absoluto que cometemos al hacer una aproximación se llama **cota** o **margen de error**.

EJEMPLO

Al hallar con la calculadora el valor de $\sqrt{3}$, obtenemos:

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508$$

Pero esta es una aproximación por redondeo que hace la calculadora a 7 cifras decimales, por lo que no es el valor exacto de $\sqrt{3}$.

Como no podemos hallar el error absoluto, al no conocer el valor exacto, vamos a calcular una cota del error absoluto cometido. Si aproximamos, por ejemplo, a las centésimas:

$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$

El error que cometemos será menor o, como máximo, igual que la diferencia entre 1,73 y 1,74; es decir: $1{,}74 - 1{,}73 = 0{,}01$.

Así, resulta que 0,01 es una cota del error cometido al aproximar $\sqrt{3}$ a las centésimas.

2 **Halla una cota de error al aproximar $\sqrt{3}$ a las milésimas.**

$1{,}73\mathbf{2} < \sqrt{3} < 1{,}73\mathbf{3}$ $\qquad$ $1{,}73\mathbf{3} - 1{,}73\mathbf{2} = \_\_\_\_\_\_$

3 **Obtén la cota de error al aproximar los números a las décimas y a las centésimas.**

a) $\frac{3}{7}$ $\qquad \frac{3}{7} = 0{,}42857\ldots$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$0{,}4 < \frac{3}{7} < \_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}5 - 0{,}4 = \_\_\_\_\_$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$0{,}42 < \frac{3}{7} < \_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}43 - 0{,}42 = \_\_\_\_\_$$

b) $\frac{3}{11}$ $\qquad \frac{3}{11} = 0{,}272727$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$0{,}2 < \frac{3}{11} < \_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}3 - 0{,}2 = \_\_\_\_\_$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$0{,}27 < \frac{3}{11} < \_\_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}28 - 0{,}27 = \_\_\_\_\_$$

c) $2{,}3\widehat{5}$ $\qquad 2{,}3\widehat{5} = 2{,}35555\ldots$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$2{,}3 < 2{,}3\widehat{5} < \_\_\_\_\_$$

Iuego la cota de error será:

$$\_\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_\_ = 0{,}1$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$2{,}35 < 2{,}3\widehat{5} < \_\_\_\_\_$$

Iuego la cota de error será:

$$2{,}36 - 2{,}35 = 0{,}01$$

d) $\sqrt{7}$ $\qquad \sqrt{7} = 2{,}64575$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$2{,}6 < \sqrt{7} < \_\_\_\_\_$$

Iuego la cota de error será:

$$\_\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_\_ = 0{,}1$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$2{,}64 < \sqrt{7} < \_\_\_\_\_$$

Iuego la cota de error será:

$$2{,}65 - 2{,}64 = 0{,}01$$

El **error relativo** que cometemos al aproximar un número decimal es el cociente entre su error absoluto y el valor exacto de dicho número. Se representa por $\boldsymbol{E_r}$.

EJEMPLO

Sea el número 3,5765. ¿Qué error relativo se comete al aproximarlo por truncamiento a las centésimas? ¿Y a las milésimas?

Si lo truncamos a las centésimas, el número es 3,57; y el error absoluto E_a sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

El error relativo, en este caso, es: $E_r = \left|\frac{0{,}0065}{3{,}5765}\right| = 0{,}001817$

Si lo truncamos a las milésimas, el número es 3,576; y el error absoluto E_a sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}576| = 0{,}0005$$

El error relativo, en este caso, es: $E_r = \left|\frac{0{,}0005}{3{,}5765}\right| = 0{,}000139$

Otra forma de expresar el error relativo es mediante el tanto por ciento:

Para las centésimas: $E_r = 0{,}001817 = 0{,}18\ \%$ $\qquad$ Para las milésimas: $E_r = 0{,}000139 = 0{,}01\ \%$

Observa que, en ambos casos, hemos redondeado el error, para expresar el tanto por ciento (%) con dos cifras decimales.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 **Halla el error relativo que cometemos al aproximar por truncamiento a las centésimas.**

a) $\frac{5}{7}$ $\qquad \frac{5}{7} = 0{,}71428$

El error absoluto será:

$E_a = |0{,}71428 - 0{,}71| =$ __________

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00428}{0{,}71428}\right| = 0{,}005992 = 0{,}60\ \%$$

b) $\frac{7}{9}$ $\qquad \frac{7}{9} = 0{,}77777$

El error absoluto será:

$E_a = |0{,}77777 - 0{,}77| =$ __________

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00777}{0{,}77777}\right| = 0{,}00999 = 1\ \%$$

c) $3{,}87\widehat{5}$ $\qquad 3{,}87\widehat{5} = 3{,}87555\ldots$

El error absoluto será:

$E_a = |3{,}87555 - 3{,}87| = 0{,}00555$

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00555}{3{,}87555}\right| = 0{,}001432 = \underline{\qquad}\ \%$$

d) $\sqrt{7}$ $\qquad \sqrt{7} = 2{,}64575$

El error absoluto será:

$E_a = |2{,}64575 - 2{,}64| = 0{,}00575$

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00575}{2{,}64575}\right| = 0{,}00217 = \underline{\qquad}\ \%$$

5 **Al medir varias veces con una cinta métrica, graduada en centímetros, la altura de un compañero de clase, hemos obtenido los siguientes valores.**

MEDIDAS	177	173	175	174	177	174	174	173	175	172

Calcula la media de estas medidas y el error relativo cometido.

El valor medio de estas medidas será:

$$\text{Altura media} = \frac{177 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{10} = \frac{1.744}{10} = 174{,}4 \text{ cm}$$

El error absoluto cometido en cada una de las medidas lo obtenemos restando la media de cada medida y obteniendo su valor absoluto:

MEDIDAS	177	173	175	174	177	174	174	173	175	172
ERROR ABSOLUTO	$\lvert 177 - 174{,}4\rvert = 2{,}6$	$\lvert 173 - 174{,}4\rvert = 1{,}4$	0,6	0,4	2,6	0,4	0,4	1,4	0,6	2,4

La media de los errores absolutos será:

$$\frac{2{,}6 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{10} = \frac{12{,}8}{10} = 1{,}28 = 1{,}3$$

La altura del compañero es: $174{,}4 \pm 1{,}3$ cm, y el error relativo cometido es:

$$\left|\frac{1{,}3}{174{,}4}\right| = 0{,}00745 = 0{,}75\ \%$$

OBJETIVO 4

OPERAR CON RADICALES

NOMBRE: ________________ CURSO: ________ FECHA: ________

La raíz *n*-ésima de un número se puede poner en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, *a* es el **radicando** y *n* es el **índice** de la raíz.

Es más fácil operar con potencias que con raíces, por lo que transformamos las raíces en potencias.

EJEMPLO

$$\sqrt{5} = 5^{1/2} \qquad \sqrt[7]{3^2} = 3^{2/7}$$

1 **Escribe los radicales en forma de potencias.**

a) $\sqrt[5]{7^3} = \underline{\quad}^{3/5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{8^5}} = \dfrac{1}{8^{5/2}} = 8^{\square}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \underline{\quad}$

MULTIPLICACIÓN (O DIVISIÓN) DE RADICALES

Para multiplicar o dividir radicales con el **mismo radicando**, los convertimos primero en potencias.

EJEMPLO

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = 2^{1/3} \cdot 2^{1/5} = 2^{1/3+1/5} = 2^{(5+3)/15} = 2^{8/15} = \sqrt[15]{2^8}$$

$$\sqrt[7]{3^5} : \sqrt[3]{3} = 3^{5/7} : 3^{1/3} = 3^{5/7-1/3} = 3^{(15-7)/21} = 3^{8/21} = \sqrt[21]{3^8}$$

2 **Calcula los siguientes productos de radicales.**

a) $\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt{7^3} = 7^{3/5} \cdot 7^{3/2} = 7^{3/5+3/2} = 7^{(\underline{\quad}+\underline{\quad})/\underline{\quad}} = 7^{21/10} = \sqrt[10]{7^{21}}$

b) $\sqrt[7]{6^2} + 6 = 6^{\underline{\quad}} \cdot 6 = 6^{\underline{\quad}+\underline{\quad}} = 6^{9/7} = \sqrt[7]{6^9}$

c) $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^2} = 3^{\underline{\quad}} \cdot 3^{\underline{\quad}} = 3^{\underline{\quad}+\underline{\quad}} = 3^{19/10} = \sqrt[10]{3^{19}}$

d) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2^{3/4} \cdot 2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{\underline{\qquad}} = 2^{\underline{\qquad}} = 2^{23/12} = \sqrt[12]{2^{23}}$

3 **Halla estos cocientes de radicales.**

a) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = 2^{1/2} : 2^{1/3} = 2^{1/2-1/3} = 2^{(3-2)/6} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[3]{8^5} : \sqrt[3]{8^2} =$

c) $\sqrt[7]{5} : \sqrt[4]{5^3} =$

d) $(\sqrt[3]{3^7} \cdot \sqrt[3]{3^4}) : \sqrt{3^2} = (3^{\underline{\quad}} \cdot 3^{\underline{\quad}}) : 3 = 3^{\underline{\quad}} : 3 = 3^{8/3} = \sqrt[3]{3^8}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

RACIONALIZAR DENOMINADORES

Racionalizar un denominador es el proceso mediante el que hacemos desaparecer el radical del denominador de la fracción.

Este proceso consiste en multiplicar el numerador y el denominador por un número que haga que en el denominador se elimine la raíz.

EJEMPLO

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[5]{\mathbf{3^2}}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{3}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{1 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

En este caso, utilizamos la propiedad de que una suma por una diferencia de dos números es igual a una diferencia de cuadrados:

$$(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

4 **Racionaliza los denominadores de las fracciones.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} =$

c) $\dfrac{5}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{5 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} = \dfrac{}{\qquad\qquad} = 10 - 5\sqrt{3}$

d) $-\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = -\dfrac{1 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} = -\dfrac{}{\qquad\qquad} = -\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \dfrac{(1 + \sqrt{2}) \cdot (\qquad\qquad)}{(1 - \sqrt{2}) \cdot (\qquad\qquad)} = \dfrac{(\qquad\qquad)^2}{\qquad\qquad} = -(1 + \sqrt{2})^2$

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\square \cdot \square}{\square \cdot \square} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$

g) $\dfrac{2}{1 - \sqrt{3}} =$

4 Problemas aritméticos

INTRODUCCIÓN

En la vida real, la mayor parte de las relaciones entre magnitudes son relaciones de proporcionalidad directa o inversa. Es importante que los alumnos aprendan a distinguir entre ambos tipos y a resolver las reglas de tres directas o inversas que se establecen entre las magnitudes implicadas. Para ello es fundamental determinar la relación que existe entre las variables antes de operar con ellas y evitar que los alumnos apliquen los métodos de manera mecánica, ayudándolos a razonar los pasos que hay que seguir en cada caso.

Los repartos proporcionales son una aplicación de las relaciones de proporcionalidad, que conviene que el alumno conozca y maneje con destreza.
Es fundamental el manejo de porcentajes, ya que los alumnos tendrán que utilizarlos con mucha frecuencia, tanto en el ámbito académico como en la vida real.

La parte final de la unidad se dedica al cálculo del interés, simple y compuesto.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Dos magnitudes son *directamente proporcionales* cuando la razón entre dos cantidades correspondientes es constante: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$. Entre magnitudes directamente proporcionales podemos aplicar *repartos directamente proporcionales.*
- Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto de dos valores correspondientes x e y es constante. Entre magnitudes inversamente proporcionales podemos aplicar *repartos inversamente proporcionales.*
- Las reglas de tres compuestas pueden ser *directas* o *inversas*.
- Los *porcentajes* o *tantos por ciento* expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales, e indican la cantidad de una de ellas correspondiente a *100 unidades* de la otra.
- Hay dos tipos de interés: el *simple* y el *compuesto.*

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer magnitudes directamente proporcionales.	• Magnitudes directamente proporcionales. • Constante de proporcionalidad.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple directa. • Aplicación de método de reducción a la unidad.
2. Reconocer magnitudes inversamente proporcionales.	• Magnitudes inversamente proporcionales. • Constante de proporcionalidad.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple inversa. • Aplicación de método de reducción a la unidad.
3. Realizar repartos proporcionales.	• Repartos directa e inversamente proporcionales.	• Resolución de problemas de repartos.
4. Aplicar la regla de tres compuesta.	• Regla de tres compuesta directa. • Regla de tres compuesta inversa.	• Resolución de problemas con reglas de tres compuestas.
5. Resolver problemas con porcentajes.	• Porcentajes. • Aumentos y disminuciones porcentuales. • Porcentajes encadenados.	• Expresión de cantidades en tantos por ciento. • Utilización de los porcentajes para resolver problemas. • Resolución de problemas que implican aumentos o disminuciones porcentuales.
6. Calcular el interés simple o el interés compuesto de una cantidad.	• Interés simple. • Interés compuesto.	• Cálculo de cantidades mediante el interés simple. • Cálculo de cantidades mediante el interés compuesto.

4 OBJETIVO 1
RECONOCER MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: __________ CURSO: ________ FECHA: ________

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando la razón entre dos cantidades correspondientes de ambas es constante:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$$

- A esta constante ***k*** se le llama **constante de proporcionalidad directa**.
- El **método de reducción a la unidad** consiste en hallar la cantidad de la magnitud desconocida que corresponde a una unidad de la otra magnitud.

EJEMPLO

Por una pieza de queso que pesa 1,25 kg hemos pagado 7,50 €. ¿Cuánto nos habría costado otra pieza que pesa 2,25 kg?

Las magnitudes *peso del queso* y *precio* son directamente proporcionales, ya que cuanto mayor sea el peso, mayor será el precio que hay que pagar. En este caso, la constante de proporcionalidad es: $k = \frac{7{,}5}{1{,}25} = 6$.

Para calcular el precio de la pieza aplicamos una regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } 1{,}25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{cuestan}} 7{,}5\ € \\ 2{,}25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{costarán}} x\ € \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7{,}5}{1{,}25} = \frac{x}{2{,}25} \rightarrow x = \frac{7{,}5 \cdot 2{,}25}{1{,}25} = 13{,}50\ €$$

También podemos resolver el ejemplo anterior averiguando lo que vale 1 kg del queso:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } 1{,}25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{cuestan}} 7{,}5\ € \\ 1 \text{ kg} \xrightarrow{\text{costarán}} x\ € \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7{,}5}{1{,}25} = \frac{x}{1} \rightarrow x = \frac{7{,}5 \cdot 1}{1{,}25} = 6\ €$$

Por tanto, 2,25 kg costarán 2,25 veces más, es decir: $2{,}25 \cdot 6 = 13{,}50$ €.

1 **He invitado a María al cine y por las dos entradas me han cobrado 15 €. ¿Cuánto hubiera tenido que pagar si hubiera invitado a otros 5 amigos más?**

2 **En media hora he recorrido una distancia de 2,5 km. ¿Cuánta distancia recorreré a la misma velocidad, en tres cuartos de hora?**

OBJETIVO 2

RECONOCER MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de dos valores correspondientes x e y es constante:

$$x \cdot y = k \rightarrow y = \frac{k}{x}$$

- A esta constante ***k*** se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.
- El **método de reducción a la unidad** consiste en hallar la cantidad de la magnitud desconocida que corresponde a una unidad de la otra magnitud.

EJEMPLO

Seis albañiles tardan 4 horas en levantar un muro de ladrillos. ¿Cuánto tiempo tardarían en levantar el muro 9 albañiles trabajando al mismo ritmo?

Las magnitudes *número de albañiles* y *número de horas* son inversamente proporcionales, ya que cuanto mayor sea el número de albañiles, menor será el número de horas empleado para levantar el muro.

Por ser magnitudes inversamente proporcionales, cumplen que:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si 6 albañiles} \xrightarrow{\text{tardan}} 4 \text{ horas} \\ \text{9 albañiles} \xrightarrow{\text{tardarán}} x \text{ horas} \end{array}\right\} \rightarrow 6 \cdot 4 = 9 \cdot x \rightarrow x = \frac{24}{9} = 2{,}66 \text{ horas}$$

El mismo problema se puede resolver por el método de reducción a la unidad, es decir, averiguando cuánto tardaría en levantar el muro un albañil:

$$24 = 1 \cdot x \rightarrow x = 24 \text{ horas}$$

Si un albañil tarda 24 horas en levantar el muro, 9 albañiles tardarían 9 veces menos, es decir:

$$\frac{24}{9} = 2{,}66 \text{ horas}$$

1 **Circulando a 90 km/h hemos tardado 3 horas en recorrer una distancia. ¿Cuánto tardaríamos en llegar si fuéramos a 120 km/h?**

2 **Una piscina tiene 6 grifos que manan el mismo caudal, en litros de agua por minuto. Si solo abrimos 2 grifos, la piscina tarda 8 horas en llenarse. Calcula cuánto tiempo tardaría en llenarse si abrimos los seis grifos.**

4 OBJETIVO 3
REALIZAR REPARTOS PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para realizar el reparto de una cantidad *n* de forma **directamente proporcional** a unas cantidades *a*, *b*, *c*…, hacemos lo siguiente:

a) **Se suman las cantidades** en las que hay que repartir: $a + b + c + ...$

b) **Se divide la cantidad *n* entre esa suma.** El cociente nos da la constante de proporcionalidad.

c) Para calcular cada parte basta con multiplicar cada cantidad ***a***, ***b***, ***c***…, por esa constante.

EJEMPLO

Un padre ha ganado un premio de 18.000 € y quiere repartirlo entre sus tres hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 8, 10 y 12 años. ¿Qué cantidad le corresponderá a cada uno?

a) Se suman los años por los que hay que repartir: $8 + 10 + 12 = 30$

b) Dividimos la cantidad del dinero entre la suma anterior: $\dfrac{18.000}{30} = 600$

c) Al hijo de 8 años le corresponderán: $600 \cdot 8 = 4.800$ €

Al hijo de 10 años le corresponderán: $600 \cdot 10 = 6.000$ €

Y al hijo de 12 años le corresponderán: $600 \cdot 12 = 7.200$ €

Para comprobar que el reparto está bien hecho, sumamos las tres partes:

$$4.800 + 6.000 + 7.200 = 18.000 \text{ €}$$

1 **Para comprar una papeleta en una rifa que costaba 12 €, tres amigos han puesto 7, 4 y 1 €, respectivamente, y les ha tocado un premio de 60 €. ¿Qué parte del premio le corresponderá a cada uno?**

2 **Cuatro vecinos deciden poner césped en sus jardines, que miden 12, 15, 18 y 16 m², respectivamente y se lo encargan a un jardinero para que les salga más barato. Si el jardinero les cobra 732 € en total, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno?**

Repartir una cantidad *n* de forma **inversamente proporcional** a otras cantidades *a*, *b*, *c*…, es equivalente a repartirla de forma directamente proporcional a los inversos de las cantidades ***a***, ***b***, ***c***…

En la práctica, para hacer un reparto inversamente proporcional, hay que plantear una ecuación de primer grado.

EJEMPLO

El padre del ejemplo anterior quiere repartir ahora el premio entre sus tres hijos de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 8, 10 y 12 años. ¿Qué cantidad le correspondería a cada uno?

	1.er hijo	2.º hijo	3.er hijo
Edades	8	10	12
Partes del premio	x	y	z

$$8x = 10y \qquad\qquad 8x = 12z$$

$$y = \frac{8x}{10} = \frac{4x}{5} \qquad\qquad z = \frac{8x}{12} = \frac{4x}{3}$$

Como la suma de las tres partes en que se va a repartir el premio tiene que ser igual al premio, se cumplirá que:

$$x + y + z = x + \frac{4x}{5} + \frac{4x}{3} = 18.000$$

Y reduciendo a común denominador resulta:

$$\frac{15x}{15} + \frac{12x}{15} + \frac{20x}{15} = \frac{47x}{15} = 18.000 \rightarrow x = \frac{15 \cdot 18.000}{47} = 5.744,70 \text{ €}$$

Las partes de los otros dos hijos serán:

$$y = \frac{4x}{5} = \frac{4 \cdot 5.744,7}{5} = 4.595,70 \text{ €} \qquad\qquad z = \frac{4x}{3} = \frac{4 \cdot 5.744,7}{3} = 7.659,60 \text{ €}$$

Por último, para comprobar que el reparto está bien realizado, sumamos las tres partes:

$$5.744,70 + 4.595,70 + 7.659,60 = 18.000 \text{ €}$$

3 **Reparte 93 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5. Comprueba el resultado.**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 OBJETIVO 4

APLICAR LA REGLA DE TRES COMPUESTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para **resolver un problema de proporcionalidad**:

1.º Se ordenan las magnitudes y los datos, y se averigua el tipo de proporcionalidad que hay entre cada magnitud y la magnitud que tiene la incógnita.

2.º Se hace la reducción a la unidad.

Si las magnitudes son directamente proporcionales, se trata de una **regla de tres compuesta directa**.

EJEMPLO

En un mes, tres amigos han ido juntos tres veces al cine, costándoles la entrada la misma cantidad los tres días. En total, se han gastado 40,50 € en ese mes en ir al cine. ¿Cuánto se gastarían en total cinco amigos que han ido cinco veces juntos al cine?

En primer lugar hay que averiguar qué tipo de proporcionalidad existe entre las magnitudes del problema: *número de amigos*, *número de veces* y *precio total*.

– Cuantos más amigos vayan, mayor será el gasto total; son magnitudes directamente proporcionales.

– Cuantas más veces vayan, mayor será el gasto total; son magnitudes directamente proporcionales.

Se trata de una **regla de tres compuesta directa**.

Reducimos a la unidad, y por ser magnitudes directamente proporcionales, se divide:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si 3 amigos} \longrightarrow \text{en 3 veces} \longrightarrow \text{gastan } 40{,}50 \text{ € al mes}\\ \text{1 amigo} \longrightarrow \text{en 1 vez} \longrightarrow \text{gastará } \dfrac{40{,}5}{3 \cdot 3} = 4{,}30 \text{ € al mes}\end{array}\right\}$$

Y resolvemos el caso planteado multiplicando:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si 1 amigo} \longrightarrow \text{en 1 vez} \longrightarrow \text{gasta } 4{,}50 \text{ € al mes}\\ \text{5 amigos} \longrightarrow \text{en 5 veces} \longrightarrow \text{gastarán } x \text{ € al mes}\end{array}\right\}$$

$$x = 4{,}5 \cdot 5 \cdot 5 = 112{,}50 \text{ €}$$

1 **Cinco albañiles, trabajando durante 3 días, han levantado un muro de 12 metros de longitud. ¿Cuántos metros de muro levantarían 7 albañiles durante dos días?**

2 **Si seis pasteleros en 3 días hacen quince tartas, ¿cuántas tartas harán nueve pasteleros trabajando durante 2 días al mismo ritmo que los anteriores?**

Si las magnitudes que se relacionan en el problema son inversamente proporcionales, se trata de una **regla de tres compuesta inversa**.

EJEMPLO

Para llenar una piscina, 3 grifos han estado manando agua 5 horas diarias durante 6 días. ¿Cuántos días tardaría en llenarse la piscina si hay 4 grifos abiertos durante 3 horas diarias?

En primer lugar hay que averiguar qué tipo de proporcionalidad existe entre las magnitudes del problema: *número de grifos*, *número de horas diarias* y *número de días*.

- Cuantos más grifos estén abiertos, menor será el número de días; son magnitudes inversamente proporcionales.
- Cuantas más horas al día estén abiertos los grifos, menor será el número de días; son magnitudes inversamente proporcionales.

Se trata de una **regla de tres compuesta inversa**.

Reducimos a la unidad, y por ser magnitudes inversamente proporcionales, se multiplica:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si 3 grifos} \longrightarrow & \text{5 horas al día} \longrightarrow & \text{tardan 6 días} \\ \text{1 grifo} \longrightarrow & \text{5 horas al día} \longrightarrow & \text{tardará } 6 \cdot 3 \text{ días} \\ \text{1 grifo} \longrightarrow & \text{1 hora al día} \longrightarrow & \text{tardará } 6 \cdot 3 \cdot 5 \text{ días} \end{array}\right\}$$

Y resolvemos el caso planteado dividiendo:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si 1 grifo} \longrightarrow & \text{1 hora al día} \longrightarrow & \text{tarda } 6 \cdot 3 \cdot 5 = 90 \text{ días} \\ \text{4 grifos} \longrightarrow & \text{1 hora al día} \longrightarrow & \text{tardarán } \dfrac{90}{4} \text{ días} \\ \text{4 grifos} \longrightarrow & \text{3 horas al día} \longrightarrow & \text{tardarán } \dfrac{90}{4 \cdot 3} \text{ días} \end{array}\right\}$$

$$\frac{90}{4 \cdot 3} = 7{,}5 \text{ días}$$

3 **Tres tractores, trabajando durante 6 horas al día, han tardado un día en arar un campo de trigo. ¿Cuánto tardarían en arar dicho campo 5 tractores iguales a los anteriores, trabajando durante 8 horas al día?**

4 OBJETIVO 5
RESOLVER PROBLEMAS CON PORCENTAJES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

1 **En un periódico local leemos que para el próximo puente el 38 % de las plazas hoteleras de la región están ya reservadas. Sabiendo que el número total de plazas es de 850, calcula las plazas que están ya reservadas y las plazas que quedan aún libres.**

2 **En un colegio juegan a baloncesto 169 alumnos, que representan el 26 % del total de los alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el colegio? ¿Y cuántos no juegan a baloncesto?**

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

Para calcular en qué se transforma una cantidad C cuando aumenta o disminuye en un p %, se multiplica dicha cantidad por el índice de variación:

$C(1 + p/100)$, si aumenta.

$C(1 - p/100)$, si disminuye.

3 **Para fomentar el uso del transporte público en una ciudad, se ha decidido rebajar un 7 % el precio del billete de autobús, que era de 0,80 €, y aumentar un 11 % el precio de 1 hora de aparcamiento, que era de 1,20 €. Calcula los nuevos precios del billete y del aparcamiento.**

4 **El año pasado en mi colegio había 72 alumnos que jugábamos al fútbol, pero este año somos 108 alumnos. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento?**

Para calcular aumentos o disminuciones porcentuales sucesivos, se multiplican los índices de variación: $(1 + p)$ para los aumentos y $(1 - p)$ para las disminuciones.

EJEMPLO

A lo largo del año, la cifra de parados de una Comunidad ha ido variando según los siguientes aumentos y disminuciones porcentuales.

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
+2 %	+3 %	+4 %	−2 %	−1 %	−3 %	−5 %	0 %	0 %	+3%	+3 %	+2 %

Si al comienzo del año había 380.000 parados en esa Comunidad, calcula los parados que hay al finalizar el año.

Hallamos en primer lugar los sucesivos índices de variación:

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
1,02	1,03	1,04	0,98	0,99	0,97	0,95	1	1	1,03	1,03	1,02

Multiplicamos los sucesivos índices de variación:

$$1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 = 1{,}06$$

El número de parados al finalizar el año será: $380.000 \cdot 1{,}06 = 402.800$ personas

Ha aumentado un 6 %, como vemos por el índice de variación total.

5 **La entrada de un cine cuesta 4,50 €, pero me aplican un descuento del 20 %. Como además es el día del espectador, me aplican un descuento adicional del 30 %. Calcula cuánto me cuesta la entrada ese día.**

6 **El precio de un modelo de coche ha experimentado las siguientes variaciones a lo largo de los últimos cinco años.**

2004	2005	2006	2007	2008
+2,5 %	+3 %	0 %	−1,5 %	−2 %

Si su precio en 2004 era de 15.000 €, calcula cuál será su precio en 2008.

4 OBJETIVO 6
CALCULAR EL INTERÉS SIMPLE O EL INTERÉS COMPUESTO DE UNA CANTIDAD

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Si depositamos un capital C en una entidad bancaria que funciona con un tanto por ciento de interés r y retiramos periódicamente el beneficio obtenido, estamos ante un caso de **interés simple**, y se calcula así:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}, \text{ si el tiempo } t \text{ viene dado en años.}$$

EJEMPLO

Luis ingresa 200 € en una cuenta bancaria al 4 % de interés anual simple, y quiere saber cuánto dinero tendrá al cabo de dos años.

Podemos calcular el interés que le rentan 200 € al año aplicando una regla de tres simple:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si por } 100\ € \rightarrow 4\ € \text{ de interés en 1 año}\\ \text{por } 200\ € \rightarrow x_1\ € \text{ de interés en el 1.}^{\text{er}} \text{ año}\end{array}\right\} \rightarrow x_1 = 8\ €$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si por } 100\ € \rightarrow 4\ € \text{ de interés en 1 año}\\ \text{por } 200\ € \rightarrow x_2\ € \text{ de interés en el 2.º año}\end{array}\right\} \rightarrow x_2 = 8\ €$$

Al final del primer año tendrá: $200 + 8 = 208$ € en la cuenta.

Al final del segundo año tendrá: $200 + 16 = 216$ € en la cuenta.
Habrá ganado 16 € en los dos años.

Otra forma más sencilla de calcular los intereses generados al cabo de los dos años es aplicando la fórmula:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{200 \cdot 4 \cdot 2}{100} = 16\ €$$

Y, por tanto, el capital acumulado es: $200 + 16 = 216$ €

1 **Calcula cuánto tiempo ha de permanecer un capital de 600 € a un interés simple del 4 % para que se duplique.**

2 **Calcula cuántos euros habría que ingresar y mantener durante 5 años en una cuenta, al 5 % de interés simple, para que los intereses obtenidos a lo largo de los 5 años sean 100 €.**

Si los intereses generados durante el primer año (mes o día, dependiendo de cómo sea el tanto por ciento de interés) se suman al capital inicial, dando un nuevo capital sobre el que actuará el tanto por ciento de interés, estamos ante un caso de **interés compuesto**.

Para calcular el capital final C_f que se obtiene a partir de un capital inicial C en t años al tanto por ciento anual r, aplicamos esta fórmula.

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

El interés generado al cabo de esos t años será el capital final menos el capital inicial: $i = C_f - C$

EJEMPLO

Luis quiere saber si le conviene ingresar los 200 € en una cuenta joven al 4 % de interés anual compuesto, para lo cual necesita calcular cuánto dinero se habrá generado al cabo de 2 años y qué capital tendrá entonces.

Al final del 1.er año, el interés generado será de 8 € (igual que con el interés simple), pero sobre el capital al final del 1.er año se aplicarán los intereses, y será: $C_1 = C + i_1 = 200 + 8 = 208$ €.

Al final del 2.º año, el interés generado ese año es:

$$i_2 = 208 \cdot \frac{4}{100} = 8{,}32 \text{ €}$$

Y el capital acumulado es: $C_2 = C_1 + i_2 = 208 + 8{,}32 = 216{,}32$ €

Así, los intereses generados en los dos años son: $i_1 + i_2 = 8 + 8{,}32 = 16{,}32$ €

Si aplicamos directamente la fórmula para este tipo de interés, tenemos que:

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 200 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 = 200 \cdot 1{,}04^2 = 216{,}32 \text{ €}$$

Y los intereses generados son: $i = C_f - C = 216{,}32 - 200 = 16{,}32$ €

Por tanto, vemos que los intereses generados y el capital final al cabo de los dos años son mayores en la cuenta a interés compuesto. Esta diferencia se hace mayor cuantos más años transcurren.

Normalmente, las cuentas en bancos y cajas de ahorro funcionan a interés compuesto.

3 **Una persona abre una cuenta de ahorro al 2,5 % de interés compuesto e ingresa 15.000 €, manteniéndolos durante 15 años.**

a) ¿Cuál será el capital final y qué intereses le habrán sido abonados al cabo de los 15 años?

b) ¿Y si mantiene ese dinero en la cuenta durante 20 años?

EJEMPLO

Una persona ha vendido 150 acciones que tenían un *valor nominal* de 4,50 € al *cambio* del 175 %. Si los *gastos de comisión* por la venta suponen el 3 % del *valor efectivo* de las acciones, ¿cuál ha sido el importe neto que ha cobrado?

Las acciones tienen dos valores: el valor **nominal**, es el que figura en el título de la acción, y el valor **efectivo** o real, es el valor con el que dicha acción cotiza en ese momento en la Bolsa. En este caso, el valor nominal de estas acciones era:

$$N = 150 \cdot 4{,}5 = 675\ €$$

El cambio o **cotización** expresa el porcentaje de ganancia o pérdida del valor efectivo sobre el valor nominal. En este caso, 175 % supone que 1 € nominal se ha convertido en 1,75 € efectivos, y se obtienen 0,75 euros por cada euro invertido en estas acciones.

El valor efectivo con el que se han vendido las acciones ha sido:

$$E = 675 \cdot \frac{175}{100} = 1.181{,}25\ €$$

Los gastos por comisión son:

$$1.181{,}25 \cdot \frac{3}{100} = 35{,}44\ €$$

El importe neto de la venta es: $1.181{,}25 - 35{,}44 = 1.145{,}81$ €.

El dinero ganado con la operación es: $1.145{,}81 - 675 = 470{,}81$ €.

4 **Calcula el beneficio o pérdida neto que se obtendría al vender 85 acciones de una empresa de valor nominal 8 € al cambio del 85 %, con un gasto por comisión del 3 %.**

5 **Si necesito disponer de 300 €, ¿cuántas acciones de una empresa de 11 € de valor nominal deberé vender al cambio actual del 140 % para que, una vez restado el gasto del 3 % por gastos de comisión, obtenga los 300 €.**

$$300 = x \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 0{,}97 \cdot x \rightarrow x =$$

5 Polinomios

INTRODUCCIÓN

Son múltiples los contextos en los que aparecen los polinomios: fórmulas económicas, químicas, físicas…, de ahí la importancia de comprender el concepto de polinomio y otros conceptos asociados a él.

Después de comprender y practicar cada uno de estos conceptos, se estudiará cómo operar con polinomios. Las dificultades pueden surgir en la multiplicación (en la colocación correcta de los términos) y en la división (en la determinación de cada término del cociente y en la resta de los productos obtenidos).

Conviene seguir los ejemplos resueltos, dejar claro el proceso seguido y hacer hincapié a los alumnos en la necesidad de colocar correctamente cada término para operar sin cometer errores.

Asimismo, es importante que los alumnos aprendan a deducir por sí mismos el desarrollo de las fórmulas de las igualdades notables.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *polinomio* es una suma de monomios.
- Un *polinomio reducido* no tiene monomios semejantes. Su grado es el grado del término de mayor grado.
- El *valor numérico de un polinomio*, para $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.
- La *suma de dos polinomios* se hace sumando los términos semejantes de ambos.
- La *resta de dos polinomios* se hace sumando al primer polinomio el opuesto del segundo.
- La *multiplicación de dos polinomios* se hace multiplicando cada uno de los monomios de uno por todos los monomios del otro.
- *División de polinomios:* $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- *Igualdades notables*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el grado, y los elementos que forman un polinomio.	• Grado, término independiente y coeficientes de un polinomio. • Polinomio ordenado. • Polinomio reducido. • Polinomio completo.	• Identificación del grado, el término independiente y los coeficientes de un polinomio. • Reducción de polinomios. • Ordenación de los términos de un polinomio. • Distinción de polinomios completos e incompletos.
2. Determinar el valor numérico de un polinomio.	• Valor numérico de un polinomio.	• Cálculo del valor numérico de un polinomio.
3. Realizar operaciones con polinomios: sumas y restas.	• Suma y resta de polinomios.	• Suma y resta de polinomios.
4. Realizar operaciones con polinomios: multiplicación.	• Multiplicación de polinomios.	• Multiplicación de polinomios: aplicación de la propiedad distributiva.
5. Realizar operaciones con polinomios: división.	• División de polinomios.	• División de polinomios. • Comprobación de las divisiones.
6. Identificar y desarrollar igualdades notables.	• Cuadrado de una suma. • Cuadrado de una diferencia. • Producto de una suma por una diferencia.	• Identificación y desarrollo de las igualdades notables.

5 OBJETIVO 1

RECONOCER EL GRADO Y LOS ELEMENTOS QUE FORMAN UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma algebraica de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido es el grado del término de mayor grado.
- Un polinomio es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio.

EJEMPLO

Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:

a) Obtén el polinomio reducido.

b) Determina el grado del polinomio.

c) ¿Cuántos términos tiene? ¿Cuál es su término independiente?

d) ¿Es un polinomio completo? Si es incompleto, di qué término falta.

a) Para reducir un polinomio lo primero que hay que hacer es operar:

$$P(x) = 5x^2 \underbrace{- 3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2$$ **Polinomio reducido**

b) El grado del polinomio es grado 2: $P(x) = 5x^2 - x - 2$.

c) El polinomio tiene tres términos y -2 es el término independiente.

$P(x) = 5x^2 - x - \boxed{2}$ → -2 es el término independiente.

→ Tiene tres términos.

d) $P(x) = \underline{5x^2} - \underline{x} - \underline{2}$ es un **polinomio completo**.

grado: 2 1 0

EJEMPLO

¿Es $Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$ un polinomio completo o incompleto?

$Q(x) = \underline{7x^3} + \underline{2x^2} + \underline{3}$ es un **polinomio incompleto**, pues falta el término de grado 1.

grado: 3 2 0

1 **Reduce los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

2 **Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.**

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$$

$P(x) =$ ______________________

- Tiene ____________ términos.
- El término independiente es ____________
- El grado del polinomio es ____________
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ____________

3 **Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.**

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$$

$P(x) =$ ______________________

- Tiene ____________ términos.
- El término independiente es ____________
- El grado del polinomio es ____________
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ____________

4 **Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.**

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTAN LOS TÉRMINOS
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

5 **Dado el polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica:**

a) Si el polinomio es ordenado.
b) Si el polinomio está reducido.
c) Si el polinomio es completo.
d) Su grado.
e) Su término independiente.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5 OBJETIVO 2

DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para un valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede introducir cualquier valor a sustituyendo a x:

Para $x = 2$:
$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$
$P(2) = 2 \cdot 4 + 1$
$P(2) = 8 + 1$
$P(2) = 9$ El valor del polinomio, cuando introducimos el valor 2, es 9.

Para $x = 10$:
$P(10) = 2 \cdot 10^2 + 1$
$P(10) = 2 \cdot 100 + 1$
$P(10) = 200 + 1$
$P(10) = 201$ El valor del polinomio, cuando introducimos el valor 10, es 201.

1 **Calcula el valor numérico de los polinomios para $x = 1$.**

a) $P(x) = x + 1$
$x = 1$ $P(\ \ ) = \boxed{} + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 **Halla el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$

OBJETIVO 3

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: SUMAS Y RESTAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar términos semejantes**.

EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los términos semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios.

$$\begin{array}{rrl} & P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + & Q(x) = & \phantom{3x^3 -{}} 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline & P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios como se indica

$$\begin{array}{rrl} & P(x) = & 3x^3 - 5x^2 + 5 \\ - & Q(x) = & - (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline & P(x) - Q(x) = & 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

1 **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones de las maneras estudiadas: en línea y en columna.**

2 **Calcula la suma y resta de estos polinomios.**

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $\quad$ $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $\quad$ $Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $\quad$ $Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $\quad$ $Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $\quad$ $Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

OBJETIVO 4

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- El **producto** de dos polinomios se halla **multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro y sumando** (o restando) los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en línea:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

Se multiplican todos los monomios de un polinomio por todos los monomios del otro polinomio.

$$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

Solo se suman términos semejantes.

$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$

1 **Multiplica los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$$

Multiplica los monomios.

$$= \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} = \boxed{\quad\quad} - \boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad} =$$

$=$

Suma los términos.

$P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en columna:

$$
\begin{array}{lr}
P(x) = & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\times\ Q(x) = & x^2 + 3 \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \\
+ & 7x^5 + 2x^4 + 21x^3 - 7x^2 \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21
\end{array}
$$

← *Producto de 3 por $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Producto de x^2 por $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Suma de monomios semejantes.*

2 **Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$**

$$
\begin{array}{lr}
P(x) = & 5x^2 - 3x + 4 \\
\times\ Q(x) = & 3x + 2 \\
\hline
 & \\
+ & \\
\hline
\boxed{P(x) \cdot Q(x) = \qquad}
\end{array}
$$

← *Producto de 2 por $5x^2$, 3x, 4.*

← *Producto de 3x por $5x^2$, 3x, 4.*

← *Suma de monomios semejantes.*

3 **Calcula el producto de los polinomios $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.**

4 **Halla el producto de los siguientes polinomios.**

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Para dividir dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, hay que tener en cuenta que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$.
- Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen que:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

  ***P*(*x*)** es el polinomio **dividendo**.

  ***Q*(*x*)** es el polinomio **divisor**.

  ***C*(*x*)** es el polinomio **cociente**.

  ***R*(*x*)** es el polinomio **resto**.

- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:

  La **división** es **exacta**.

  El polinomio **$P(x)$ es divisible por $Q(x)$**.

- En caso contrario, se dice que la **división** es **entera**.

EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 5$

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \hline & \bigcirc \end{array}$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. En este caso, $\bigcirc = 5x$.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{5x^3} & +3x^2 & +5x & -7 & x^2 + 5 \\ \cline{5-5} -\cancel{5x^3} & & & & 5x + 3 \\ & & -25x & & \\ \hline & 3x^2 & -20x & -7 & \end{array}$$

Multiplicamos $5x$ por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $3x^2$, en este caso 3.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{5x^3} & +3x^2 & +5x & -7 & x^2 + 5 \\ \cline{5-5} -\cancel{5x^3} & & & & 5x + 3 \\ & & -25x & & \\ \hline & \cancel{3x^2} & -20x & -7 & \\ & -\cancel{3x^2} & & -15 & \\ \hline & & -20x & -22 & \end{array}$$

Multiplicamos 3 por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $20x$, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

Polinomio dividendo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

Polinomio divisor: $Q(x) = x^2 + 5$

Polinomio cociente: $C(x) = 5x + 3$

Polinomio resto: $R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división es entera, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

1 **Calcula las divisiones de polinomios, y señala si son exactas o enteras.**

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

2 **Efectúa estas divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES

NOMBRE: ________________ CURSO: ________ FECHA: ________

CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + \overbrace{ab + ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\boldsymbol{(x+3)^2} = (x+3)\cdot(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$\boldsymbol{(4x+y)} = (4x+y)\cdot(4x+y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

1 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(x+2y)^2 = (x+2y)\cdot(x+2y) =$

b) $(3x^3+3)^2 =$

c) $(2x+3y)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - \overbrace{ab - ab} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\boldsymbol{(2y-3)^2} = (2y-3)\cdot(2y-3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$\boldsymbol{(x^2-2)} = (x^2-2)\cdot(x^2-2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 **Desarrolla las igualdades.**

a) $(6x-4y)^2 = (6x-4y)\cdot(6x-4y) =$

b) $(5x^4-2)^2 =$

c) $(4x^3-a^2)^2 =$

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} + b^2 = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

$(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$(5x - 3y) \cdot (5x + 3y) = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

3 **Desarrolla los siguientes productos.**

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 **Desarrolla los productos.**

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 **Desarrolla.**

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$

6 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

INTRODUCCIÓN

Para resolver ecuaciones de primer grado aprendemos a transponer términos, resolviendo ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. Para resolver ecuaciones de segundo grado, distinguimos entre ecuaciones completas e incompletas.

A lo largo de la unidad se exponen los tres métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: sustitución, igualación y reducción. Se deben dejar claros los pasos que hay que dar para resolver un sistema por cada uno de los métodos, así como señalar sus similitudes y diferencias.

Es importante que los alumnos asimilen el método general de resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *ecuación de primer grado* es una expresión del tipo: $ax = b$. Su solución es $x = \dfrac{b}{a}$.
- Una *ecuación de segundo grado* es una expresión del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Sus soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Un *sistema* de dos *ecuaciones* con dos incógnitas x e y se expresa de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- *Resolver un sistema* es encontrar dos números tales que, al sustituirlos en las dos ecuaciones, las verifiquen. Un sistema es *compatible* si tiene solución.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Resolver ecuaciones de primer grado.	• Transposición de términos. • Resolución de ecuaciones.	• Resolución de ecuaciones de 1.er grado transponiendo términos.
2. Resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.	• Eliminación de paréntesis. • Eliminación de denominadores. • Resolución de ecuaciones de primer grado	• Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. • Comprobación de la solución de una ecuación.
3. Ecuaciones de segundo grado.	• Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. • Resolución de ecuaciones de segundo grado completas.	• Identificación de una ecuación de segundo grado. • Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas y completas.
4. Resolver problemas con ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.
5. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	• Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Coeficientes y términos independientes.	• Identificación de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Representación gráfica de sistemas, para comprobar si son o no equivalentes.
6. Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	• Método de sustitución. • Método de igualación. • Método de reducción.	• Resolución de un sistema por los métodos de sustitución, de igualación y de reducción.
7. Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones.	• Planteamiento, resolución y comprobación de un sistema de ecuaciones.	• Resolución de problemas mediante sistemas de dos ecuaciones. • Comprobación de la solución.

6 OBJETIVO 1
RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita que cumple la ecuación.

Para resolver una ecuación de primer grado, **transponemos términos**, lo que consiste en pasar a un miembro (normalmente, al izquierdo) todos los términos con x, y al otro miembro (el derecho), todos los números o términos independientes (términos sin x).

Se deberán tener en cuenta las siguientes reglas.

- **Regla de la suma:** un término que está **sumando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **restando**, y si está **restando** pasa **sumando**.
- **Regla del producto:** un término que está **multiplicando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **dividiendo**, y si está **dividiendo** pasa **multiplicando**.

EJEMPLO

Resuelve esta ecuación de primer grado por transposición: $5x - 3 = 3x + 11$

- Sumamos 3 en los dos miembros:

$$5x - 3 + 3 = 3x + 11 + 3 \rightarrow 5x = 3x + 14$$

- Para eliminar el término con x del segundo miembro, restamos $3x$ en ambos miembros:

$$5x - 3x = 3x + 14 - 3x \rightarrow 2x = 14$$

- Para despejar la incógnita x, dividimos ambos miembros de la ecuación entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2} \rightarrow x = 7$$

1 **Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones de primer grado.**

a) $7x - 1 = 9 - 3x$

d) $75 - 37x + 25 - 12x = 318 + x - 10 + 2x$

b) $5 - 3x = 1 - x + 9 - 3x$

e) $4x - 18 + x - 7 = 25 - 5x$

c) $x - 10 = 3x - 7 + 8x - 13$

f) $5x - 30 + 35 - 10x = 45x - 20 + 65 - 10x$

OBJETIVO 2

RESOLVER ECUACIONES DE 1.er GRADO CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES 6

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PARÉNTESIS

Para resolver una ecuación de primer grado que contiene paréntesis, en primer lugar hay que quitarlos, poniendo atención en los cambios de signo cuando haya un signo negativo delante del paréntesis.

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$

- Quitamos los paréntesis: $2 + x - 5x + 5 = 3x + 3 + x - 4$
- Reducimos términos semejantes: $-4x + 7 = 4x - 1$
- Transponemos términos: $-4x - 4x = -1 - 7 \rightarrow -8x = -8$
- Despejamos la x: $x = \dfrac{-8}{-8} = 1$
- Comprobamos la solución:

$$(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$$
$$(2 + 1) - 5(1 - 1) = 3(1 + 1) + (1 - 4)$$
$$3 - 0 = 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow 3 = 6 - 3 = 3 \rightarrow 3 = 3$$

La solución es correcta, porque el resultado final de las operaciones es el mismo número en ambos miembros de la ecuación.

1 **Resuelve las ecuaciones de primer grado, comprobando la solución.**

a) $(3 - x) + 2(x - 1) = (x - 5) + 2x$

d) $7x - (5 - x) = 4 - (x + 3)$

b) $(7 - 6x) - 5(x + 2) = 3(x + 2) - 2x$

e) $2(x - 5) - 3(1 - x) = 17$

c) $2(5 - x) = 19 - 3(x + 5)$

f) $6(12x - 81) = 80x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES

Para eliminar los denominadores, hay que calcular su mínimo común múltiplo (m.c.m.) y multiplicar los dos miembros de la ecuación por dicho valor.

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $\mathbf{\frac{x-5}{3} - 2 = \frac{x+1}{2} + 1}$

- Calculamos el m.c.m. $(2, 3) = 6$
- Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 6:

$$\frac{6(x-5)}{3} - 6 \cdot 2 = \frac{6(x+1)}{2} + 6 \cdot 1 \qquad 2(x-5) - 12 = 3(x+1) + 6$$

- Quitamos los paréntesis: $2x - 10 - 12 = 3x + 3 + 6$
- Reducimos términos semejantes: $2x - 22 = 3x + 9$
- Transponemos términos: $2x - 3x = 9 + 22 \rightarrow -x = 31 \rightarrow x = -31$
- Comprobamos la solución: $\frac{x-5}{3} - 2 = \frac{x+1}{2} + 1 \rightarrow \frac{-31-5}{3} - 2 = \frac{-31+1}{2} + 1$

$$\frac{-36}{3} - 2 = \frac{-30}{2} + 1 \rightarrow -12 - 2 = -15 + 1 \rightarrow -14 = -14$$

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones, comprobando las soluciones.**

a) $\frac{3x-1}{5} = \frac{2x+1}{3}$

b) $\frac{x-1}{5} + \frac{x+2}{3} = \frac{x}{2} - \frac{x+4}{30}$

c) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{x+2}{5} - \frac{x-3}{2} + \frac{2x}{6}$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores, y comprueba el resultado.**

a) $2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{3}{2}\right)$

b) $\left(x + \frac{1}{5}\right) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{7}{2}x + 1\right)$

c) $\frac{2x + 1}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{x - 1}{6} - \frac{x}{4}$

d) $\frac{3x - 1}{2} + 2\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 3\left(\frac{x - 2}{5}\right) + 3$

6 OBJETIVO 3
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación que se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Si los coeficientes b y c son distintos de cero, la ecuación se llama **completa**; en caso contrario, es **incompleta**.

EJEMPLO

La ecuación $3x^2 - 4x + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa, ya que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, pues $a = 3$, $b = 0$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, porque $a = 3$, $b = 0$ y $c = 0$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

  Dependiendo del valor que tenga c, la ecuación tendrá una, dos o ninguna solución.

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\,(ax + b) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$

EJEMPLO

- La ecuación $2x^2 - 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = -16$.

  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

  Luego tiene dos soluciones: $x_1 = \sqrt{8}$ y $x_2 = -\sqrt{8}$

  Comprobamos que son soluciones de la ecuación:

  Si $x = \sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$ Si $x = -\sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (-\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$

- La ecuación $5x^2 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 5$ y $c = 0$.

  Tiene una única solución, $x = 0$.

- La ecuación $2x^2 + 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = 16$.

  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = -16 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-8}$

  Como no existe $\sqrt{-8}$, la ecuación no tiene solución.

1 **Halla, si es posible, las soluciones de las ecuaciones y comprueba el resultado.**

a) $4x^2 - 64 = 0$

b) $4x^2 + 64 = 0$

c) $4x^2 = 0$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado completa es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Según sea el valor del discriminante se pueden dar tres casos:

- PRIMER CASO. Si $b^2 - 4ac > 0$, existirán dos soluciones: $x_1 = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ y $x_2 = -\sqrt{b^2 - 4ac}$
- SEGUNDO CASO. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una única solución, $x = \frac{-b}{2a}$.
- TERCER CASO. Si $b^2 - 4ac < 0$, la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número real y la ecuación no tiene solución.

EJEMPLO

PRIMER CASO. En la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -8$ y $c = 15$.

Como $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

– Para $x_1 = 5$: $x^2 - 8x + 15 = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$

– Para $x_2 = 3$: $x^2 - 8x + 15 = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$

SEGUNDO CASO. En la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -10$ y $c = 25$.

Como $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Comprobamos la solución: $x^2 - 10x + 25 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$

TERCER CASO. En la ecuación $x^2 + 3x + 12 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.

Como $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 9 - 48 = -39$, y no existe $\sqrt{-39}$, la ecuación no tiene solución.

2 **Resuelve las ecuaciones de segundo grado y comprueba las soluciones.**

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones.**

a) $(x-1)(x+6)-4(3x-4)=0$

b) $x(x-1)+6(x+1)=0$

c) $(x+5)(x-1)-2(x+1)+(x+11)=0$

d) $(x+3)(x-5)+2(x-17)=0$

OBJETIVO 4

RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1.er Y 2.º GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Recuerda los cuatro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Leer** detenidamente el enunciado.
b) **Plantear** el problema, en este caso, la ecuación.
c) **Resolver** el problema, en este caso, la ecuación.
d) **Comprobar** el resultado.

EJEMPLO

Halla un número tal que si a sus dos terceras partes se les resta 1, obtenemos 11.

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
$\frac{2}{3}$ partes del número	$\frac{2x}{3}$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1	$\frac{2x}{3} - 1$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1 **es igual** a 11	$\frac{2x}{3} - 1 = 11$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{2x}{3} = 12 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{2 \cdot 18}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{36}{3} - 1 = 11 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12 - 1 = 11 \rightarrow 11 = 11$$

1 **Calcula tres números consecutivos cuya suma vale 24.**
(Con los números x, $x + 1$ y $x + 2$, plantea la ecuación correspondiente.)

2 **Halla un número tal que su mitad es 5 unidades menor que su triple. A partir de la tabla, resuelve la ecuación.**

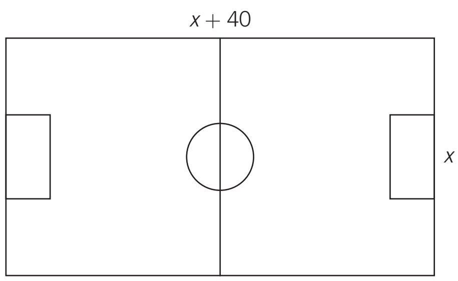
ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
Su mitad	$\frac{x}{2}$
Su triple	$3x$
5 unidades menor que su triple	$3x - 5$
Su mitad es 5 unidades menor que su triple	$\frac{x}{2} = 3x - 5$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

6

3 **El perímetro de un campo de fútbol es 280 m, y sabemos que mide 40 m más de largo que de ancho. Halla las dimensiones (largo y ancho).**

El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados:
$P = x + (x + 40) + x + (x + 40) = 2x + 2\ (x + 40) = 280$



4 **Pepe tiene dos años más que su hermana María y tres años más que Juan. Sumando las edades de los tres, el resultado es 40. Halla la edad que tiene cada uno.**

Llamamos x = edad de Pepe, $x - 2$ = edad de María y $x - 3$ = edad de Juan

5 **El padre de los hermanos del ejercicio anterior tiene 46 años. Sabiendo que Pepe tiene 15 años, María tiene 13 años y Juan tiene 12 años, calcula cuánto tiempo ha de pasar para que la suma de las edades de los tres iguale a la edad de su padre.**

En los problemas en los que aparecen edades actuales y futuras conviene elaborar una tabla como la siguiente.

	EDAD ACTUAL	**DENTRO DE *x* AÑOS**
Pepe	15	$15 + x$
María	13	$13 + x$
Juan	12	$12 + x$
Padre	46	$46 + x$

Planteamos la ecuación:

$$15 + x + 13 + x + 12 + x = 46 + x$$

6 **La madre de Pepe, María y Juan tiene 42 años. Calcula cuántos años deben pasar para que la edad de Pepe sea la mitad que la edad de su madre.**

	EDAD ACTUAL	**DENTRO DE *x* AÑOS**
Pepe	15	$15 + x$
Madre	42	$42 + x$

Planteamos la ecuación:

$$15 + x = \frac{42 + x}{2}$$

7 **La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Halla de qué números se trata.**

Si representamos los números por x y $x + 1$, sus cuadrados serán x^2 y $(x + 1)^2$.
Recuerda que el cuadrado de una suma es: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1^2$

8 **El abuelo de Pepe, María y Juan tiene una edad tal que elevada al cuadrado es igual a 160 veces la suma de las edades de sus tres nietos. Calcula la edad del abuelo.**

Tenemos en cuenta que las edades son: Pepe, 15 años; María, 13 años, y Juan, 12 años.

9 **Un campo de baloncesto tiene 1.000 m² de área. Halla sus dimensiones, sabiendo que mide 30 m más de largo que de ancho.**

Planteamos y resolvemos la ecuación de segundo grado que se obtiene al sustituir en la fórmula del área del rectángulo. Hay que tener en cuenta que la solución negativa no es válida, pues no tiene sentido una medida de longitud negativa.

10 **Si aumentamos el lado de un cuadrado en 2 m, su superficie aumenta en 16 m². Calcula lo que medía inicialmente el lado del cuadrado.**

	ANTES	DESPUÉS
Lado	x	$x + 2$
Superficie	x^2	$(x + 2)^2$

6 OBJETIVO 5
SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones que se puede representar de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- **Coeficientes** de las incógnitas: a, a', b, b'
- **Términos independientes:** k, k'
- Una **solución** de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifican las dos ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve este sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x - y = 3} \\ \mathbf{x + y = 3} \end{array}\right\}$

Las incógnitas son x e y.
Los coeficientes de las incógnitas son 2, −1, 1 y 1.
Los términos independientes son 3 y 3.

Las parejas de valores de la tabla cumplen la primera ecuación:

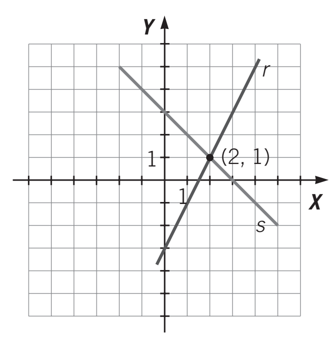
x	0	1	2	3	4	5
y	−3	−1	1	3	5	7

Como vemos, la pareja de valores (2, 1) cumple las dos ecuaciones, por lo que será la solución del sistema.

Si representamos las parejas de valores (x, y) de las tablas anteriores, obtenemos dos rectas, r y s, que se cortan en el punto (2, 1), que es la solución del sistema.

Las parejas de valores de la tabla cumplen la segunda ecuación:

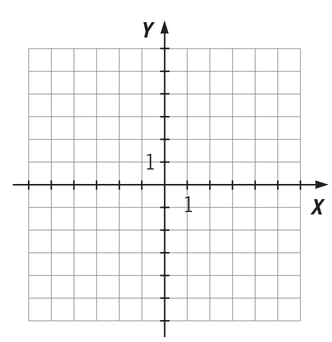
x	0	1	2	3	4	5
y	3	2	1	0	−1	−2



1 **Halla las parejas de valores que son soluciones de las ecuaciones del sistema, y determina cuál es la solución.**

Representa las rectas correspondientes a cada una de las ecuaciones, comprobando que el punto en el que se cortan es la solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + 5y = 8} \\ \mathbf{3x - 2y = 7} \end{array}\right\}$$



Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

EJEMPLO

Los sistemas $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ x + y &= 6 \end{aligned}\right\}$ y $\left.\begin{aligned} x - y &= -2 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$ son equivalentes, ya que tienen la misma solución: $x = 2$, $y = 4$

Si representamos gráficamente ambos sistemas, obtenemos:

Recta r: $3x - y = 2$

x	0	1	2	3
y	−2	1	4	7

Recta t: $x - y = -2$

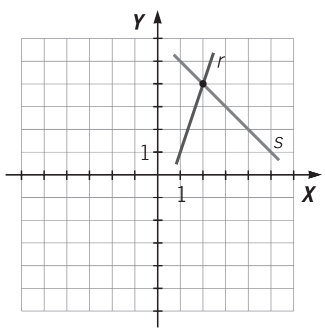
x	0	1	2	3
y	2	3	4	5

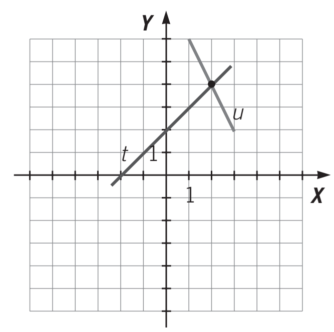
Recta s: $x + y = 6$

x	0	1	2	3
y	6	5	4	3

Recta u: $2x + y = 8$

x	0	1	2	3
y	8	6	4	2





El punto donde se cortan los dos pares de rectas es el mismo: (2, 4), que es la solución de ambos sistemas. Son sistemas equivalentes.

2 **Representa gráficamente las dos ecuaciones de los sistemas. ¿Son equivalentes?**

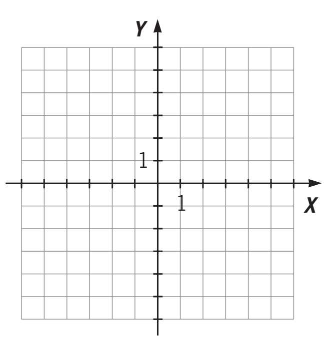
a) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 4 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Recta r: $x - 3y = 4$

x	0	1	2	3
y				

Recta s: $x + y = 0$

x	0	1	2	3
y				



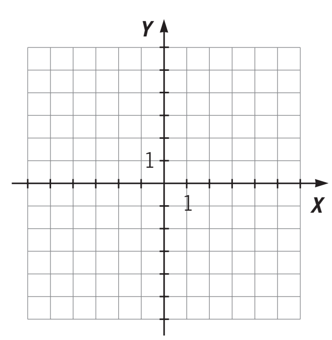
b) $\left.\begin{aligned} 5x - y &= 6 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$

Recta t: $5x - y = 6$

x	0	1	2	3
y				

Recta u: $x + y = 2$

x	0	1	2	3
y				



6 OBJETIVO 6
RESOLVER SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica las dos ecuaciones. Si un sistema tiene solución, se dice que es **compatible**.
- **Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar la solución o las soluciones de dicho sistema.

EJEMPLO

Estudia si el par de números (2, 3) es solución del sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - y} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{8} \end{aligned}\right\}$.

Para ver si el par de números (2, 3) es solución del sistema, hay que comprobar si cumplen o no las dos ecuaciones. Sustituyendo en ambas ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow\ 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ &\rightarrow\ 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{aligned} a \\ b \end{aligned}}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{ Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{ Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de números (2, 3) es una solución del sistema, y el sistema es compatible.

Para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas hay tres métodos de resolución:

(I) Método de **sustitución**.
(II) Método de **igualación**.
(III) Método de **reducción**.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**:

- **Despejar** la incógnita en una de las ecuaciones.
- **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - y} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{8} \end{aligned}\right\}$

- **Elegimos** para despejar la incógnita x de la segunda ecuación: $x = 8 - 2y$
- **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación:

  $$2x - y = 1 \rightarrow 2 \cdot (8 - 2y) - y = 1$$
- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita y obtenida:

  $$16 - 4y - y = 1 \rightarrow 16 - 5y = 1 \rightarrow -5y = 1 - 16 = -15 \rightarrow y = \frac{-15}{-5} \rightarrow y = 3$$
- **Sustituimos** el valor $y = 3$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

  $$2x - y = 1 \rightarrow 2x - 3 = 1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$
- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (2, 3) en las dos ecuaciones:

  $$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow\ 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ &\rightarrow\ 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{aligned} a \\ b \end{aligned}}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{ Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{ Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

  Por tanto, el par de valores $x = 2$, $y = 3$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

1 **Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución y comprueba las soluciones.**

a) $\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x + y &= 13 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 9 \\ 2x - 9y &= 5 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 4 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 3x - y &= 14 \end{aligned}\right\}$

2 **Resuelve por el método de sustitución, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{5x+3}{6} + y &= 2 \\ \frac{2x}{3} + 3y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Para resolverlo, seguimos estos pasos.

1.º En cada ecuación reducimos a común denominador:

$$\left.\begin{aligned} \frac{5x+3}{6} + \frac{6y}{6} &= \frac{6 \cdot 2}{6} \\ \frac{2x}{3} + \frac{3y \cdot 3}{3} &= -\frac{1 \cdot 3}{3} \end{aligned}\right\}$$

2.º Quitamos los denominadores:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3 + 6y &= 12 \\ 2x + 9y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

3.º Resolvemos por sustitución el sistema resultante, comprobando la solución:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 6y &= 9 \\ 2x + 9y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resuelve por el método de sustitución y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.**

a) $$\left.\begin{aligned} \frac{2x+3}{2}+\frac{y}{4}&=1 \\ \frac{5x-1}{2}-\frac{4y+39}{5}&=-1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{5x+3}{6}+\frac{y-1}{4}&=2 \\ \frac{x-2}{5}-\frac{y+5}{10}&=0 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} \frac{3x-6}{3}-\frac{2y-3}{7}&=-1 \\ x+\frac{3y}{2}&=-3 \end{aligned}\right\}$$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación**:

- **Sustituir** la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- **Igualar** las expresiones obtenidas.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - y} &= \mathbf{3} \\ \mathbf{x + y} &= \mathbf{12} \end{aligned}\right\}$$

- **Elegimos** para despejar la incógnita y de las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= 12 - x \end{aligned}\right\}$$

- **Igualamos** las expresiones obtenidas: $2x - 3 = 12 - x$
- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita x obtenida:

$$2x + x = 12 + 3 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$$

- **Sustituimos** el valor $x = 5$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$2x - y = 3 \rightarrow 2 \cdot 5 - y = 3 \rightarrow 10 - 3 = y \rightarrow y = 7$$

- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (5, 7) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} &2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3 \\ &5 + 7 = 12 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de valores $x = 5$, $y = 7$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

4 **Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2} + \frac{2y+2}{3} &= 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{y-4}{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

1.º Reducimos a común denominador las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3(x+1)}{6} + \frac{2(2y+2)}{6} &= \frac{12}{6} \\ \frac{2x}{6} - \frac{y-4}{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2.º Quitamos los denominadores:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3 + 4y + 4 &= 12 \\ 2x - y + 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3.º Resolvemos por igualación el sistema resultante:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5 **Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y+4}{3} = 1 \\ x - \dfrac{y-1}{3} = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{y+1}{5} - y = -2 \\ \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y}{5} = -\dfrac{1}{15} \end{array}\right\}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de reducción**:

- **Buscar un sistema equivalente** en el que los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.
- **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando una incógnita.
- **Resolver** la ecuación con una sola incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 2y = 1} \\ \boldsymbol{5x + 3y = 18} \end{array}\right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**. Para ello, **elegimos** la incógnita que sea más sencilla para reducir, en este caso x. Multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$5(x - 2y = 1) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x - 10y = 5 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\}$$

- **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar los términos con x y reducir el sistema:

$$\begin{array}{r} 5x - 10y = 5 \\ \underline{-\ (5x + 3y = 18)} \\ -13y = -13 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida:

$$-13y = -13 \rightarrow y = 1$$

- **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en la que resulta más sencilla para operar, en este caso la primera:

$$x - 2y = 1 \rightarrow x - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 3$$

- **Comprobamos** el resultado. Para ello hemos de sustituir el par de valores (3, 1) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} 1 = 1\} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ 18 = 18\} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, el par de valores $x = 3$, $y = 1$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

6 **Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba la solución.**

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{3x - 2y = 7}\\ \mathbf{2x + 3y = 9}\end{array}\right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**:

  En este caso, la variable x o la variable y no aparecen multiplicadas por 1 en ninguno de los términos de las ecuaciones, así que podemos elegir una u otra. Elegimos, por ejemplo, la variable y.

  Para lograr que los dos términos con variable y tengan el mismo coeficiente, hay que multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, de forma que:

$$\left.\begin{array}{r}3\cdot(3x - 2y = 7)\\ 2\cdot(2x + 3y = 9)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}9x - 6y = 21\\ 4x + 6y = 18\end{array}\right\}$$

- **Sumamos** las dos ecuaciones para eliminar los términos con y:

$$\begin{array}{r}9x - \cancel{6y} = 21\\ +\quad 4x + \cancel{6y} = 18\\ \hline 13x \qquad = 39\end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida: $x = \dots$
- **Sustituimos** este valor en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar el valor de y:

- **Comprobamos** la solución:

7 **Resuelve por el método de reducción los sistemas y comprueba las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r}7x + 3y = 2\\ 5x + 2y = 1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}3x - 3y = 3\\ 2x + 5y = 72\end{array}\right\}$

6

8 **Resuelve los siguientes sistemas por los tres métodos. Comprueba la solución y decide cuál de los métodos es más sencillo para resolver cada sistema.**

a) $\left.\begin{array}{r}4x - 5y = 0\\ 3x - 4y = -1\end{array}\right\}$

- Por sustitución:

- Por igualación:

- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es ____________________

b) $\left.\begin{array}{r}x - y = -1\\ 2x - y = 19\end{array}\right\}$

- Por sustitución:

- Por igualación:

- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es ____________________

OBJETIVO 7

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas hay que realizar los siguientes pasos.

1.º **Comprender** el problema.
2.º **Plantear** las ecuaciones y formar el sistema de ecuaciones.
3.º **Resolver** el sistema de ecuaciones mediante cualquiera de los tres métodos.
4.º **Comprobar** que la solución cumple las condiciones del enunciado.

EJEMPLO

La suma de los goles marcados por dos equipos es 30, y cuando ambos equipos hayan marcado 5 goles más, la diferencia entre ambos equipos será de 2 goles. Halla los goles marcados por cada equipo.

1.º Lee el problema las veces que sea necesario hasta comprender su enunciado.

2.º Plantea las ecuaciones y forma el sistema:

- Elegir las incógnitas: x = número de goles marcados por el equipo A
  y = número de goles marcados por el equipo B
- Plantear el problema:

		AHORA		CUANDO HAYAN MARCADO 5 GOLES MÁS
Equipo A	$\longrightarrow$	x	$\longrightarrow$	$x+5$
Equipo B	$\longrightarrow$	y	$\longrightarrow$	$y+5$
		$x+y=30$		$(x+5)-(y+5)=2$

- Formar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ (x+5)-(y+5)=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$$

3.º Resuelve el sistema por el método que creas más conveniente, en este caso por reducción.
Sumamos ambas ecuaciones, para eliminar los términos con y:

$$\begin{array}{r} x+y=30 \\ +\ \ x-y=\ \ 2 \\ \hline 2x=32 \end{array} \rightarrow x=16$$

Sustituyendo en la primera ecuación: $16+y=30 \rightarrow y=14$
Por tanto, el equipo A ha marcado 16 goles, y el equipo B, 14 goles.

4.º Comprobamos la solución:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 16+14=30 \\ 16-14=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 30=30 \\ 2=2 \end{array}\right\}$$

Ambas ecuaciones se cumplen, y la solución obtenida es correcta.

1 **Calcula dos números cuya suma es 15 y su diferencia es 1.**

6

2 **En un corral, entre gallinas y ovejas hay 27 animales, y contando las patas hay 76 patas en total. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?**

3 **En un aparcamiento hay 90 vehículos, entre coches y motos. Si salieran 40 coches y 10 motos, el número de coches igualaría el número de motos. Halla el número de coches y de motos que hay en el aparcamiento.**

4 **Una chica compra 2 refrescos y 3 bolsas de pipas por 3,50 €, y un chico compra 3 refrescos y 5 bolsas de pipas por 5,50 €. Halla lo que cuesta cada refresco y cada bolsa de pipas.**

7 Semejanza

INTRODUCCIÓN

El primer objetivo de esta unidad es repasar el teorema de Tales y usarlo para dividir un segmento en partes iguales.

Como aplicación de dicho teorema, tratamos los criterios de semejanza de los triángulos en general, y de los triángulos rectángulos en particular, aplicándolos en la resolución de casos prácticos.

En la segunda parte estudiamos las semejanzas y, sobre todo, los criterios de semejanza de polígonos, así como la relación que existe entre las áreas de figuras semejantes.

Como último objetivo de esta unidad, trabajamos con escalas numéricas y gráficas, su utilización en planos y mapas, aplicándolas al caso del plano de una vivienda.

RESUMEN DE LA UNIDAD

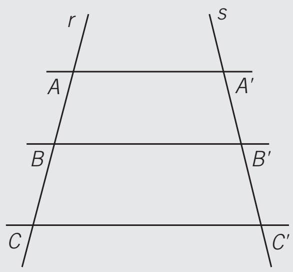
- *Teorema de Tales*: si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes r y s, los segmentos que se forman sobre r son proporcionales a los segmentos formados sobre s.
- *Criterios de semejanza de triángulos*: dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales; si tienen dos ángulos iguales, o si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.
- *Criterios de semejanza de triángulos rectángulos*: dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos pares de lados proporcionales, o si tienen un ángulo agudo igual.
- Dos *polígonos son semejantes* si sus ángulos homólogos son iguales, o si sus lados homólogos son proporcionales.
- El cociente entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.
- La *escala* es la razón de semejanza entre el objeto original y su representación en un plano, mapa, maqueta, etc.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer y aplicar el teorema de Tales.	• Teorema de Tales.	• Cálculo de un segmento, conocidos los otros tres segmentos en los que dos rectas paralelas cortan a dos rectas cualesquiera. • División de un segmento en un número de partes iguales.
2. Semejanza de triángulos.	• Criterios de semejanza de triángulos. • Criterios de semejanza de triángulos rectángulos.	• Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un triángulo. • Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un triángulo rectángulo.
3. Semejanzas.	• Criterios de semejanza de polígonos.	• Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un polígono.
4. Relación entre áreas de figuras semejantes.	• Cociente entre las superficies de dos figuras semejantes.	• Obtención de las medidas de los lados de un rectángulo, conocidos su área, y el área y los lados de un rectángulo semejante.
5. Escalas.	• Escalas numérica y gráfica.	• Cálculo de distancias o dimensiones sobre un plano, representado a escala.

7 OBJETIVO 1
CONOCER Y APLICAR EL TEOREMA DE TALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TEOREMA DE TALES



Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes *r* y *s*, los segmentos que se forman sobre la recta *r* son proporcionales a los segmentos formados sobre *s*.

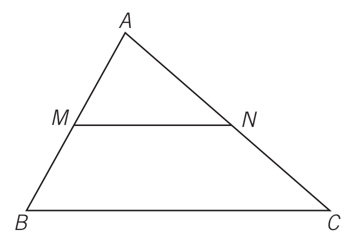
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

EJEMPLO

Aplicando el teorema de Tales al triángulo de la figura, en el que se ha trazado una recta paralela al lado *BC*, que corta a los otros lados en los puntos *M* y *N*, resulta:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

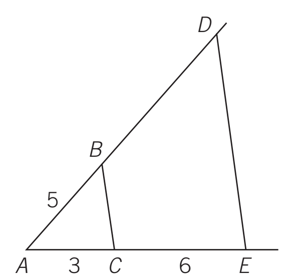
Los triángulos $\widehat{AMN}$ y $\widehat{ABC}$ están en posición de Tales.



1 **Calcula la longitud de *BD* en la figura.**

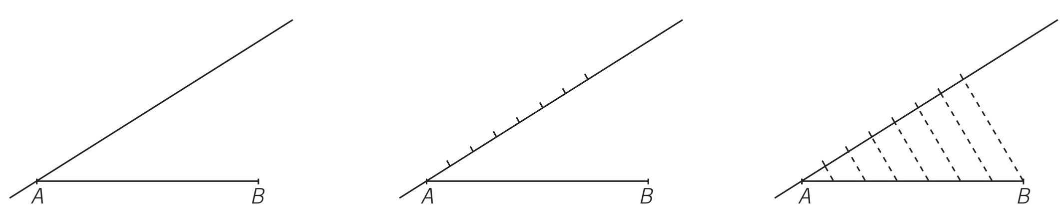
Aplicando el teorema de Tales, tenemos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{AD}{9} \rightarrow AD = \_\_\_\_$$



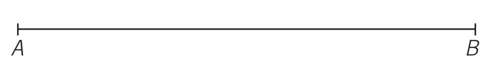
EJEMPLO

Dividimos el segmento *AB* en 7 partes iguales: sobre una recta auxiliar que pase por *A*, marcamos con una regla 7 unidades iguales, de 1 cm. Unimos la séptima marca con el extremo *B* del segmento, y trazamos rectas paralelas a esa línea discontinua desde las demás marcas.



El segmento *AB* ha quedado dividido en siete partes iguales.

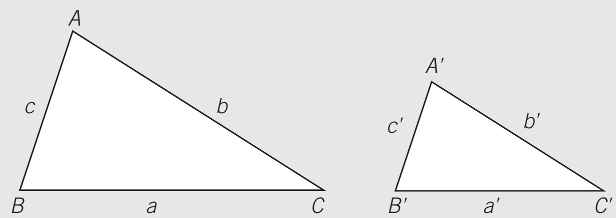
2 **Divide en 5 partes iguales el segmento *AB* de la figura.**



SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dos triángulos son **semejantes** si tienen sus ángulos iguales y sus lados son proporcionales.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}'\end{array}\right\} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Los vértices homólogos son A y A', B y B' o C y C'.
Los lados homólogos son a y a', b y b' o c y c'.

Razón de semejanza: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

CRITERIOS DE SEMEJANZA

Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de estos criterios.

- Tienen sus tres lados proporcionales.
- Presentan dos ángulos iguales.
- Poseen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

EJEMPLO

¿Son semejantes el triángulo de lados $a = 18$ cm, $b = 12$ cm y $c = 10$ cm, y el triángulo de lados $a' = 45$ cm, $b' = 30$ cm y $c' = 25$ cm?

Veamos si los lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{18}{45} = \frac{12}{30} = \frac{10}{25} \rightarrow \frac{2 \cdot 3^2}{3^2 \cdot 5} = \frac{2^2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 5}{5^2} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Se cumple el primer criterio de semejanza; por tanto, los dos triángulos son semejantes.

1 **Comprueba si son semejantes las parejas de triángulos.**

a) $\widehat{A} = 43°$, $\widehat{C} = 81°$
$\widehat{A}' = 43°$, $\widehat{B}' = 56°$

c) $\widehat{A} = 30°$, $b = 3$, $c = 5$
$\widehat{A}' = 30°$, $b' = 6$, $c' = 10$

b) $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$
$a' = 20$, $b' = 30$, $c' = 50$

d) $\widehat{A} = 45°$, $b = 2$, $c = 7$
$\widehat{A}' = 45°$, $b' = 4$, $c' = 5$

2 **Los lados de un triángulo miden 9 cm, 3 cm y 6 cm. Halla los lados de un triángulo semejante, sabiendo que la razón de semejanza vale 3.**

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + 5y = 8} \\ \mathbf{3x - 2y = 7} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x -}{x \cdot} = 3 \rightarrow a' = \_\_\_\_\_\_ \\[2ex] \dfrac{5x \cdot}{x \cdot} = 3 \rightarrow b' = \_\_\_\_\_\_ \\[2ex] \dfrac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x +}} = 3 \rightarrow c' = \_\_\_\_\_\_ \end{array}\right.$$

3 **Los lados de un triángulo miden 3 cm, 1 cm y 2 cm. El perímetro de un triángulo semejante a él mide 30 cm. Halla la razón de semejanza y los lados del nuevo triángulo.**

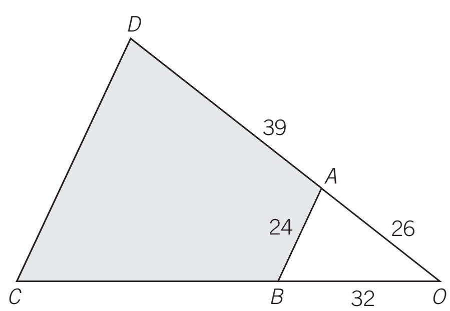
Ten en cuenta que si dos triángulos son semejantes, sus perímetros también guardan la relación de semejanza.

$$\frac{\mathbf{2x - y =}}{\mathbf{x + y = 1}} = r \rightarrow r = \frac{y =}{y =} = \_\_\_\_\_\_$$

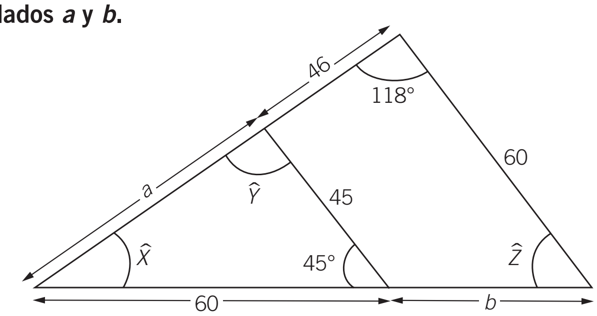
Y despejando, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathbf{x - 2}.}{\mathbf{5x + 3y}} \rightarrow a' = \_\_\_\_\_\_ \\[2ex] \dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{5} \rightarrow b' = \_\_\_\_\_\_ \\[2ex] \dfrac{2}{c'} = \dfrac{1}{5} \rightarrow c' = \_\_\_\_\_\_ \end{array}\right.$$

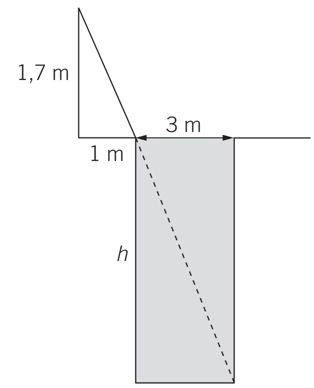
4 **El jardín de la figura tiene la forma del cuadrilátero *ABCD*, con sus lados *AB* y *CD* paralelos. Calcula lo que miden los lados *BC* y *CD*.**



5 **Halla los valores de los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ y de los lados *a* y *b*.**



6 **Determina la profundidad de una piscina que mide 3 m de ancho, sabiendo que una persona que mide 1,7 m de altura, y que está situada a 1 m del borde, visualiza la esquina inferior de la piscina.**



CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En el caso de triángulos rectángulos, los criterios de semejanza anteriores se simplifican.
Así, dos triángulos rectángulos son semejantes cuando cumplen uno de estos criterios.

- Si tienen dos pares de lados proporcionales.
- Si tienen un ángulo agudo igual.

EJEMPLO

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABM}$ son semejantes, ya que tienen un ángulo agudo igual, $\widehat{B}$.

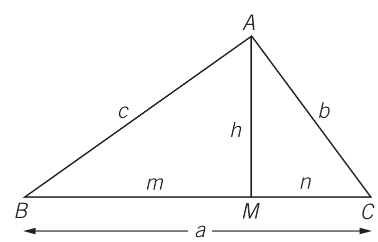
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$

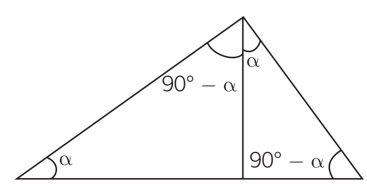
Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMC}$ son semejantes, porque tienen un ángulo agudo igual, $\widehat{C}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

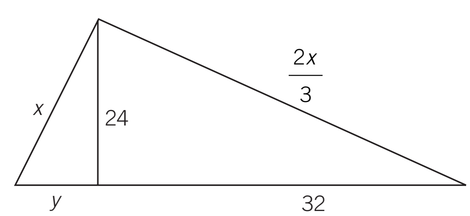
Los triángulos $\widehat{AMB}$ y $\widehat{AMC}$ son semejantes, pues tienen sus tres ángulos iguales.

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$





7 **Calcula lo que miden los lados indicados con incógnitas.**



8 **Un padre y su hijo están esperando en la parada del autobús. La sombra del padre mide 1,2 m, y la del hijo mide 1,07 m. Sabiendo que el hijo mide 1,65 m, calcula la estatura del padre.**

7 OBJETIVO 3
SEMEJANZAS

NOMBRE: ________________________ CURSO: __________ FECHA: __________

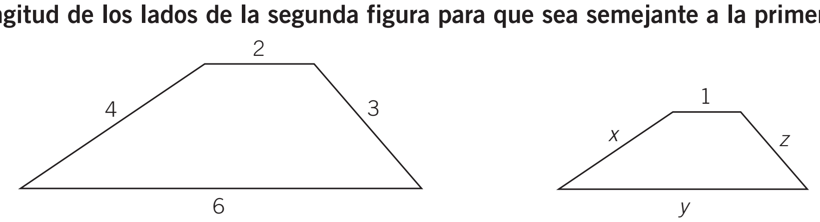
Las **semejanzas** transforman una figura dada en otra figura con la misma forma y distinto tamaño.
Las semejanzas se diferencian de las traslaciones y los giros en que no son movimientos.

Dos **polígonos** son **semejantes** si:

- Sus ángulos homólogos son iguales.
- Los lados homólogos son proporcionales, siendo el cociente entre un lado y su lado homólogo igual a la razón de semejanza.

EJEMPLO

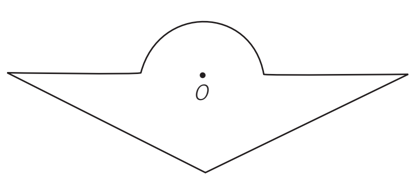
Halla la longitud de los lados de la segunda figura para que sea semejante a la primera.



Como las dos figuras son semejantes, existe una proporcionalidad entre las longitudes de sus lados:

$\frac{2}{1} = \frac{4}{x} = \frac{6}{y} = \frac{3}{z}$ $2 = \frac{4}{x} \rightarrow x =$ ______ $2 = \frac{6}{y} \rightarrow y =$ ______ $2 = \frac{3}{z} \rightarrow z =$ ______

1 **Construye una figura semejante a la siguiente, de manera que la razón de semejanza entre ambas sea $\frac{1}{2}$, tomando como referencia el punto *O*.**

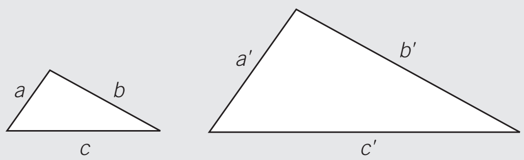


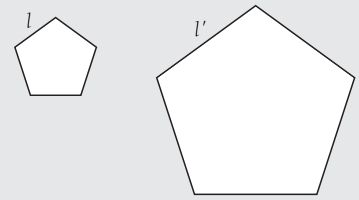
2 **Los lados de un triángulo miden 3, 5 y 7 cm. El perímetro de un triángulo semejante a él mide 45 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza? Calcula los lados del nuevo triángulo.**

RELACIÓN ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMEJANTES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El cociente entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de **semejanza**.

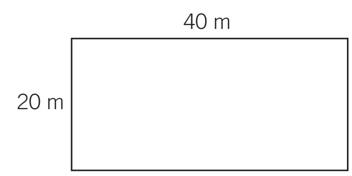




$$\frac{a}{a'} = r = \text{razón de semejanza} \rightarrow \frac{S}{S'} = r^2 \qquad \frac{l}{l'} = r = \text{razón de semejanza} \rightarrow \frac{S}{S'} = r^2$$

EJEMPLO

Un agricultor ha cercado su huerta con una valla de alambre, que tiene la forma y dimensiones de la figura.



a) ¿Cuántos metros de valla necesitaría para cercar una huerta semejante, con la mitad de superficie que la anterior?

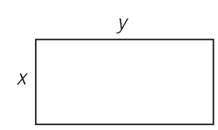
b) ¿Y si quisiera vallar una huerta semejante, que fuera tres veces mayor?

a) La huerta inicial tiene esta superficie: $S = 20 \cdot 40 = 800$ m^2. Como la nueva huerta tiene la mitad de superficie que la anterior, medirá: $\frac{800}{2} = 400$ m^2. Aplicando la relación entre ambas superficies obtendremos la razón de semejanza: $\frac{800}{400} = r^2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

Así, la nueva huerta medirá:

$$\frac{20}{x} = \sqrt{2} \rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{40}{y} = \sqrt{2} \rightarrow y = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \text{ m}$$



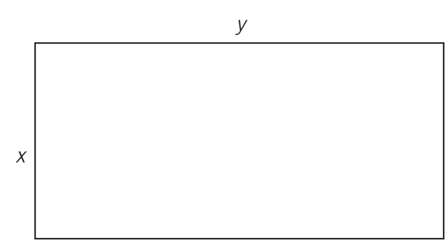
b) Como la nueva huerta tiene una superficie que es tres veces mayor que la primera, tendrá: $3 \cdot 800 = 2.400$ m^2. Aplicando la relación entre ambas superficies obtendremos la razón de semejanza:

$$\frac{800}{2.400} = r^2 \rightarrow \frac{1}{3} = r^2 \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

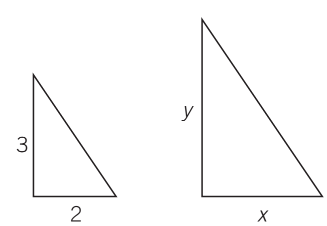
Así, la nueva huerta medirá:

$$\frac{20}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\frac{40}{y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{40 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3} \text{ m}$$



1 **Sabiendo que la relación de semejanza entre los dos triángulos de la figura es de $\frac{1}{4}$, halla el área del segundo triángulo.**



OBJETIVO 5

ESCALAS

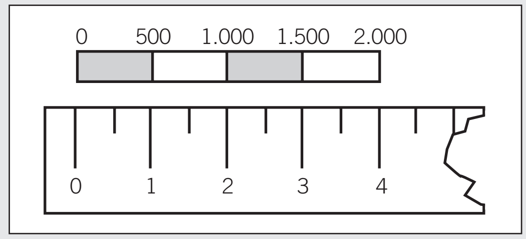
NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **escala** es la razón de semejanza entre el objeto original y su representación, que puede ser un plano, un mapa, una maqueta, etc.

La escala puede venir representada en forma numérica o gráfica.

Escala numérica: 1 : 500

Escala gráfica:



En ambos casos, 1 unidad sobre el plano representa 500 unidades en la realidad.

EJEMPLO

Calcula las dimensiones de las habitaciones del piso al que le corresponde el siguiente plano, representado a escala 1 : 200.

Midiendo con la regla graduada las diferentes habitaciones, obtenemos:

Salón:

2,5 cm · 3 cm → 500 cm · 600 cm = 5 m · 6 m

Cocina:

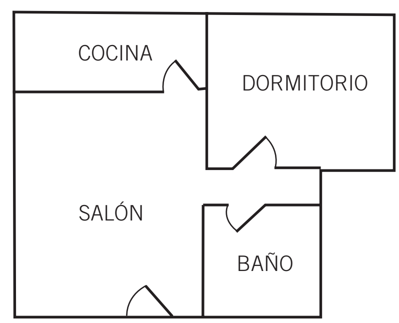
2,5 cm · 1 cm → 500 cm · 200 cm = 5 m · 2 m

Dormitorio:

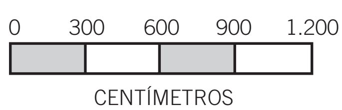
2,5 cm · 2 cm → 500 cm · 400 cm = 5 m · 4 m

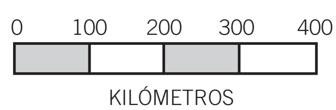
Baño:

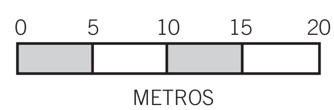
1,5 cm · 1,5 cm → 300 cm · 300 cm = 3 m · 3 m



1 **Mide con la regla y escribe la escala numérica correspondiente a las escalas gráficas.**







2 **Dibuja las escalas gráficas correspondientes a las siguientes escalas numéricas.**

a) 1 : 500 b) 1 : 6.000 c) 1 : 100.000

3 **En un mapa de carreteras a escala 1 : 5.000.000 medimos la distancia que hay en línea recta entre dos ciudades, siendo de 4,5 cm. ¿Qué distancia en kilómetros habrá en la realidad?**

8 Trigonometría

INTRODUCCIÓN

En esta unidad se pretende que los alumnos adquieran los conocimientos básicos en trigonometría, que serán necesarios en cursos posteriores, sobre todo para alumnos de las opciones de Ciencias, Tecnología o Biosanitarias.

En la unidad se trabaja con tres funciones: seno, coseno y tangente, dejando para cursos posteriores sus funciones inversas: cosecante, secante y cotangente, así como las relaciones que se deducen de ellas.

Se aplican dichas funciones en la resolución de triángulos, sean rectángulos o no (cálculo de la altura), y por último, se estudia la conversión de grados en radianes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

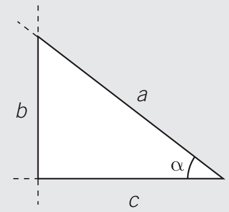
- Definiciones de *seno*, *coseno* y *tangente*.
- Cálculo de dichas razones para ángulos notables: 30°, 45° y 60°.
- Signos del *seno*, *coseno* y *tangente* para ángulos en distintos cuadrantes de la *circunferencia goniométrica*.
- *Razones trigonométricas* de ángulos: complementarios, suplementarios, opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360°.
- Relación fundamental y expresión de la tangente.
- Resolución de triángulos rectángulos y cálculo de la altura en triángulos no rectángulos.
- Conversión de *grados sexagesimales* a *radianes*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Razones trigonométricas.	• Definiciones de seno, coseno y tangente.	• Seno, coseno y tangente de triángulos rectángulos.
2. Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.	• Seno, coseno y tangente de los ángulos de 30°, 45° y 60°.	• Cálculo de las razones de ángulos notables.
3. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.	• Seno, coseno y tangente de ángulos de cualquiera de los cuatro cuadrantes.	• Deducción del signo del seno, el coseno y la tangente en cada uno de los cuatro cuadrantes.
4. Razones de ángulos complementarios y suplementarios.	• Seno, coseno y tangente de ángulos complementarios. • Seno, coseno y tangente de ángulos suplementarios.	• Cálculo del seno, el coseno y la tangente de ángulos complementarios y suplementarios.
5. Razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes.	• Seno, coseno y tangente de ángulos opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360°.	• Cálculo del seno, el coseno y la tangente de ángulos opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360°.
6. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo.	• Relación fundamental de la trigonometría. Tangente en función de seno y coseno.	• Obtención de dos razones trigonométricas, conocida la tercera.
7. Aplicaciones de las razones trigonométricas.	• Cálculo de lados y ángulos de un triángulo rectángulo, conocidos algunos de ellos. • Obtención de la altura de un triángulo no rectángulo.	• Aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas para hallar los elementos desconocidos de un triángulo rectángulo.
8. Medida de ángulos en radianes.	• Definición de radián.	• Conversión de ángulos notables expresados en grados a radianes.

8 OBJETIVO 1
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

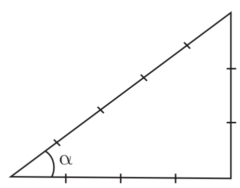
Dado un triángulo rectángulo, definimos las **razones trigonométricas** de uno de sus ángulos agudos α:



seno	coseno	tangente
$sen\ \alpha = \dfrac{b}{a}$	$cos\ \alpha = \dfrac{c}{a}$	$tg\ \alpha = \dfrac{b}{c}$
(cateto opuesto dividido entre hipotenusa)	(cateto contiguo dividido entre hipotenusa)	(cateto opuesto dividido entre cateto contiguo)

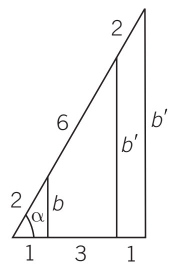
EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo de la figura.



$$sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{5} \qquad cos\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \qquad tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$$

1 **Completa las igualdades y comprueba que las razones trigonométricas son independientes del tamaño del triángulo elegido.**



Aplicando el teorema de Pitágoras a cada uno de los tres triángulos de menor a mayor tamaño, hallamos b, b' y b'':

$$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$b' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

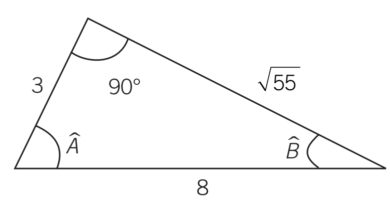
$$b'' = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$$

$sen\ \alpha = \dfrac{b}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $sen\ \alpha = \dfrac{b'}{8} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \underline{\qquad}$ $\qquad$ $sen\ \alpha = \dfrac{b''}{10} = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} = \underline{\qquad}$

$cos\ \alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $cos\ \alpha = \dfrac{c'}{a'} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \underline{\qquad}$ $\qquad$ $cos\ \alpha = \dfrac{c''}{a''} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \underline{\qquad}$

$tg\ \alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $tg\ \alpha = \dfrac{b'}{c'} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \underline{\qquad}$ $\qquad$ $tg\ \alpha = \dfrac{b''}{c''} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \underline{\qquad}$

2 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$.**



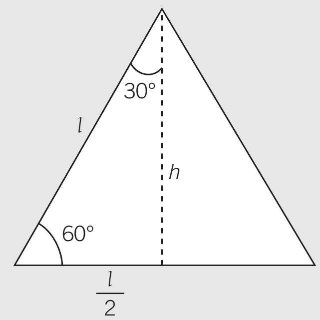
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30°, 45° Y 60° 8

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° se deducen a partir de un triángulo equilátero de lado l.

Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos su altura:

$$h^2 = l^2 - (l/2)^2 = l^2 - l^2/4 = 3l^2/4 \rightarrow h = l \cdot \sqrt{3}/2$$



Las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$sen\ 60° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l/2} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

1 **Deduce las razones trigonométricas del ángulo de 30° a partir del triángulo equilátero anterior.**

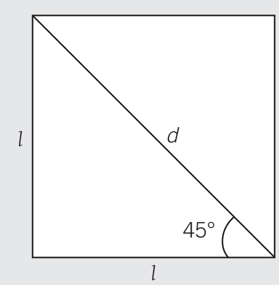
Las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$sen\ 30° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \qquad cos\ 30° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l} = \underline{\qquad} \qquad tg\ 30° = \frac{l/2}{l \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \underline{\qquad}$$

Las razones trigonométricas del ángulo de 45° se deducen a partir de un cuadrado y su diagonal.

Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos la diagonal:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2 \cdot l^2 \rightarrow d = l \cdot \sqrt{2}$$



Las razones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$sen\ 45° = \frac{l}{l \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{l}{l \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = \frac{l}{l} = 1$$

2 **Completa la tabla con las razones trigonométricas de ángulos notables.**

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen	0				1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe	0	no existe	0

8 OBJETIVO 3
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

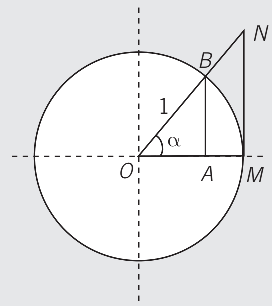
La circunferencia goniométrica o círculo unitario es una circunferencia de radio la unidad.

Sobre dicha circunferencia, el valor del seno coincide con el segmento *AB* y el coseno con el segmento *OA*.

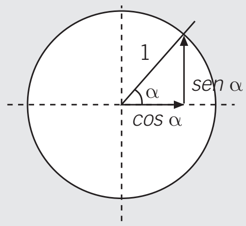
$$sen\ \alpha = \frac{AB}{1} = AB \qquad cos\ \alpha = \frac{OA}{1} = OA$$

La tangente coincide con el segmento *MN*, que es tangente a la circunferencia, ya que:

$$tg\ \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{MN}{OM} = \frac{MN}{1} = MN$$

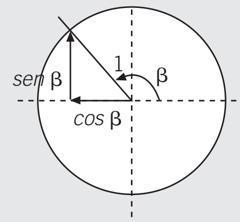


En el primer cuadrante:



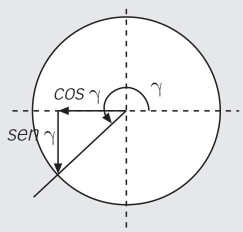
$sen\ \alpha > 0$
$cos\ \alpha > 0$
$tg\ \alpha > 0$

En el segundo cuadrante:



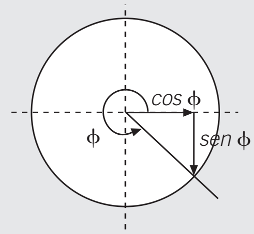
$sen\ \beta > 0$
$cos\ \beta < 0$
$tg\ \beta < 0$

En el tercer cuadrante:



$sen\ \gamma < 0$
$cos\ \gamma < 0$
$tg\ \gamma > 0$

En el cuarto cuadrante:

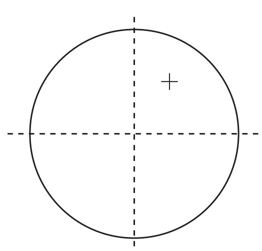


$sen\ \phi < 0$
$cos\ \phi > 0$
$tg\ \phi < 0$

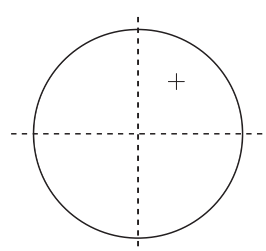
1 **Completa la siguiente tabla con los signos que correspondan a las razones trigonométricas indicadas.**

	40°	70°	110°	210°	300°
sen	+				
cos	+				
tg	+				

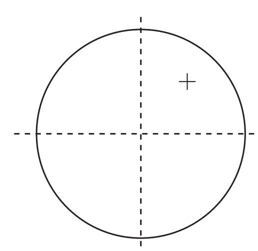
2 **Escribe, para cada cuadrante, el signo del seno, el coseno y la tangente.**



seno



coseno

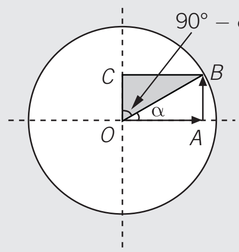


tangente

RAZONES DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Ángulos **complementarios** son aquellos cuya suma vale 90°.



El cateto opuesto al ángulo de $90° - \alpha$ (BC) es igual al cateto contiguo a α (OA): $\boldsymbol{sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $90° - \alpha$ (OC) es igual al cateto opuesto a α (AB): $\boldsymbol{cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha}$

$$\boldsymbol{tg\ (90° - \alpha)} = \frac{sen\ (90° - \alpha)}{cos\ (90° - \alpha)} = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \boldsymbol{\frac{1}{tg\ \alpha}}$$

EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 60°$, sabiendo que las razones del ángulo de 30° ($60° = 90° - 30°$) son:

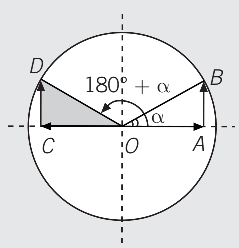
$$\boldsymbol{sen\ 30° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$sen\ 60° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{1}{tg\ 30°} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

1 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 75°, sabiendo que las razones de 15° son:**

$sen\ 15° = 0{,}259$ $\qquad cos\ 15° = 0{,}966$ $\qquad tg\ 15° = 0{,}268$

Ángulos **suplementarios** son aquellos cuya suma vale 180°.



El cateto opuesto al ángulo de $180° - \alpha$ (CD) es igual al cateto opuesto a α (AB): $\boldsymbol{sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $180° - \alpha$ (OC) es el contrario del cateto contiguo a α (OA): $\boldsymbol{cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha}$

$$\boldsymbol{tg\ (180° - \alpha)} = \frac{sen\ (180° - \alpha)}{cos\ (180° - \alpha)} = \frac{sen\ \alpha}{-cos\ \alpha} = \boldsymbol{-tg\ \alpha}$$

EJEMPLO

Obtén las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 120°$, sabiendo que las razones del ángulo de 60° ($120° = 180° - 60°$) son:

$$\boldsymbol{sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{cos\ 60° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{tg\ 60° = \sqrt{3}}$$

$$sen\ 120° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 120° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2} \qquad tg\ 120° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$$

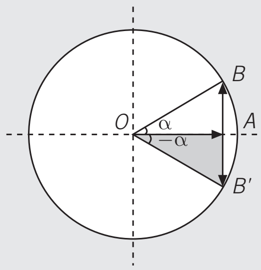
2 **Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 155°, sabiendo que las razones de 25° son:**

$sen\ 25° = 0{,}423$ $\qquad cos\ 25° = 0{,}906$ $\qquad tg\ 25° = 0{,}466$

8 OBJETIVO 5
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Los **ángulos opuestos** son los que miden igual, pero tienen distinto signo.



El cateto opuesto al ángulo $-\alpha$ (AB') es el contrario al cateto opuesto a α (AB): $\textbf{sen}\ (-\alpha) = -\textbf{sen}\ \alpha$

El cateto contiguo al ángulo $-\alpha$ (OA) es igual al cateto contiguo a α (OA): $\textbf{cos}\ (-\alpha) = \textbf{cos}\ \alpha$

$$\textbf{tg}\ (-\alpha) = \frac{-sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\textbf{tg}\ \alpha$$

EJEMPLO

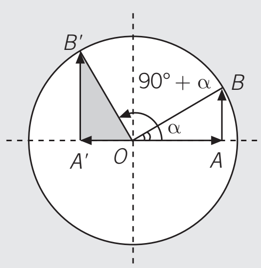
Obtén las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = -20°$, sabiendo que las razones del ángulo de 20° son:

$\textbf{sen}\ 20° = 0{,}342$ $\qquad$ $\textbf{cos}\ 20° = 0{,}940$ $\qquad$ $\textbf{tg}\ 20° = 0{,}364$

$sen\ (-20°) = -sen\ 20° = -0{,}342$ $\qquad$ $cos\ (-20°) = cos\ 20° = 0{,}940$ $\qquad$ $tg\ (-20°) = -tg\ 20° = -0{,}364$

1 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de $-45°$ (encuentra en la tabla del objetivo 2 las razones del ángulo de 45°).**

ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 90°



El cateto opuesto al ángulo de $90° + \alpha$ ($A'B'$) es el contrario al cateto contiguo a α (OA): $\textbf{sen}\ (90° + \alpha) = \textbf{cos}\ \alpha$

El cateto contiguo al ángulo de $90° + \alpha$ (OA') es igual al contrario del cateto opuesto a α (AB): $\textbf{cos}\ (90° + \alpha) = -\textbf{sen}\ \alpha$

$$\textbf{tg}\ (90° + \alpha) = \frac{sen\ (90° + \alpha)}{cos\ (90° + \alpha)} = \frac{cos\ \alpha}{-sen\ \alpha} = -\frac{\mathbf{1}}{\textbf{tg}\ \alpha}$$

EJEMPLO

Halla las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 120°$, conociendo las razones del ángulo de 30°.

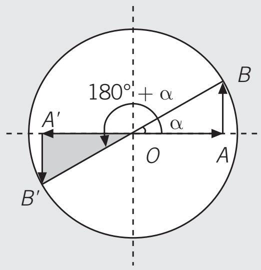
$$sen\ 120° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 120° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2} \qquad tg\ 120° = -\frac{1}{tg\ 30°} = -\frac{1}{1/\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

2 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 100°, sabiendo que $100° = 90° + 10°$.**

$sen\ 10° = 0{,}174$ $\qquad$ $cos\ 10° = 0{,}985$ $\qquad$ $tg\ 10° = 0{,}176$

ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180°



El cateto opuesto al ángulo de 180° + α ($A'B'$) es el contrario al cateto opuesto a α (AB): ***sen* (180° + α) = −*sen* α**

El cateto contiguo al ángulo de 180° + α (OA') es igual al contrario del cateto contiguo a α (OA): ***cos* (180° + α) = −*cos* α**

$$\textbf{\textit{tg}}\ \mathbf{(180° + \alpha)} = \frac{sen\ (180° + \alpha)}{cos\ (180° + \alpha)} = \frac{-sen\ \alpha}{-cos\ \alpha} = \textbf{\textit{tg}}\ \boldsymbol{\alpha}$$

EJEMPLO

Halla las razones trigonométricas del ángulo α = 240°, conociendo las razones del ángulo de 60°.

$sen\ 240° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $cos\ 240° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $tg\ 240° = tg\ 60° = \sqrt{3}$

3 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 250°, sabiendo que:**

$sen\ 70° = 0{,}940$ $\quad$ $cos\ 70° = 0{,}342$ $\quad$ $tg\ 70° = 2{,}747$

Ten en cuenta que 250° = 180° + 70°.

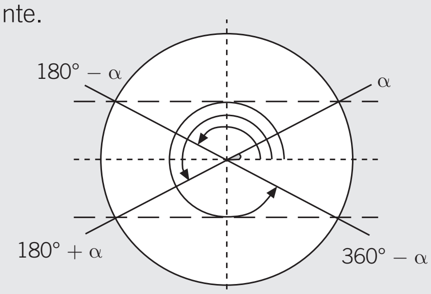
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 90°: Reducción al primer cuadrante

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo superior a 90° se pueden expresar en función de las razones de otro ángulo perteneciente al primer cuadrante.

1.er caso: para ángulos del segundo cuadrante.
$\beta = 180° - \alpha$

2.o caso: para ángulos del tercer cuadrante.
$\gamma = 180° + \alpha$

3.er caso: para ángulos del cuarto cuadrante.
$\varepsilon = 360° - \alpha$



4 **Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) 135°

Como 135° pertenece al segundo cuadrante, resulta que 135° = 180° − ______

$sen\ 135° = \_\_\_\_\_\_ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 135° = \_\_\_\_\_\_ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 135° = \_\_\_\_\_\_ = -1$

b) 210°

Como 210° es mayor de 180°, pertenece al tercer cuadrante, pues 210° = 180° + ______

$sen\ 210° = \_\_\_\_\_\_ = -\frac{1}{2}$

$cos\ 210° = \_\_\_\_\_\_ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 210° = \_\_\_\_\_\_ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

c) 330°

Como 330° pertenece al cuarto cuadrante, resulta que 330° = 360° − 30°.

$sen\ 330° = \_\_\_\_\_\_ = -\frac{1}{2}$

$cos\ 330° = \_\_\_\_\_\_ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 330° = \_\_\_\_\_\_ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) 420°

¿A qué cuadrante pertenece el ángulo de 420°? Si hacemos 420° = 360° + 60°, vemos que está situado en el primer cuadrante.

$sen\ 420° = sen\ 60° = \_\_\_\_\_\_$

$cos\ 420° = cos\ 60° = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 420° = tg\ 60° = \_\_\_\_\_\_$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 360°

Si el ángulo es mayor de 360°, hay que hallar su ángulo equivalente, restando el número entero de veces que contiene a 360. Sus razones trigonométricas son iguales que las del ángulo equivalente resultante.

EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 1.470°$.

Dividimos 1.470 entre 360:

$1.470 = 360 \cdot 4 + 30$ dividendo = divisor · cociente + resto

$sen\ 1.470° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$ $cos\ 1.470° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\ 1.470° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos.**

a) 840°

Divide 840 entre 360 y expresa:

$840 = 360 \cdot \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

$sen\ 840° = sen\ \_\_\_\_\_\_ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 840° = cos\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 840° = tg\ \_\_\_\_\_\_ = -\sqrt{3}$

b) 3.915°

Divide 3.915 entre 360 y expresa:

$3.915 = 360 \cdot \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

$sen\ 3.915° = sen\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$cos\ 3.915° = cos\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 3.915° = tg\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

c) 1.320°

Divide 1.320 entre 360 y expresa:

$1.320 = 360 \cdot \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

$sen\ 1.320° = sen\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$cos\ 1.320° = cos\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 1.320° = tg\ \_\_\_\_\_\_ = \sqrt{3}$

d) 780°

Divide 780 entre 360 y expresa:

$780 = 360 \cdot \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$

$sen\ 780° = sen\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$cos\ 780° = cos\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

$tg\ 780° = tg\ \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

OBJETIVO 6

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA: $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$

Esta relación se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo, junto con la relación que se deduce de la definición de tangente:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

Conociendo una de las razones trigonométricas de un ángulo, podemos calcular las restantes razones.

EJEMPLO

Sabiendo que $cos\ \alpha = \frac{4}{5}$**, calcula el seno y la tangente de dicho ángulo.**

$$sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\ \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \qquad tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

1 **Sabiendo que** $sen\ \alpha = 0{,}78$**; halla** $cos\ \alpha$ **y** $tg\ \alpha$**.**

2 **Dado** $cos\ \alpha = 0{,}32$**; obtén** $sen\ \alpha$ **y** $tg\ \alpha$**.**

EJEMPLO

Dado $tg\ \alpha = 2$**, calcula** $sen\ \alpha$ **y** $cos\ \alpha$**.**

Llamamos $sen\ \alpha = x$ y $cos\ \alpha = y$. Las relaciones entre las razones trigonométricas son:

$$\frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow (2y)^2 + y^2 = 1 \rightarrow 4y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 5y^2 = 1 \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0{,}2} = 0{,}447$$

$$x = 2y = 2 \cdot 0{,}447 = 0{,}894 = sen\ \alpha$$

$$y = cos\ \alpha = 0{,}447$$

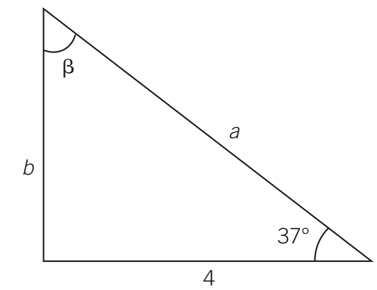
3 **Sabiendo que** $tg\ \alpha = 5$**, calcula** $sen\ \alpha$ **y** $cos\ \alpha$**.**

8 OBJETIVO 7
APLICACIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

EJEMPLO

Calcula lo que miden los lados *a* y *b*, y el ángulo β del triángulo de la figura.



Como los tres ángulos de un triángulo suman 180°, tenemos que:

$$180° = 90° + 37° + \beta \rightarrow \beta = 180° - 127° = 53°$$

Para calcular el otro cateto, *b*, aplicamos la definición de *tg* 37° y usamos la calculadora para hallar *tg* 37°:

$$tg\ 37° = \frac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot 0{,}75 = 3$$

Para hallar la hipotenusa *a* podemos utilizar tres métodos:

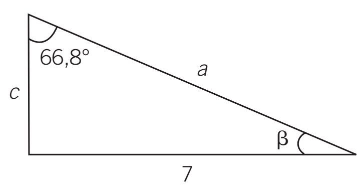
1.º Aplicar el teorema de Pitágoras.
2.º Utilizar la definición de *sen* 37°.
3.º Usar la definición de *cos* 37°.

Vamos a usar el segundo método:

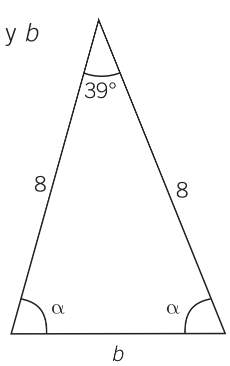
$$sen\ 37° = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{0{,}6} = 5$$

1 **Calcula, en cada triángulo, los lados y ángulos que se indican.**

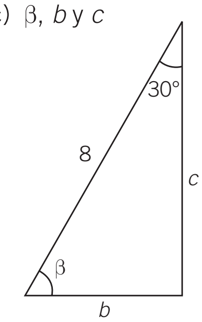
a) β, *a* y *c*



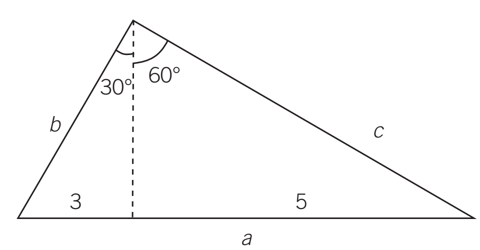
b) α y *b*



c) β, *b* y *c*

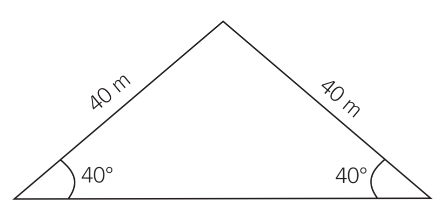


d) *a*, *b* y *c*



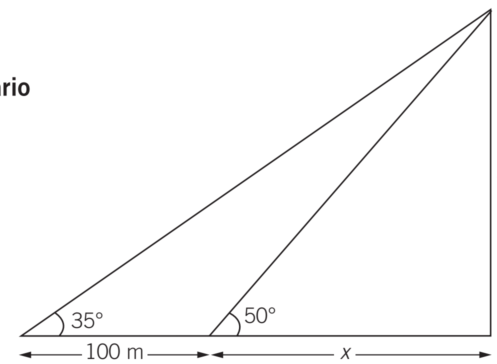
2 **Halla el área del siguiente triángulo.**

Trazamos la altura y, fijándonos en uno de los dos triángulos que se forman, hallamos *h* y la mitad de la base, $\frac{a}{2}$.



EJEMPLO

Desde un punto vemos el extremo superior del campanario de la iglesia bajo un ángulo de 50°. Si nos alejamos 100 m, lo vemos bajo un ángulo de 35°. Halla la altura del campanario y la distancia a la que nos encontramos inicialmente.



Este tipo de problemas se resuelven utilizando las tangentes de los dos ángulos:

$$tg\,50° = \frac{h}{x} \rightarrow h = 1{,}192x$$

$$tg\,35° = \frac{h}{100 + x} \rightarrow h = 0{,}7(100 + x)$$

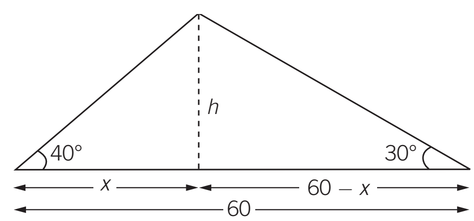
Igualando ambas, resulta:

$$1{,}192\,x = 0{,}7(100 + x) = 70 + 0{,}7x \rightarrow 0{,}492x = 70 \rightarrow x = 142{,}3 \text{ m}$$

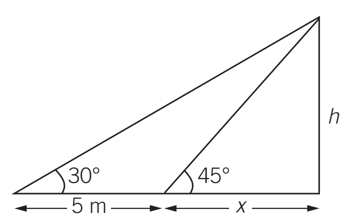
Sustituyendo en la primera de las ecuaciones, tenemos que la altura del campanario es:

$$h = 1{,}192x = 1{,}192 \cdot 142{,}3 = 169{,}6 \text{ m}$$

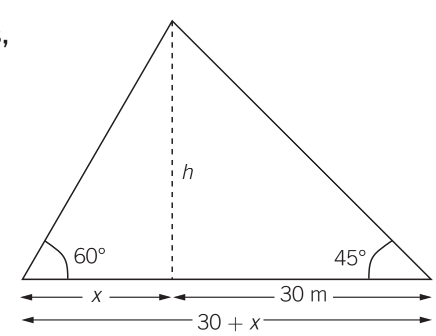
3 **Calcula la altura *h* y las distancias *x* y 60 — *x* de la figura. Utiliza las tangentes de los ángulos de 40° y 30°.**



4 **Halla los valores de *h* y *x*.**



5 **Determina la altura del árbol que, visto desde dos posiciones, distantes 30 m entre sí, forma la siguiente figura.**



ADAPTACIÓN CURRICULAR

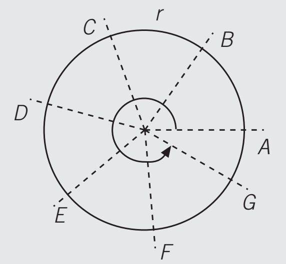
8 OBJETIVO 8
MEDIDA DE ÁNGULOS EN RADIANES

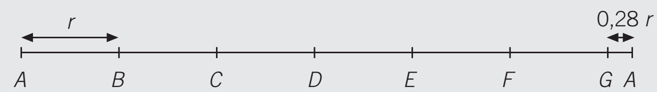
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Un **radián** es el ángulo cuyo arco tiene igual longitud que el radio de una circunferencia.
Como la longitud de cualquier circunferencia es $2\pi r$, la equivalencia entre grados y radianes es:

$$\mathbf{360° = 2\pi \text{ radianes}}$$

Podemos comprobar gráficamente esta equivalencia, ya que $2\pi = 6{,}28$, que es el número de secciones en las que se cumple que el arco es igual al radio en el que podemos dividir la circunferencia.





EJEMPLO

Expresa en radianes los ángulos de 90°, 180° y 270°.

Convertimos los grados en radianes aplicando una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 90° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{90 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{2} \qquad \left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 180° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{180 \cdot 2\pi}{360} = \pi$$

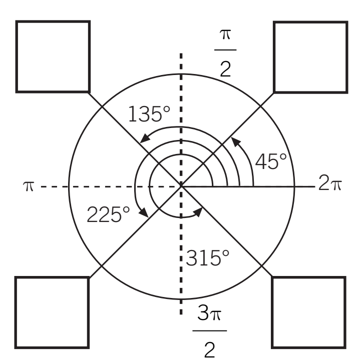
$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 270° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{270 \cdot 2\pi}{360} = \frac{3 \cdot 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

1 **Convierte en radianes los ángulos de la tabla.**

0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
0			$\frac{\pi}{2}$			π			$\frac{3\pi}{2}$			2π

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 30° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

2 **Convierte en radianes los ángulos correspondientes a cada casilla.**



9 Vectores y rectas

INTRODUCCIÓN

Los vectores son utilizados en distintas ramas de la Física que usan magnitudes vectoriales, por lo que es importante que los alumnos conozcan sus elementos y operaciones.

Se introducen también en esta unidad las distintas ecuaciones de la recta y cómo identificar el vector director, la pendiente y la ordenada en el origen.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Vector:* $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
- *Módulo:* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
- Ecuaciones de la recta:

  Vectorial: $(x, y) = (a, b) + t \cdot (v_1, v_2)$

  Paramétricas: $\begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b + tv_2 \end{cases}$

  Continua: $\dfrac{x - a}{v_1} = \dfrac{y - b}{v_2}$

  Punto-pendiente: $y - b = m(x - a)$

  Explícita: $y = mx + n$

  General: $Ax + By + C = 0$

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Identificar los elementos de un vector.	• Coordenadas de un vector. • Módulo, dirección y sentido. • Vectores equivalentes y paralelos.	• Cálculo del módulo de un vector a partir de sus coordenadas. • Identificación de vectores equivalentes y paralelos.
2. Realizar operaciones con vectores.	• Suma y resta de vectores. • Multiplicación de un vector por un número. • Suma de un punto y un vector.	• Operaciones con vectores gráfica y analíticamente. • Operaciones con puntos y vectores gráfica y analíticamente.
3. Expresar las rectas mediante sus diferentes ecuaciones.	• Ecuaciones vectorial y paramétricas de una recta. • Ecuaciones continua y punto-pendiente. • Vector director, pendiente y ordenada en el origen de la recta. • Ecuaciones explícita y general.	• Expresión de las distintas ecuaciones de una recta: vectorial, paramétricas, continua, punto-pendiente, explícita y general, dados dos de sus puntos. • Obtención del vector director, la pendiente y la ordenada en el origen de una recta.
4. Posiciones relativas de dos rectas.	• Rectas paralelas, coincidentes y secantes. • Rectas paralelas a los ejes de coordenadas.	• Estudio de la posición relativa de dos rectas. • Identificación de rectas paralelas a los ejes de coordenadas.

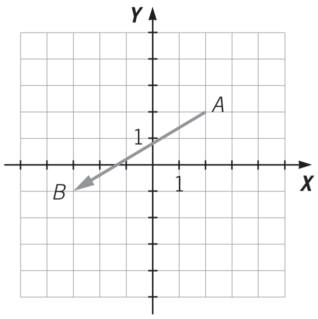
9 OBJETIVO 1
IDENTIFICAR LOS ELEMENTOS DE UN VECTOR

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Vector:** segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ determinado por dos puntos: $A\ (a_1, a_2)$, origen del vector, y $B\ (b_1, b_2)$, extremo del vector.
- **Coordenadas** del vector: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$
- **Módulo:** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

EJEMPLO

Calcula las coordenadas y el módulo del siguiente vector.



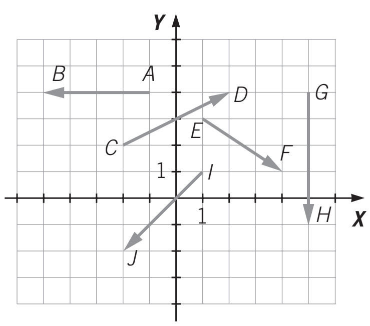
Origen: $A\ (2, 2)$

Extremo: $B\ (-3, -1)$

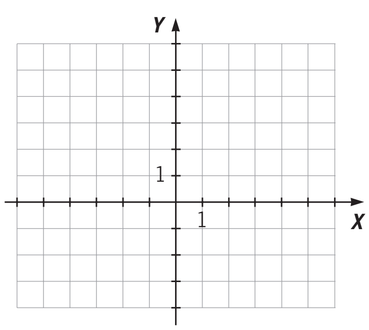
Coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (-3 - 2, -1 - 2) = (-5, -3)$

Módulo: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

1 **¿Cuáles son las coordenadas y el módulo de los siguientes vectores?**



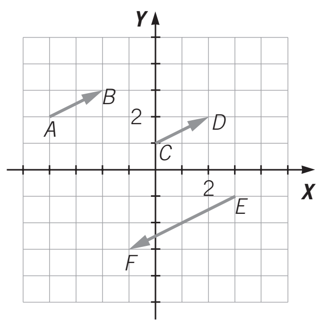
2 **Dados los puntos $A(3, 6)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -5)$ y $D(-2, 7)$, representa y calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DA}$.**



- **Dirección** de un vector es la recta sobre la que está situada el vector.
- **Sentido** de un vector es la forma de recorrer el segmento *AB*; es decir, de fijar el origen y el extremo.
- **Vectores equivalentes** son aquellos que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, por lo que sus coordenadas son iguales.
- **Vectores paralelos** son los que tienen la misma dirección, sus coordenadas son proporcionales.

EJEMPLO

Determina si estos vectores son equivalentes.



$\overrightarrow{AB} = (-2 - (-4), 3 - 2) = (2, 1)$

$\overrightarrow{CD} = (2 - 0, 2 - 1 = (2, 1)$

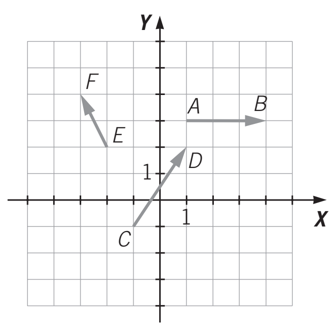
$\overrightarrow{EF} = (-1 - 3, -3 - (-1)) = (-4, -2)$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen las mismas coordenadas; por tanto, son equivalentes.

Las coordenadas de $\overrightarrow{EF}$ son proporcionales a las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$: $\dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{-2}$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son paralelos.

3 **Dibuja dos vectores equivalentes y dos paralelos, pero que no sean equivalentes, a cada uno de los dados. Demuestra numéricamente su equivalencia.**



4 **Dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, siendo $A(4, -1)$ y $B(-5, 0)$, y contesta a las siguientes cuestiones.**

a) ¿Son equivalentes?

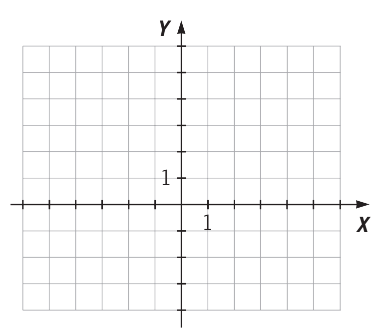
b) ¿Y paralelos?

c) ¿Tienen la misma dirección?

d) ¿Cómo son sus sentidos?

e) ¿Cuáles son el origen y el extremo de cada uno?

f) Calcula sus módulos.

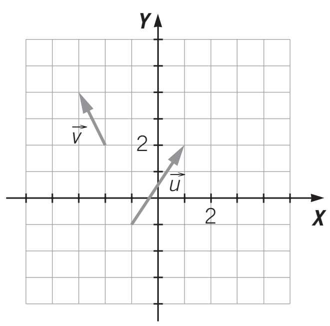


9 OBJETIVO 2
REALIZAR OPERACIONES CON VECTORES

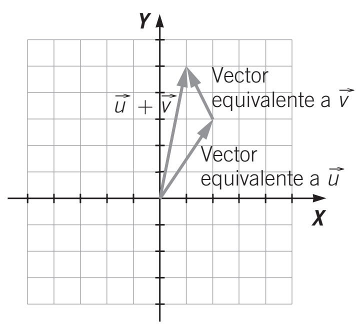
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

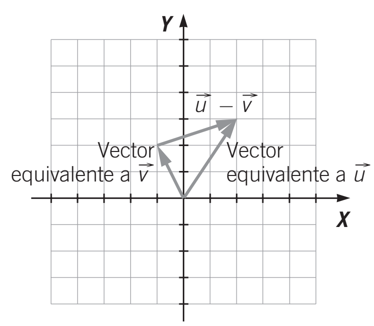
- Para **sumar** gráficamente dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se toma uno ellos, $\vec{u}$, y con origen en su extremo se dibuja un vector equivalente a $\vec{v}$. La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es otro vector cuyo origen es el origen de $\vec{u}$, y su extremo es el extremo de $\vec{v}$.
- En coordenadas, si las coordenadas de $\vec{u}$ son (u_1, u_2) y las coordenadas de $\vec{v}$ son (v_1, v_2), el **vector suma** es: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- Para **restar** gráficamente dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se toman vectores equivalentes a ambos que tengan el mismo origen, y la diferencia es otro vector que tiene como origen el extremo de $\vec{v}$, y como extremo, el extremo de $\vec{u}$.
- En coordenadas, si las coordenadas de $\vec{u}$ son (u_1, u_2) y las coordenadas de $\vec{v}$ son (v_1, v_2), el **vector diferencia** es: $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

EJEMPLO



Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, calcula gráficamente y por coordenadas los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.





$\vec{u} = (1 - (-1), 2 - (-1)) = (2, 3)$

$\vec{v} = (-3 - (-2), 4 - 2) = (-1, 2)$

$\vec{u} + \vec{v} = (2 + (-1), 3 + 2) = (1, 5)$

$\vec{u} - \vec{v} = (2 - (-1), 3 - 2) = (3, 1)$

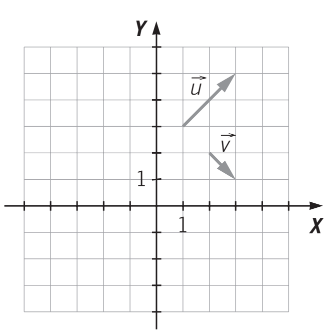
1 **Las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son:**

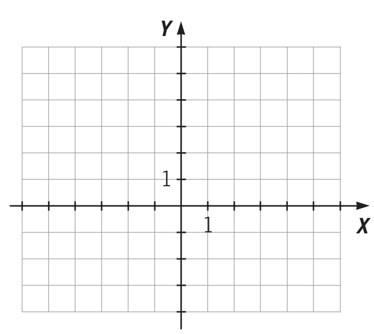
$A(-1, 3)$ $B(0, 6)$ $C(4, -7)$ $D(-4, 0)$

Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}$ f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

2 **Halla gráficamente el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ y el vector diferencia $\vec{u} - \vec{v}$.**





- Para **multiplicar un vector $\vec{u}$ por un número** real k se multiplica el módulo del vector por el número real, y se mantiene la dirección del vector. El sentido será el mismo si k es positivo, y contrario, si k es negativo.
- En coordenadas, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, el **producto de un número real** k por un vector $\vec{u}$ se calcula multiplicando cada coordenada por el número k.

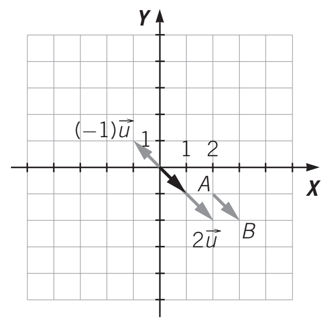
EJEMPLO

Dado el vector $\vec{u}$, de origen $A(2, -1)$ y extremo $B(3, -2)$, calcula gráfica y analíticamente el producto de $\vec{u}$ por los números 2 y -1.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3 - 2, -2 - (-1)) = (1, -1)$

$2\vec{u} = 2 \cdot (1, -1) = (2, -2)$

$(-1)\vec{u} = (-1) \cdot (1, -1) = (-1, 1)$



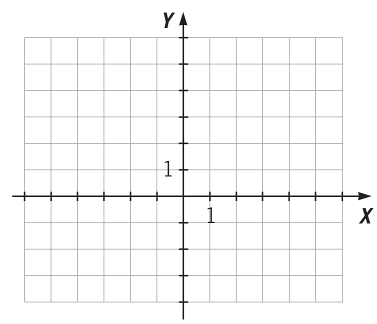
3 **Sabiendo que $A(-3, 3)$ y $B(-1, 5)$, calcula gráfica y analíticamente $k \cdot AB$.**

a) $k = 2$

b) $k = -4$

c) $k = \dfrac{1}{2}$

d) $k = 3$



- La suma de un punto A más un vector $\vec{u}$ es otro punto B que resulta de trasladar el punto A según el vector $\vec{u}$.
- En coordenadas, si $A(a_1, a_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$, su suma es el punto $B(b_1, b_2) = (a_1 + u_1, a_2 + u_2)$.

EJEMPLO

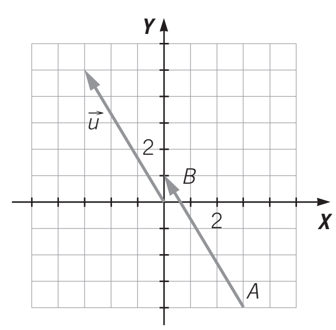
Resuelve los apartados.

a) Si $A(3, -4)$ y el vector $\vec{u} = (-3, 5)$, calcula las coordenadas del punto $B = A + \vec{u}$, y representa el resultado gráficamente.

b) Si $A'(-3, 0)$ es el trasladado de A por el vector $\vec{v}$, ¿cuáles son las coordenadas de $\vec{v}$?

a) $B = A + \vec{u} = (3, -4) + (-3, 5) = (3 + (-3), -4 + 5) = (0, 1)$

b) $A' = A + \vec{v} \rightarrow (-3, 0) = (3 + v_1, -4 + v_2) \rightarrow v_1 = -6$ y $v_2 = 4$



4 **Si trasladamos el punto A por el vector $\vec{u}$ para obtener el punto B, calcula los valores x e y. Representa los puntos trasladados.**

a) $A(0, -5)$ $\quad \vec{u} = (x, y) \rightarrow B(5, 0)$

b) $A(-3, x)$ $\quad \vec{u} = (4, 3) \rightarrow B(y, 2)$

9 OBJETIVO 3

EXPRESAR LAS RECTAS MEDIANTE SUS DIFERENTES ECUACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Si $A(a, b)$ es un punto de la recta, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es un vector de la recta, y t es un número real, cualquier punto $P(x, y)$ de la recta se puede obtener con la **ecuación vectorial**:
$$(x, y) = (a, b) + t \cdot (v_1, v_2)$$
- El vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se llama **vector director** de la recta.
- Las **ecuaciones paramétricas** de la recta son: $\left.\begin{matrix} x = a + t \cdot v_1 \\ y = b + t \cdot v_2 \end{matrix}\right\}$

EJEMPLO

Dados los puntos $A(-2, 5)$ y $B(-1, 1)$ de una recta:

a) Calcula la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas.

b) Estudia si el punto $C(-1, 9)$ pertenece a la recta.

Como la recta pasa por los puntos A y B, podemos tomar como vector director de la recta $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1 - (-2), 1 - 5) = (1, -4)$.

a) Las ecuaciones pedidas son:

- Ecuación vectorial: $(x, y) = (-2, 5) + t \cdot (1, -4)$
- Ecuaciones paramétricas: $\left.\begin{matrix} x = -2 + t \\ y = 5 - 4t \end{matrix}\right\}$

b) En las ecuaciones paramétricas sustituimos las coordenadas del punto C por x e y: $\left.\begin{matrix} -1 = -2 + t \\ 9 = 5 - 4t \end{matrix}\right\}$.

Despejamos t en las dos ecuaciones: $\left\{\begin{matrix} t = -1 + 2 = 1 \\ t = \dfrac{9 - 5}{-4} = 1 \end{matrix}\right.$. Como en ambos casos se obtiene el mismo valor, se determina que $C(-1, 9)$ pertenece a la recta.

1 **Dada la siguiente ecuación vectorial de una recta: $(x, y) = (4, 8) + t \cdot (-3, 5)$, indica un punto de esa recta y su vector director.**

2 **Escribe la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(-5, 2)$ y $B(0, 1)$.**

3 **Estudia si los puntos $A(7, 4)$, $B(1, 2)$ y $C(0, 0)$ pertenecen o no a la recta:** $\left.\begin{matrix} x = 3 + 2t \\ y = 2t \end{matrix}\right\}$

Si $A(a, b)$ es un punto concreto de la recta, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es su vector director y $P(x, y)$ es un punto genérico, tenemos las siguientes ecuaciones de la recta.

- **Ecuación continua:** $\dfrac{x-a}{v_1} = \dfrac{y-b}{v_2}$
- **Ecuación punto-pendiente:** $y - b = m(x - a)$
- **Ecuación explícita:** $y = mx + n$
- $m = \dfrac{v_1}{v_2}$ es la **pendiente de la recta** y $n = b - \dfrac{v_1}{v_2}a$ es la **ordenada en el origen**.

EJEMPLO

Dada la recta expresada en forma vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t \cdot (4, 3)$

a) Halla sus ecuaciones en forma continua, punto-pendiente y explícita.

b) Indica su pendiente y su ordenada en el origen.

a) Un punto de la recta es $A(2, 1)$, su vector director es $\vec{v} = (4, 3)$, y la ecuación continua es: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3}$. Multiplicando en cruz, se tiene que $4(y - 1) = 3(x - 2)$, obteniendo la ecuación punto-pendiente de la recta: $y - 1 = \dfrac{3}{4}(x - 2)$

Por último, despejando y, y operando obtenemos la ecuación explícita de la recta:

$y - 1 = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2} \rightarrow y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

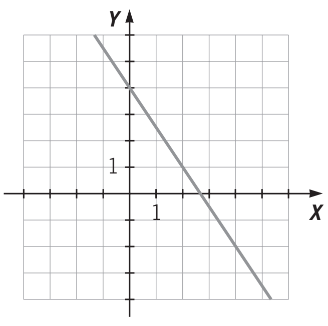
b) La pendiente es $m = \dfrac{3}{4}$ y la ordenada en el origen es $n = -\dfrac{1}{2}$.

4 **Dada la recta de la gráfica, se pide:**

a) Las coordenadas de dos de sus puntos.

b) El vector director.

c) Su ecuación continua.



5 **Expresa la ecuación que pasa por el punto $A(1, -2)$ y que tiene por vector director $\vec{v} = (-1, 1)$ mediante sus ecuaciones:**

a) Punto-pendiente.

b) Explícita.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

La **ecuación general o implícita** de la recta es de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

donde *A*, *B* y *C* son números reales.

El vector director de la recta es $\vec{v} = (B, -A)$.

La pendiente de la recta es $m = \dfrac{-A}{B}$.

La ordenada en el origen o punto de corte con el eje *Y* es $n = \dfrac{-C}{B}$.

EJEMPLO

Resuelve los apartados.

a) Da la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $P(1, -2)$ y $Q(0, 3)$.

b) Indica cuáles son la pendiente y la ordenada en el origen.

a) Calculamos el vector director: $\overrightarrow{PQ} = (0 - 1, 3 - (-2)) = (-1, 5) = (B, -A)$

Por lo tanto $-5x - y + C = 0$

Para hallar el valor de *C* sustituimos uno de los puntos dados; por ejemplo, $Q(0, 3)$, y despejamos *C*: $-5 \cdot 0 - 3 + C = 0 \rightarrow C = -3$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-5x - y - 3 = 0$

b) La pendiente es $m = \dfrac{5}{-1} = -5$ y la ordenada en el origen es $n = \dfrac{3}{-1} = -3$.

6 **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(2, 2)$ y $B(-2, 3)$.**

7 **A partir de la ecuación $2x - 3y + 2 = 0$ de una recta, halla el vector director, la pendiente y la ordenada en el origen.**

8 **¿Cuál es la ecuación general o implícita de la recta cuya ecuación explícita es $y = 3x + 4$?**

9 **Dada la ecuación $-2x + y - 8 = 0$ de una recta, escribe su ecuación punto-pendiente.**

OBJETIVO 4

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

POSICIONES	VECTORES DIRECTORES	PENDIENTES	ECUACIÓN GENERAL
Paralelas (igual dirección y sin puntos comunes)	Proporcionales $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} = \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Iguales $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coinidentes (igual dirección y todos los puntos comunes)	Proporcionales $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} = \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Iguales $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Secantes (distinta dirección y un punto en común)	No proporcionales $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} \neq \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Distintas $m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

EJEMPLO

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) r: $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1}$

s: $x - 3y - 12 = 0$

b) r: $y = 5x - 2$

s: $(x, y) = (2, -1) + t\,(-2, 1)$

a) El vector director de r es $(3, 1)$ y el vector director de s es $(-3, -1)$. Los vectores directores son proporcionales: $\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$.

Para ver si las rectas son paralelas o coincidentes tomamos el punto $(-2, 0)$ de r y lo sustituimos en s para ver si cumple o no su ecuación: $-2 - 3 \cdot 0 - 12 \neq 0$, y se deduce que no pertenece a s. Las rectas r y s son paralelas.

b) La pendiente de r es $m = 5$ y el vector director de s es $\vec{v} = (-2, 1)$, por lo que la pendiente de s es $m' = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \neq 5$. Las rectas r y s son secantes.

1 **Escribe la ecuación de una recta paralela a la recta r: $y = -x + 5$ que pase por el punto (0, 0) de todas las formas indicadas.**

a) Vectorial. b) Punto-pendiente. c) General.

2 **Escribe la ecuación de una recta secante a la recta r: $y = -x + 5$ que pase por el punto (0, 0) de todas las formas indicadas.**

a) Vectorial. b) Punto-pendiente. c) General.

3 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.**

a) $r: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{-2}$
$s: x + 2y - 1 = 0$

b) $r: y = 2x - 1$
$s: y - 3 = -(x + 2)$

c) $r: -3x - 3y + 3 = 0$
$s: x + y + 2 = 0$

Dada la recta que pasa por un punto $A(a, b)$, cuyo vector director es $\vec{v} = (v_1, v_2)$, si una de sus dos coordenadas es cero, la recta es paralela a uno de los ejes de coordenadas.

- Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 = 0$, la ecuación de la recta es $y = b$. Es una recta paralela al eje X.
- Si $v_1 = 0$ y $v_2 \neq 0$, la ecuación de la recta es $x = a$. Es una recta paralela al eje Y.

Las rectas paralelas a los ejes no se pueden expresar mediante una ecuación en forma continua, ya que una de las coordenadas de su vector director es cero.

EJEMPLO

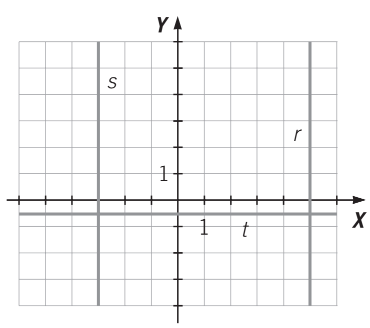
Expresa la recta que pasa por el punto $A(0, 3)$ y $B(4, 3)$ mediante sus ecuaciones:

a) Vectorial. **b) General.**

a) Su vector director es $\overrightarrow{AB} = (4 - 0, 3 - 3) = (4, 0)$, y pasa por cualquiera de los puntos dados, por ejemplo, por A. La ecuación vectorial es: $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (4, 0)$

b) Puesto que los dos puntos dados tienen como segunda coordenada 3, la ecuación general es: $y = 3$.

4 **Escribe las ecuaciones general y paramétricas de las siguientes rectas.**



5 **Expresa, mediante las ecuaciones vectorial y explícita, las siguientes rectas.**

a) Paralela al eje Y, y que pasa por el punto $A\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

b) Paralela al eje X, y que pasa por el punto $B(0, 7)$.

10 Funciones

INTRODUCCIÓN

La representación gráfica de las funciones es la forma más adecuada de entender la relación entre las variables. Estas gráficas se usan en diferentes disciplinas para interpretar y deducir las leyes que rigen determinados fenómenos.

Uno de los objetivos principales de esta unidad es que los alumnos tengan clara la relación entre la representación gráfica de una función y su expresión algebraica, y que sean capaces de realizar ambas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función*: correspondencia entre variables que asocia a una de ellas, como máximo, un único valor de la otra.
- *Variable independiente*: puede tomar cualquier valor. *Variable dependiente*: su valor depende del valor que tome la variable independiente.
- *Dominio*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. *Recorrido*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
- *Función discontinua*: presenta uno o varios puntos en los que una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer las expresiones de una función.	• Formas de expresar la relación entre dos variables.	• Obtención de unas expresiones de una función a partir de otras.
2. Calcular el dominio y el recorrido de una función.	• Variable independiente y variable dependiente. • Dominio y recorrido de una función.	• Cálculo del dominio y el recorrido de una función.
3. Distinguir entre funciones continuas y discontinuas.	• Función continua. • Función discontinua.	• Diferenciación de ambos tipos de funciones.
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos de una gráfica.	• Función creciente y función decreciente. • Máximos y mínimos.	• Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. • Determinación de los máximos y mínimos.
5. Puntos de corte con los ejes.	• Puntos de corte con el eje *Y*. • Puntos de corte con el eje *X*.	• Cálculo de los puntos de corte con ambos ejes.
6. Conocer las funciones definidas por trozos de recta.	• Funciones definidas por trozos de recta.	• Representación de una función definida a trozos.

10 OBJETIVO 1
CONOCER LAS EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

- **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema.
- **Mediante tablas:** los valores de la variable independiente y sus valores asociados para la variable dependiente se organizan en forma de tabla.
- **Mediante gráficos:** nos dan una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación en unos ejes de coordenadas.
- **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** con ella podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente, y viceversa.

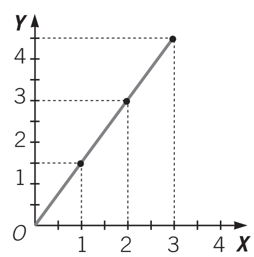
EJEMPLO

El precio de las naranjas es 1,50 €/kg. Vamos a expresarlo de las maneras que acabamos de explicar.

- **Mediante un texto:** el importe que se paga es el producto de 1,50 € por el número de kilogramos adquiridos.
- **Mediante una tabla:** el número de kilogramos es la variable independiente y el importe es la variable dependiente.

KILOGRAMOS DE NARANJAS	1	2	3	…
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	…

- **Mediante un gráfico:** representamos la situación mediante puntos en un sistema de ejes de coordenadas.



- **Mediante una fórmula:** si llamamos P al importe en euros y n al número de kilos de naranjas, la fórmula es: $P = 1,5 \cdot n$.

1 **En un aparcamiento vemos la siguiente tarifa de precios. Obtén la tabla, el gráfico y la fórmula que expresan la relación entre el tiempo (número de horas) que permanece el coche en el aparcamiento y el dinero que se abona.**

TARIFAS

1.ª hora o fracción .... 2 €

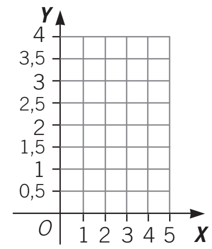
Cada hora adicional o fracción .... 1,50 €

Máximo: 10 € por 24 horas

La **gráfica** de una función es la representación del conjunto de puntos que definen esa función.

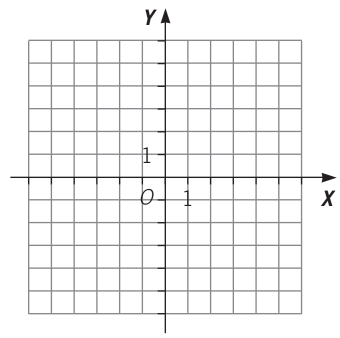
2 **La tabla expresa la relación entre los litros de leche adquiridos y su precio. Obtén la gráfica y la fórmula que representa la relación entre ambas magnitudes.**

LITROS DE LECHE	PRECIO (€)
1	0,75
2	1,50
3	2,25
4	3



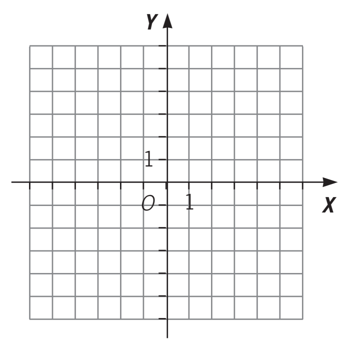
3 **Dada la función mediante la fórmula $y = 3x - 1$, obtén su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



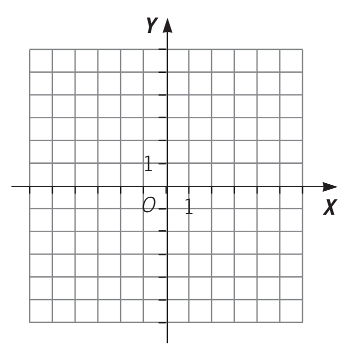
4 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^2 - 1$, halla su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



5 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^3 + 1$, determina su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
−1	
2	
−2	



10 OBJETIVO 2
CALCULAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función** $y = f(x)$ es una relación entre dos magnitudes o variables, tal que a cada valor de la variable independiente x se le asocia, como máximo, un único valor de la variable dependiente y.

Para indicar que a cada valor de x se le asocia un único valor de y se escribe: $x \rightarrow f(x)$.

Se llama **original** al valor x, e **imagen** al valor y; o también puede ser el valor y la **imagen** y el valor x su **antiimagen**.

El conjunto de valores que puede tomar la variable x se llama **dominio** de la función, y el conjunto de valores que puede tomar la variable y se denomina **recorrido** de la función.

EJEMPLO

Halla el dominio y el recorrido de las funciones.

a) $f(x) = -5x - 2$ En este caso, la variable independiente x puede tomar cualquier valor real, y para cada uno de esos números reales se obtiene un valor real de la variable dependiente y. Así, tenemos que: Im $f = \mathbb{R}$, Dom $f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ En este caso, la variable independiente x puede tomar cualquier valor real, salvo aquel valor para el que se anula el denominador, ya que no existe la división entre cero. Por tanto, el dominio es: Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$.
El recorrido es todos los números reales, Im $f = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ En este caso, la variable independiente puede tomar cualquier valor real positivo mayor o igual que cero, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Así, el dominio es Dom $= \mathbb{R}^+$. El recorrido es el conjunto de los números reales positivos, $R = \mathbb{R}^+$.

1 **Sea la función $f(x)$ que asocia a cada número real su doble más 5 unidades.**

a) Halla su fórmula o su expresión algebraica.

b) Calcula $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Obtén la antiimagen de $\dfrac{16}{3}$.

d) Determina su dominio y su recorrido.

2 **Dada la relación que asocia a cada número real el inverso de la resta de ese número menos 3:**

a) Determina si es o no una función y, en caso de serlo, obtén su fórmula.

b) Halla $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Calcula la antiimagen de $\dfrac{1}{4}$.

d) Determina su dominio y su recorrido.

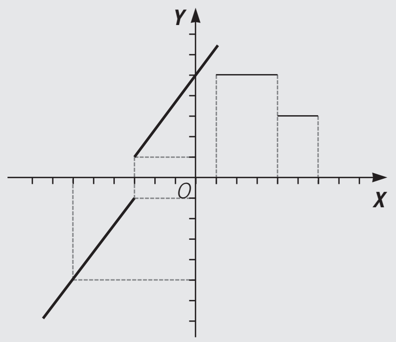
OBJETIVO 3

DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

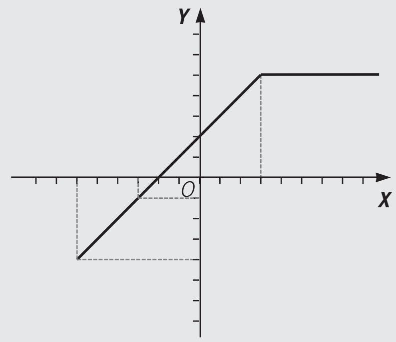
FUNCIÓN NO CONTINUA

Una función no es continua si tiene puntos en los cuales una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente. Esos puntos se denominan puntos de discontinuidad.



FUNCIÓN CONTINUA

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, no presenta puntos de discontinuidad.



1 **En una tienda de fotocopias tienen la siguiente lista de precios.**

CANTIDAD	PRECIO POR COPIA
Menos de 10	0,06 €
De 11 a 20	0,04 €
De 21 a 50	0,03 €
Más de 50	0,02 €

Representa la función que relaciona el número de fotocopias realizadas y el importe total.

¿Es una función continua?

2 **La tarifa por la bajada de bandera en un taxi es 2 € y por cada 500 metros recorridos hay que abonar 0,50 €.**

a) Construye la tabla de valores y representa la función.
b) ¿Es una función continua o discontinua?
c) Calcula el precio de un recorrido de 3 km.

10 OBJETIVO 4
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA GRÁFICA

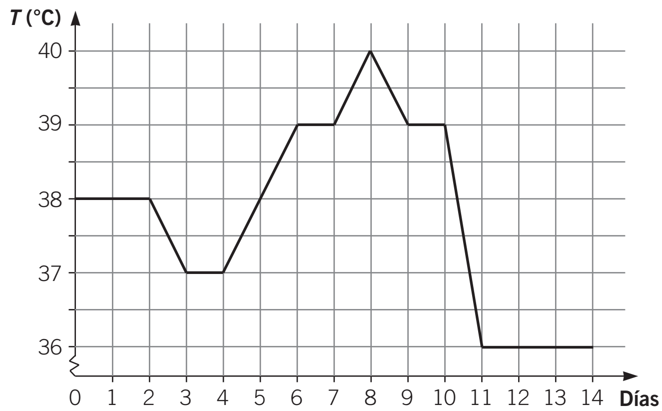
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dados una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_1) - f(x_2) > 0$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2.
- Si $f(x_1) - f(x_2) < 0$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2.

EJEMPLO

La temperatura de un enfermo evolucionó a lo largo de 14 días según se muestra en el gráfico siguiente.



a) ¿En qué días subió la temperatura?
b) ¿En qué días permaneció constante?
c) ¿Y en qué días bajó?
d) ¿Cuál fue la temperatura máxima alcanzada? ¿En qué día la alcanzó?
e) ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada? ¿En qué día la alcanzó?
f) Si le dieron una pastilla los días en que la temperatura subió por encima de 38 ºC, ¿qué días tomó la pastilla?

a) Vemos que la temperatura subió los días 5.º, 6.º y 8.º. Los intervalos de crecimiento de la función son (4, 6) y (7, 8).

b) Permaneció constante los días 1.º, 2.º, 4.º, 7.º, 10.º, 12.º, 13.º y 14.º.

c) La temperatura descendió los días 3.º, 9.º y 11.º. Los intervalos de decrecimiento de la función son (2, 3), (8, 9) y (10, 11).

d) La temperatura máxima fue de 40 °C, y la alcanzó el día 8.º.

e) La temperatura mínima fue de 36 °C. La alcanzó el undécimo día y la mantuvo hasta el final.

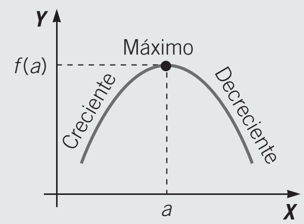
f) Tomó la pastilla los días 6.º, 7.º, 8.º, 9.º, 10.º y 11.º.

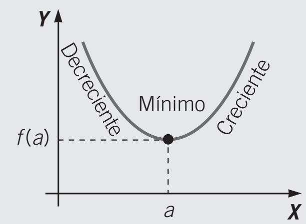
1 **Representa una función definida por los siguientes valores.**

$f(x = 0) = 2$	$f(2) = 1$	$f(4) = 3$	$f(6) = 6$	$f(8) = 4$
$f(1) = 2$	$f(3) = 3$	$f(5) = 5$	$f(7) = 4$	$f(9) = 2$

a) ¿En qué tramos la función es creciente?
b) ¿En qué tramos es decreciente?
c) ¿Y en qué tramos es constante?
d) ¿Tiene algún punto de discontinuidad?

- Una función tiene un **máximo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función es creciente, y a la derecha, la función es decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función es decreciente, y a la derecha, la función es creciente.





2 **Dada la función $y = x^2 - 1$, construye su tabla de valores, represéntala y estudia si es continua o discontinua, su crecimiento y decrecimiento, y si tiene máximos y mínimos.**

3 **En la siguiente tabla aparecen las temperaturas medias registradas durante un año en una localidad.**

MES	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
***T* (°C)**	4	9	11	16	15	22	26	25	22	14	11	7

a) Dibuja una gráfica a partir de la tabla.
b) La función representada, ¿es continua?
c) Di cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) ¿Tiene algún máximo o mínimo?

10 OBJETIVO 5
PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

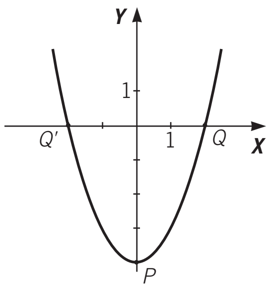
Los puntos en los que la función $y = f(x)$ corta a los ejes se calculan de esta manera.

- **Puntos de corte con el eje *Y*:** haciendo $x = 0$ se obtiene $f(0)$. Los puntos de corte son del tipo $P(0, f(0))$.
- **Puntos de corte con el eje *X*:** haciendo $f(x) = 0$ se obtiene el valor o los valores correspondientes de x. Los puntos de corte son del tipo $Q(x, 0)$.

EJEMPLO

La función $f(x) = x^2 - 4$ tiene estos puntos de corte.

- Con el eje *Y*, si $x = 0 \rightarrow y = 0 - 4 = -4$.
  Tiene un único punto de corte con el eje *Y*: $P(0, -4)$.
- Con el eje *X*, si $y = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$.
  Tiene dos puntos de corte con el eje *X*: $Q(2, 0)$ y $Q'(-2, 0)$.



1 **Dadas las siguientes funciones, resuelve.**

1.º Construye su tabla de valores y dibuja la función.
2.º Determina su dominio y su recorrido.
3.º Di cuáles son sus intervalos de crecimiento o decrecimiento, y si tienen algún máximo o mínimo.
4.º Halla los puntos de corte con los ejes, si los hubiera.

a) $f(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{-x + 6}{3}$

OBJETIVO 6

CONOCER LAS FUNCIONES DEFINIDAS POR TROZOS DE RECTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

EJEMPLO

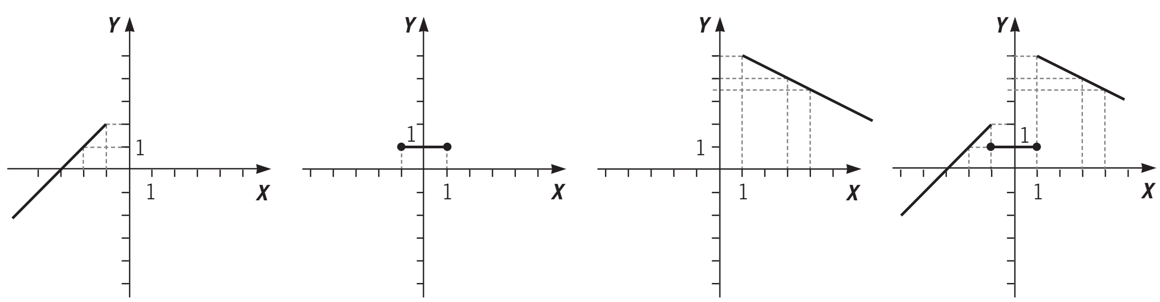
Consideramos la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Esta función tiene tres trozos rectos que determinan el dominio formado por los números reales.
Para cada intervalo construimos su tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	−4	−3	−2
***f*(*x*)**	−1	0	1

x	−1	0	1
***f*(*x*)**	1	1	1

x	2	3	4
***f*(*x*)**	9/2	4	7/2



Señalamos con un punto (•) para indicar que el punto está incluido en dicho trozo de recta.

La función $f(x)$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, es creciente en el primer trozo y decreciente en el tercero.

1 **Representa la función.**

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -4 \\ -\dfrac{1}{2}x - 3 & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ \dfrac{2}{5}x - 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -5 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

2 **Representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \le 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{x+1}{3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le -2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \le 0 \\ x - 7 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 7x & \text{si } 3 < x \le 5 \\ 7x - 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

11 Funciones polinómicas, racionales y exponenciales

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de esta unidad es que los alumnos aprendan a hallar la ecuación de una recta dados dos puntos por los que pasa, o su pendiente y un punto.

Estudiaremos la función cuadrática más simple, $y = ax^2$, su representación gráfica, y sus traslaciones. La función cuadrática en su forma general, $y = ax^2 + bx + c$, supone mayores dificultades.

A los alumnos les cuesta diferenciar las funciones potenciales de las funciones exponenciales, por lo que habrá dedicar el tiempo necesario a trabajar este aspecto.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función de proporcionalidad directa*: $y = mx$.
- *Función afín*: $y = mx + n$
- *Función cuadrática*: $y = ax^2$. Su representación es una parábola.
- *Función de proporcionalidad inversa*: $y = \frac{1}{x}$
- *Funciones exponenciales:* $f(x) = a^x$, $f(x) = a^x + b$ y $f(x) = a^{(x+b)}$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer la función de proporcionalidad directa.	• Función lineal o de proporcionalidad directa.	• Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx$.
2. Conocer la función afín.	• Función afín. Representación gráfica.	• Representación de funciones de la forma $y = mx + n$.
3. Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Cálculo de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, o de la recta de la que conocemos su pendiente y un punto por el que pasa.
4. Distinguir entre rectas paralelas y rectas secantes.	• Posición relativa de dos rectas.	• Determinación de si dos rectas son paralelas o secantes. • Cálculo del punto de corte de dos rectas secantes.
5. Conocer la función cuadrática $y = ax^2$.	• Parábolas de ecuación $y = ax^2$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2$.
6. Efectuar traslaciones de la función $y = x^2$.	• Traslaciones verticales y horizontales de $y = x^2$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2 + k$, $y = (x + h)^2$ y $y = (x + h)^2 + k$.
7. Representar la función $y = ax^2 + bx + c$.	• Gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.
8. Conocer la función de proporcionalidad inversa.	• Función de proporcionalidad inversa.	• Representación de hipérbolas de ecuación $y = \frac{1}{x}$.
9. Reconocer funciones exponenciales.	• Definición de la función $f(x) = a^x$. • Gráficas y características de las funciones: $f(x) = a^x + b$ y $f(x) = a^{x+b}$.	• Estudio de las características de la función $f(x) = a^x$. • Construcción de tablas y gráficas de: $f(x)= a^x + b$ y $f(x) = a^{x+b}$
10. Aplicar funciones exponenciales al interés compuesto.	• Definición de la función capital final para el interés compuesto.	• Cálculo del capital final.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

11 OBJETIVO 1
CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función de proporcionalidad directa**, o **función lineal**, se expresa de la forma: $\boldsymbol{y = m \cdot x}$, siendo m un número cualquiera.

La **representación gráfica** de estas funciones es una **recta que pasa por el origen de coordenadas**.

La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas viene representada por el número m, que recibe el nombre de **pendiente**. Cuanto mayor sea m, más inclinada estará la recta respecto del eje X, es decir, mayor será el ángulo que esta recta forme con la horizontal.

Cuando entre dos magnitudes existe una **relación de proporcionalidad directa**, la función que representa dicha relación es de tipo lineal.

EJEMPLO

Determina, a partir de los pares de valores de la tabla, si la relación entre las magnitudes que aparecen en ella es o no de proporcionalidad.

ENTRADAS DE CINE	1	2	3	4	5	6
IMPORTE (€)	4,50	9	13,50	18	22,50	27

El número de entradas y el importe que se abona son magnitudes directamente proporcionales, ya que si multiplicamos el número de entradas, multiplicaremos por el mismo número el dinero que hay que abonar.

La constante de proporcionalidad es:

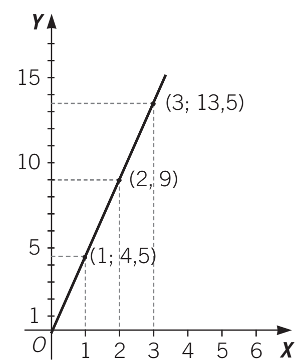
$$m = \frac{4,5}{1} = \frac{9}{2} = \frac{13,5}{3} = \frac{18}{4} = \ldots = 4,5$$

La expresión algebraica de la función que relaciona ambas magnitudes es:

$$y = m \cdot x \rightarrow y = 4,5 \cdot x$$

donde x es el número de entradas e y es el importe que se abona.

La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = 4,5$. Para representarla hay que señalar en un sistema de ejes de coordenadas los puntos: (1; 4,5), (2, 9), (3; 13,5), (4, 18)…



1 **Un atleta ha recorrido las distancias que se muestran en la tabla en los tiempos que se indican.**

TIEMPO (min)	1	2	3	4
RECORRIDO (km)	0,2	1	1,6	2,4

Determina, a partir de estos pares de valores, si la relación entre ambas magnitudes es o no de proporcionalidad y, en caso de serlo, deduce la expresión algebraica de la función que las relaciona y represéntala.

CONOCER LA FUNCIÓN AFÍN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función afín** se expresa de la forma: $\mathbf{y = m \cdot x + n}$, siendo m y n dos números cualesquiera.

- m es la **pendiente** de la recta. Si $\mathbf{m > 0}$, la recta es **creciente**, y si $\mathbf{m < 0}$, la recta es **decreciente**.
- n es la ordenada en el origen.

La representación gráfica de estas funciones es una **recta que no pasa por el origen de coordenadas**, sino que pasa por el punto $(0, n)$.

Las funciones de proporcionalidad directa, o funciones lineales, son un caso particular de las funciones afines, cuando $n = 0$.

EJEMPLO

Dadas las siguientes funciones: $y = 2x + 2$ $\quad$ $y = -x + 2$

a) Determina su pendiente y su ordenada en el origen.

b) ¿Cómo serán las rectas, crecientes o decrecientes?

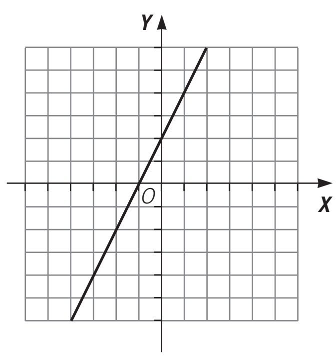
c) Construye su tabla de valores y represéntala.

a) $y = 2x + 2$; pendiente: $m_1 = 2$, $n_1 = 2$

b) Al ser la pendiente positiva: $m_1 = 2 > 0$, la primera recta es creciente.

c)

x	y
0	2
1	4
−1	0
2	6

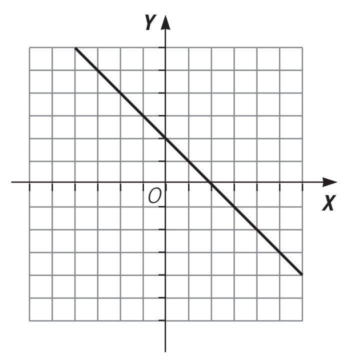


a) $y = -x + 2$, pendiente: $m_2 = -1$, $n_2 = 2$

b) Al ser la pendiente negativa: $m_2 = -1 < 0$, la segunda recta es decreciente.

c)

x	y
0	2
1	1
−1	3
2	0



1 **Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines. Escribe, en cada caso, el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen. Construye sus tablas de valores y represéntalas.**

a) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ b) $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

11 OBJETIVO 3
OBTENER LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para representar una recta hay que conocer dos puntos por los que pasa. Así, para hallar la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

1.º **Calculamos el valor de la pendiente**: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.º Sustituimos las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación general de la recta $y = mx + n$. y **obtenemos el valor de la ordenada en el origen, *n***:

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1$$
$$y_2 = mx_2 + n \rightarrow n = y_2 - mx_2$$

3.º **Sustituimos los valores obtenidos** para la pendiente (m) y la ordenada en el origen (n) en la ecuación general de la recta.

EJEMPLO

Halla la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-1, -2)$ y $B(2, 3)$.

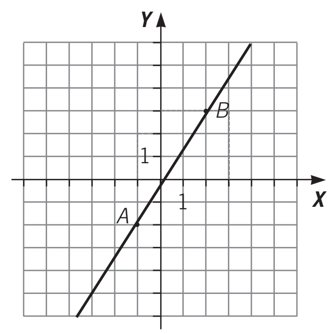
1.º Calculamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{5}{3}$$

2.º Obtenemos el valor de la ordenada en el origen, sustituyendo, por ejemplo, el punto A:

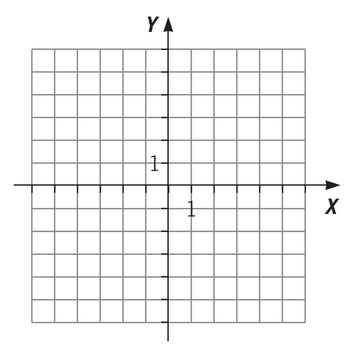
$$y = mx + n \rightarrow -2 = \frac{5}{3} \cdot (-1) + n$$

$$n = -2 + \frac{5}{3} = \frac{-6 + 5}{3} = \frac{-1}{3}$$



3.º Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación general: $y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

1 **Escribe y representa la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0, 4)$ y $B(3, 1)$.**



2 **Obtén la ecuación de la recta que tiene por pendiente $m = 2$ y que pasa por el punto $(0, 3)$.**

3 **Halla la ecuación de la recta que tiene por ordenada en el origen $n = -1$ y que pasa por el punto $(4, 5)$.**

OBJETIVO 4

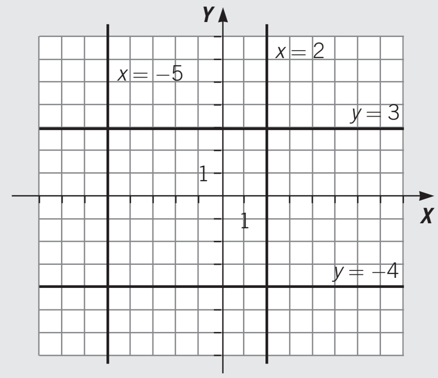
DISTINGUIR ENTRE RECTAS PARALELAS Y SECANTES

El eje horizontal o eje *X* es la recta de ecuación $y = 0$.

Las **rectas paralelas al eje *X*** tienen ecuaciones de la forma $y =$ constante.

El **eje vertical o eje *Y*** es la recta de ecuación $x = 0$.

Las rectas paralelas al eje *Y* tienen ecuaciones de la forma $x =$ constante.



EJEMPLO

Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 3x - 1$ y que pasa por el punto (1, 2).

Por ser paralelas, las rectas tendrán la misma pendiente, $m = 3$. Por tanto, su ecuación es $y = 3x + n$.

Como la recta pasa por el punto (1, 2), las coordenadas de este punto deberán cumplir la ecuación de dicha recta:

$$y = 3x + n \rightarrow 2 = 3 \cdot 1 + n \rightarrow n = -1$$

La recta es $y = 3x - 1$.

1 **Determina la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{1}{2}x$, y que pasa por el origen de coordenadas.**

2 **Obtén la ecuación de la recta paralela a $y = 2x - 3$, y que pasa por el punto donde se cortan las rectas $\left.\begin{array}{r} y = 5x + 1 \\ y = -x - 1 \end{array}\right\}$.**

3 **Halla la ecuación de la recta paralela a $y = x - \frac{1}{2}$, y que pasa por el punto donde se cortan las rectas $\left.\begin{array}{r} y = x + 7 \\ y = -5x + 1 \end{array}\right\}$.**

11 OBJETIVO 5
CONOCER LA FUNCIÓN CUADRÁTICA $y = ax^2$

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

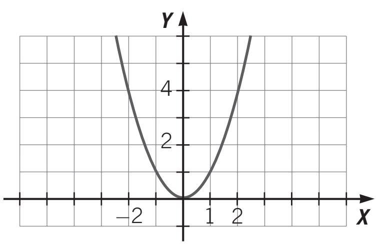
- Cuando $a > 0$, la gráfica de la función $y = ax^2$ es una parábola abierta hacia arriba (en forma de vaso). Cuando $a < 0$, es una parábola abierta hacia abajo (en forma de campana).
- En las parábolas de ecuación $y = ax^2$, el eje Y es su eje de simetría.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones.

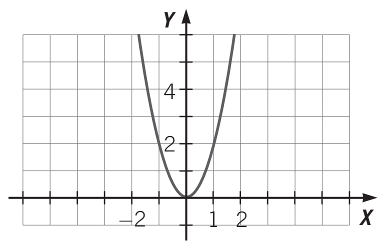
a) $y = x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



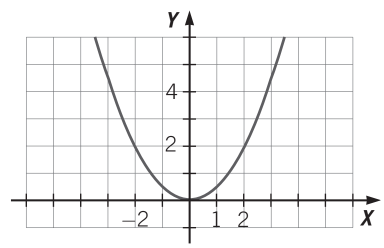
b) $y = 2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



c) $y = \frac{1}{2}x^2$

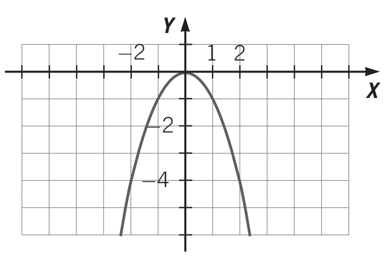
x	−2	−1	0	1	2
y	2	1/2	0	1/2	2



Las tres parábolas tienen forma de vaso. Vemos que la parábola $y = 2x^2$ es más estrecha que la parábola $y = x^2$. En cambio, la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ es más ancha que la parábola $y = x^2$.

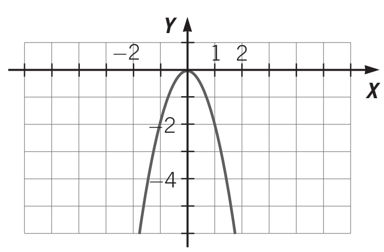
d) $y = -x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−1	0	−1	−4



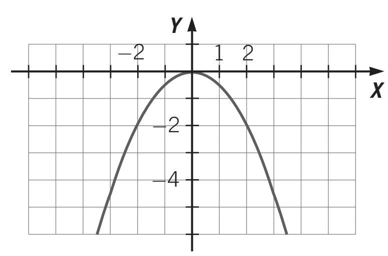
e) $y = -2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−8



f) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	−1/2	0	−1/2	−2



Estas tres parábolas son iguales que las anteriores, pero están abiertas hacia abajo, y tienen forma de campana.

1 **Sin representarlas, di cuáles de las siguientes parábolas tienen forma de vaso o de campana y cuáles son más anchas o estrechas que $y = x^2$.**

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $y = -\frac{1}{3}x^2$ c) $y = 5x^2$ d) $y = -7x^2$ e) $y = \frac{5}{3}x^2$ f) $y = -9x^2$

EFECTUAR TRASLACIONES DE LA FUNCIÓN $y = x^2$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TRASLACIONES VERTICALES

La gráfica de $y = x^2 + k$ se obtiene trasladando verticalmente k unidades la gráfica de $y = x^2$.

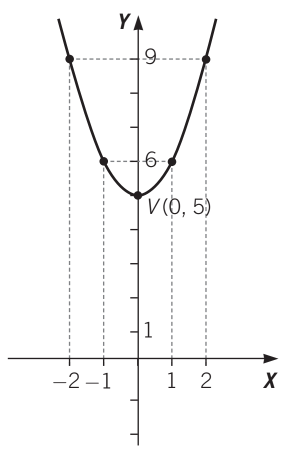
- Si $k > 0$, la traslación vertical es hacia arriba.
- Si $k < 0$, la traslación vertical es hacia abajo.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones.

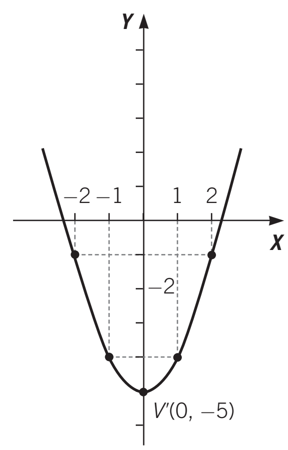
a) $y = x^2 + 5$

x	−2	−1	0	1	2
y	9	6	5	6	9



b) $y = x^2 - 5$

x	−2	−1	0	1	2
y	−1	−4	−5	−4	−1



La parábola $y = x^2 + 5$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y = x^2 - 5$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades hacia abajo.

El vértice de $y = x^2 + 5$ está en $V(0, 5)$, mientras que el vértice de $y = x^2 - 5$ está en $V'(0, -5)$. Así, el eje de simetría es igual en ambas gráficas: el eje Y, y pasa por el vértice de cada una de ellas.

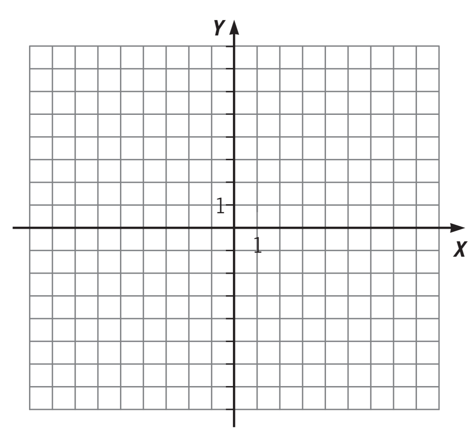
1 **Representa sobre el mismo sistema de ejes, con colores diferentes, las siguientes parábolas.**

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = x^2 + 3$

Halla las coordenadas de sus vértices y de sus puntos de corte con el eje X, igualando $y = 0$.



TRASLACIONES HORIZONTALES

La gráfica de $y = (x + h)^2$ se obtiene trasladando horizontalmente h unidades la gráfica de $y = x^2$.

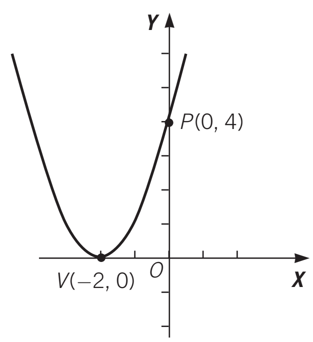
- Si $h > 0$, la traslación horizontal es hacia la izquierda.
- Si $h < 0$, la traslación horizontal es hacia la derecha.

EJEMPLO

Representa las funciones.

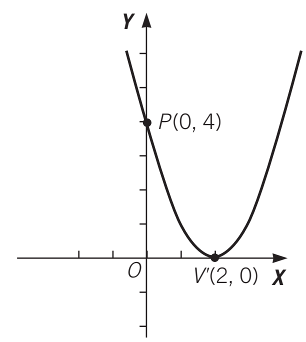
a) $y = (x + 2)^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	0	1	4	9	16



b) $y = (x - 2)^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	16	9	4	1	0



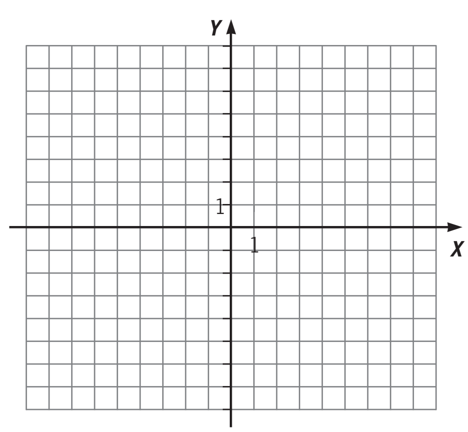
La parábola $y = (x + 2)^2$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 2 unidades hacia la izquierda, mientras que la parábola $y = (x - 2)^2$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 2 unidades hacia la derecha.

El vértice de $y = (x + 2)^2$ está en $V(-2, 0)$, mientras que el vértice de $y = (x - 2)^2$ está en $V'(2, 0)$. Así, el eje de simetría de la parábola $y = (x + 2)^2$ es la recta $x = -2$, mientras que el eje de $y = (x - 2)^2$ es la recta $x = 2$, que es paralela al eje Y.

2 **Representa sobre el mismo sistema de ejes, y con colores diferentes, las siguientes parábolas.**

a) $y = (x - 1)^2$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = x^2 + 3$

Halla las coordenadas de sus vértices y de sus puntos de corte con el eje Y, igualando $x = 0$.



TRASLACIONES VERTICALES Y HORIZONTALES

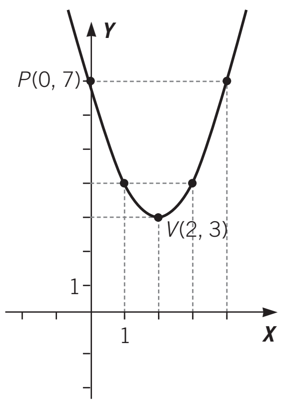
La gráfica de $y = (x - h)^2 + k$ es una parábola como la gráfica de $y = x^2$, pero con el vértice en el punto (h, k).

EJEMPLO

Representa la función $y = (x - 2)^2 + 3$.

Obtenemos su tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	7	4	3	4	7



Si trasladamos la parábola $y = x^2$ en 2 unidades a la derecha se obtiene la parábola $y = (x - 2)^2$. Si a continuación trasladamos esta parábola en 3 unidades hacia arriba, obtenemos la parábola de ecuación $y = (x - 2)^2 + 3$.

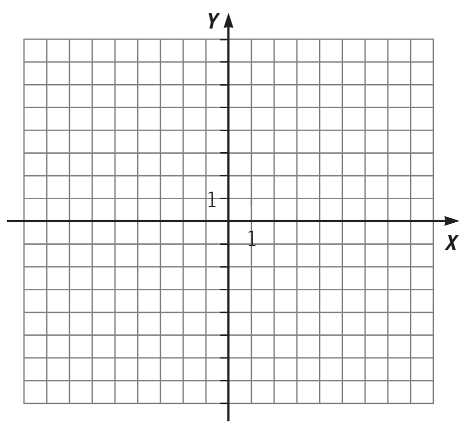
El vértice de $y = (x - 2)^2 + 3$ está en el punto $(h, k) = (2, 3)$.

Su eje de simetría es la recta $x = 2$, que es paralela al eje Y.

3 **A partir de la parábola $y = x^2$, representa las siguientes parábolas sobre el mismo sistema de ejes, con colores diferentes, explicando cómo lo haces.**

a) $y = (x + 2)^2 - 3$ b) $y = (x + 1)^2 + 3$ c) $y = (x - 3)^2 - 1$

Obtén las coordenadas de sus vértices y de su punto de corte con el eje Y, igualando $x = 0$.



11 OBJETIVO 7
REPRESENTAR LA FUNCIÓN $y = ax^2 + bx + c$

NOMBRE: ______ CURSO: ______ FECHA: ______

Para representar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se siguen estos pasos.

1.º Se calculan los puntos de corte con el eje X. Después, se halla el punto de corte con el eje Y, si lo hubiera.

2.º Se halla el vértice, que tiene por abscisa $x = -\frac{b}{2a}$, y que es el valor que debe coincidir con la abscisa del punto medio entre los dos puntos de corte con el eje X.

EJEMPLO

Representa la función $y = 2x^2 - 9x - 18$.

1.º Calculamos los puntos de corte con el eje X, igualando $y = 0$.

$$2x^2 - 9x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 15}{4} = \begin{cases} 6 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje X son $P(6, 0)$ y $Q\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Para hallar el punto de corte con el eje Y hacemos $x = 0 \rightarrow y = -18 \rightarrow R(0, -18)$.

2.º El vértice tendrá por abscisa el valor $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-9}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$.

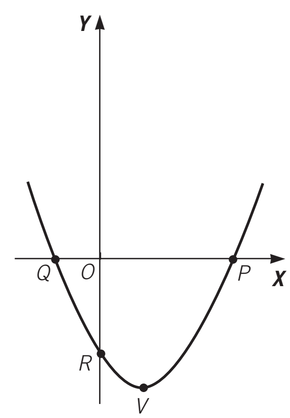
El valor de la ordenada y_V lo obtenemos sustituyendo el valor de x_V en la ecuación de la parábola:

$$y_V = 2x_V^2 - 9x_V - 18 = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 9 \cdot \frac{9}{4} - 18 =$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{81}{4} - 18 = \frac{81 - 162 - 144}{8} = -\frac{225}{8}$$

Así, el vértice es el punto $V\left(\frac{9}{4}, -\frac{225}{8}\right)$.

El eje de simetría de la parábola $y = 2x^2 - 9x - 18$ es la recta $x = \frac{9}{4}$.



1 **Representa las siguientes parábolas.**

a) $y = -x^2 + 6x - 8$

b) $y = x^2 - 4x - 5$

OBJETIVO 8

CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA 11

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una función de proporcionalidad inversa se expresa de la siguiente forma.

$$x \cdot y = k \rightarrow y = \frac{k}{x}, \text{ siendo } k \neq 0.$$

- La representación gráfica de estas funciones es una hipérbola.
- Cuando entre dos magnitudes existe una relación de proporcionalidad inversa, la función que representa dicha relación es del tipo anterior.

EJEMPLO

Un coche que circula a una velocidad constante de 90 km/h tarda 2 horas en recorrer una distancia. ¿Cuánto habría tardado si hubiera ido a 120 km/h? ¿Y si hubiese circulado a 60 km/h?

Las dos variables relacionadas son la velocidad y el tiempo, ya que el espacio recorrido no varía. Construimos la siguiente tabla de valores entre ambas variables.

VELOCIDAD (km/h)	30	60	90	120
TIEMPO (h)	6	3	2	1,5

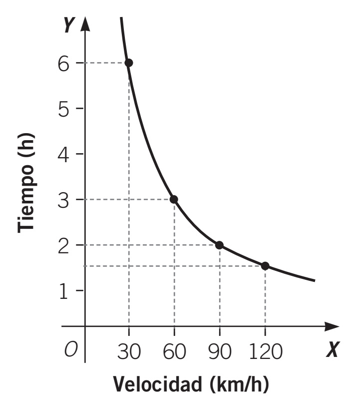
- Vemos que al duplicar la velocidad, el tiempo se reduce a la mitad; por tanto, ambas magnitudes, velocidad y tiempo, son inversamente proporcionales.
- La relación que cumplen ambas magnitudes es:

$$30 \cdot 6 = 60 \cdot 3 = 90 \cdot 2 = 120 \cdot 1{,}5 = 180 = k$$

- La expresión algebraica de la función que relaciona la velocidad y el tiempo es:

$$v \cdot t = k \rightarrow v \cdot t = 180 \rightarrow t = \frac{180}{v}$$

La representación gráfica de esta función es la rama del primer cuadrante de una hipérbola.



1 **La siguiente tabla de valores corresponde a una función de proporcionalidad inversa.**

a) Completa la tabla.
b) Escribe la expresión algebraica de la función.
c) Representa la función.

x	1	2	3	4	5	6
y			7/3			

ADAPTACIÓN CURRICULAR

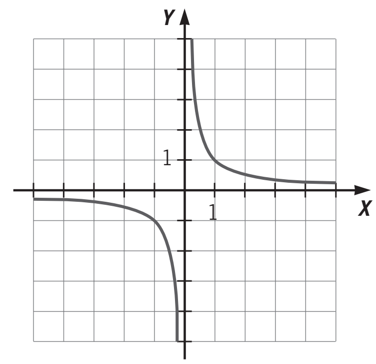
EJEMPLO

Representa la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{1}{x}$.

En este caso, la variable x también puede tomar valores negativos. Construimos la tabla de valores.

x	1	-1	2	-2	3	-3
y	1	-1	1/2	$-1/2$	1/3	$-1/3$

Observa que x no puede tomar el valor 0, ya que no existe $\frac{1}{0}$.



2 **Representa la función de proporcionalidad inversa $y = -\frac{1}{x}$, y compárala con la función del ejemplo anterior.**

Las gráficas de $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$ son hipérbolas, simétricas respecto al eje X.

La gráfica de la función $y = \frac{1}{x} + k$, siendo k un valor constante, se obtiene trasladando verticalmente la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ hacia arriba (si $k > 0$) o hacia abajo (si $k < 0$) tantas unidades como sea el valor de k.

3 **Representa las siguientes hipérbolas.**

a) $y = \frac{1}{x} + 3$

b) $y = \frac{1}{x} - 3$

4 **Representa gráficamente las siguientes funciones.**

a) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } x \leq 1 \\ -3x^2 & \text{si } 1 < x \leq 5 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 + x & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ \dfrac{1}{x} + 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

11 OBJETIVO 9
RECONOCER FUNCIONES EXPONENCIALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$ o $y = a^x$, donde a es un número real positivo ($a > 0$) y distinto de 1 ($a \neq 0$).
La función exponencial $f(x) = a^x$ verifica que:
- $f(0) = a^0 = 1$, y un punto de su gráfica es (0, 1).
- $f(1) = a^1 = a$, y un punto de su gráfica es (1, a).
- La función es creciente si $a > 1$.
- La función es decreciente si $a < 1$.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones exponenciales.

a) $y = 2^x$ **b)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Realizamos una tabla de valores, utilizando la calculadora, por ejemplo:

$\frac{1}{x} + = 1 \boxed{:} 2 = \boxed{x^y} 2 = 0{,}25$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1 \boxed{:} 2 = \boxed{x^y} \boxed{\pm} 2 = 4$

a)

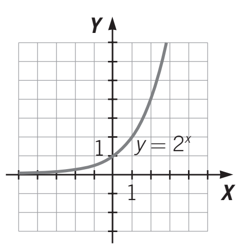
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
2^x	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16

b)

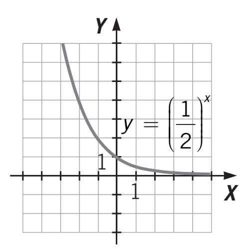
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

Representamos las funciones sobre los ejes de coordenadas:

a)



b)



1 **Realiza una tabla de valores y representa las funciones exponenciales.**

a) $y = 4^x$ b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

x	$y = 4^x$	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
−2		
−1		
0		
1		
2		

- Las funciones $\boldsymbol{y = a^x + b}$ son de tipo exponencial. Su gráfica se obtiene trasladando la gráfica de $y = a^x$ en b unidades hacia arriba si b es positivo, y en b unidades hacia abajo si es negativo.
- Las funciones $\boldsymbol{y = a^{x+b}}$ son también de tipo exponencial. Su gráfica se obtiene trasladando la gráfica de $y = a^x$ en b unidades hacia la izquierda si b es positivo, y en b unidades hacia la derecha si es negativo.

EJEMPLO

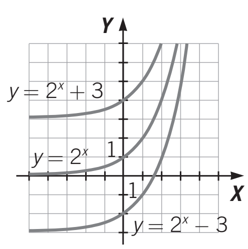
Representa, en los mismos ejes que $y = 2^x$, las funciones exponenciales.

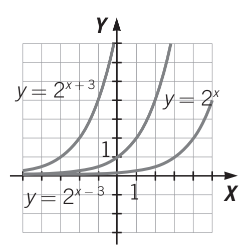
a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 2^{x-3}$ **c)** $y = 2^x + 3$ **d)** $y = 2^x - 3$

Realizamos la siguiente tabla de valores:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2^x$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
$y = 2^{x+3}$	1	2	4	8	16	32	64
$y = 2^{x-3}$	0,015625	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1
$y = 2^x + 3$	3,125	3,25	3,5	4	5	7	11
$y = 2^x - 3$	−2,875	−2,75	−2,5	−2	−1	1	5

Representamos las funciones sobre los ejes de coordenadas:





2 **Representa, en los mismos ejes que $y = 1{,}5^x$, las funciones exponenciales.**

a) $y = 1{,}5^{x+2}$ **b)** $y = 1{,}5^{x-1}$ **c)** $y = 1{,}5^x + 2$ **d)** $y = 1{,}5^x - 1$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 1{,}5^x$							
$y = 1{,}5^{x+2}$							
$y = 1{,}5^{x-1}$							
$y = 1{,}5^x + 2$							
$y = 1{,}5^x - 1$							

ADAPTACIÓN CURRICULAR

11 OBJETIVO 10
APLICAR FUNCIONES EXPONENCIALES AL INTERÉS COMPUESTO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **capital final** C_f, obtenido al invertir un **capital** C a un **rédito** r, durante un **tiempo** t, a **interés compuesto** es: $\boldsymbol{C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$.

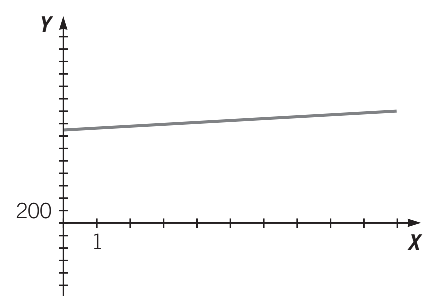
EJEMPLO

El capital que obtenemos al cabo de $t = 1, 2, 3, 4, 7$ y 10 años al invertir un capital de $C = 1.500$ €, a interés compuesto, a un rédito r del 2 %, se calcula mediante la fórmula:

$$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t = 1.500 \cdot 1{,}02^t$$

Podemos considerar la fórmula como una función exponencial. Al representarla se observa la evolución del capital invertido. El capital inicial es el punto de corte de la gráfica con el eje Y.

t	$C_f = 1.500 \cdot 1{,}02^t$
1	1.530
2	1.560,60
3	1.591,81
4	1.623,65
7	1.723,03
10	1.828,49



Para calcular cuánto se tiempo tardará en conseguir 1.650 €, hallamos el punto de la gráfica que corresponde a 1.650 € en el eje vertical, y determinamos su coordenada del eje horizontal.

En este caso se tardará aproximadamente 4,8 años, es decir, unos 4 años y 10 meses.

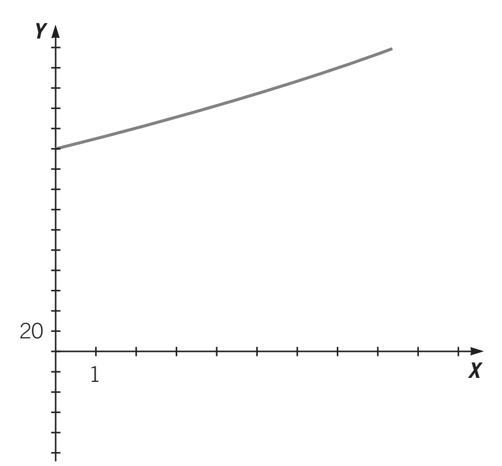
1 **Halla el capital que obtendremos en los 6 primeros años al invertir, a interés compuesto, un capital de 500 € a un rédito del 2,5 %.**

2 **La gráfica representa cómo evoluciona un capital C, invertido a interés compuesto, con un rédito del 5 %. Contesta a las siguientes cuestiones.**

a) ¿Cuál es el capital inicial?

b) Indica el capital final que se obtendrá a los 4 años.

c) ¿Cuánto tiempo aproximado ha de pasar para tener 2.200 €?



12 Estadística

INTRODUCCIÓN

La Estadística es la ciencia que estudia los métodos y procedimientos para recoger datos, clasificarlos, analizarlos, tomar decisiones y sacar conclusiones científicas a partir de ellos. Se divide en dos ramas: la Estadística *descriptiva*, que se encarga de la recogida y el análisis de datos pertenecientes a una muestra o a la población, y la Estadística *inductiva*, que se ocupa de generalizar a toda la población los resultados y las conclusiones obtenidos a partir de muestras.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Estadística:* ciencia que recoge, analiza e interpreta los datos de un conjunto de elementos.
- *Medidas de centralización:* parámetros estadísticos de un conjunto de datos que reflejan la tendencia de los datos a concentrarse alrededor de ciertos valores.
- *Medidas de dispersión:* parámetros estadísticos que reflejan el mayor o menor agrupamiento de un conjunto de datos.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer y diferenciar los conceptos de población y muestra.	• Estadística. • Población y muestra.	• Distinción de los conceptos de población y muestra.
2. Clasificar variables estadísticas: cuantitativas y cualitativas.	• Variables cualitativas y cuantitativas. • Variables estadísticas discretas y continuas.	• Diferenciación de las variables cualitativas y cuantitativas, y dentro de estas, de las variables discretas y continuas.
3. Obtener la tabla estadística asociada a un conjunto de datos.	• Tablas estadísticas. • Marca de clase.	• Construcción de tablas estadísticas adecuadas al conjunto de datos.
4. Hallar la frecuencia absoluta y relativa de un conjunto de datos.	• Frecuencias absolutas. • Frecuencias relativas.	• Cálculo, a partir de la tabla estadística, de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.
5. Construir la tabla de frecuencias acumuladas.	• Frecuencias absolutas acumuladas. • Frecuencias relativas acumuladas.	• Obtención, a partir de la tabla estadística, de frecuencias absolutas acumuladas y de frecuencias relativas acumuladas.
6. Utilizar y analizar los gráficos adecuados para representar datos.	• Gráficos estadísticos: diagrama de barras, histograma y polígono de frecuencias.	• Representación de las variables estadísticas mediante gráficos, diferenciando según el tipo de datos recogidos.
7. Calcular las medidas de centralización de un conjunto de datos.	• Media. • Mediana. • Moda.	• Cálculo e interpretación de la media, la mediana y la moda de un conjunto de datos.
8. Calcular las medidas de dispersión de un conjunto de datos.	• Recorrido. • Desviación media. • Varianza y desviación típica.	• Obtención del recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de un conjunto de datos.

12 OBJETIVO 1
RECONOCER Y DIFERENCIAR LOS CONCEPTOS DE POBLACIÓN Y MUESTRA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **Estadística** es la ciencia encargada de recoger, analizar e interpretar los datos relativos a un conjunto de elementos.
- La **población** es el conjunto de elementos sobre los que se va a estudiar un determinado aspecto o característica.
- La **muestra** es una parte de la población. Es importante escoger bien la muestra, ya que esta ha de ser representativa, es decir, debe dar una información correcta y similar a la obtenida si estudiásemos toda la población.
- El **tamaño** de una muestra es el número de elementos que la componen.

EJEMPLO

Los resultados a la pregunta: ¿Cómo clasificarías las desigualdades que actualmente existen entre hombres y mujeres en nuestro país en el ámbito laboral?, del sondeo de opinión sobre «Las mujeres y el empleo» están recogidos en porcentajes (%) en la tabla.

	TOTAL	**SEXO**	
		Hombres	**Mujeres**
Muy grandes	9	6	13
Bastante grandes	45	40	50
Bastante pequeñas	28	32	24
Casi inexistentes	14	19	9
No sabe/No contesta	4	3	4

Junto al sondeo de opinión aparece esta ficha técnica.

Ámbito: territorio español, excluyendo Ceuta y Melilla.
Universo: población española de ambos sexos de 18 años o más.
Tamaño de la muestra: 2.488 entrevistas.
Error muestral: para un nivel de confianza del 95,5 %, el error es del ± 2 %.
Fecha de realización: 23-27 de enero de 1997 (Centro de Investigaciones Sociológicas, CIS).

El error del ± 2 % significa que a la respuesta de «Muy grandes», que es el 9 % en la muestra (2.488 casos), la respuesta en la población sería del 9 ± 2 %; es decir, entre un 7 % y un 11 % de las personas contestarían «Muy grandes», afirmándolo en el 95,5 % de las estimaciones (nivel de confianza).

En los estudios estadísticos se eligen muestras en lugar de poblaciones cuando estas son muy amplias, por motivos económicos, por la rapidez en conocer los resultados, etc.

1 **Hazle esa misma pregunta a tus compañeros de clase y construye una tabla similar a la anterior, pero sin calcular porcentajes, es decir, apuntando cuántos compañeros han dado cada una de las respuestas y su género.**

CLASIFICAR VARIABLES ESTADÍSTICAS: CUANTITATIVAS Y CUALITATIVAS

NOMBRE: ________________ CURSO: ________ FECHA: ________

Una **variable estadística** es cualquier característica o aspecto de los elementos de una población o de una muestra que se puede estudiar.

Las variables estadísticas pueden ser:

- **Variables cuantitativas:** se pueden medir y se expresan mediante números. A su vez, pueden ser discretas o continuas.
  - Las **variables cuantitativas discretas** toman un número determinado de valores.
  - Las **variables cuantitativas continuas** pueden tomar cualquier valor comprendido entre dos valores dados.
- **Variables cualitativas:** no se pueden medir y se expresan mediante cualidades o descripciones.

EJEMPLO

Señala, en cada caso, qué *tipo de variable* es, y di si es más conveniente estudiar la *población* o una *muestra*.

a) La estatura de los 20 alumnos de una clase: *variable cuantitativa continua*, y estudiamos la *población*.

b) Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano: *variable cualitativa*, y estudiamos una *muestra* de la población.

c) La talla de pantalones de los varones de una Comunidad Autónoma: *variable cuantitativa discreta*, y estudiamos una *muestra*.

d) Las aficiones deportivas de los alumnos de un instituto: *variable cualitativa*, y podemos estudiar una *muestra* de alumnos de los diferentes cursos.

e) El color del pelo de los alumnos de una clase: *variable cualitativa*, y en este caso es conveniente estudiar la *población*.

1 **Señala en cada caso lo que corresponda.**

VARIABLE	CUANTITATIVA		CUALITATIVA	POBLACIÓN	MUESTRA
	Discreta	Continua			
Profesión del padre					
Número de personas que viven en cada piso de un edificio					
Número de llamadas realizadas desde un teléfono al día					
Equipo de fútbol preferido por cada alumno de una clase					
Temperaturas medidas a lo largo de una semana					
El peso de cada uno de los 20 alumnos de una clase					

12 OBJETIVO 3
OBTENER LA TABLA ESTADÍSTICA ASOCIADA A UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **tablas estadísticas** sirven para ordenar y estudiar los datos de una variable estadística.

Si la variable es **discreta**, es decir, si tenemos un conjunto de datos pequeño, se forma una tabla con dos columnas. En una de las columnas se colocan los distintos valores de la variable, y en la otra columna se indica el número de veces que aparece cada uno de ellos.

Si la variable es **continua**, y tenemos un conjunto de datos grande:

1.º Se halla el **recorrido** de la variable, o la diferencia entre sus valores mayor y menor.
2.º Se agrupan los valores en **intervalos de igual amplitud**.
3.º Se establece la **marca de clase**, que es el punto medio de cada intervalo.
4.º Se hace el **recuento** de cada uno de los datos.

EJEMPLO

Las notas obtenidas en un examen de Matemáticas por los 20 alumnos de una clase de 4.º ESO, han sido: 6, 5, 3, 1, 2, 5, 6, 5, 9, 8, 7, 4, 9, 10, 7, 7, 8, 6, 5 y 5. Ordena estos datos en una tabla.

El número de valores que puede tomar la variable es pequeño, y es una variable discreta.

Para recoger los datos en una tabla, ponemos en la primera columna los posibles valores de las notas, que en este caso es la variable estadística, y en la segunda columna, el número de veces que ha salido cada una de ellas.

NOTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RECUENTO	1	1	1	1	5	3	3	2	2	1

EJEMPLO

El número de personas que viven en cada uno de los edificios de una calle son:

69, 85, 139, 114, 103, 84, 97, 133, 155, 127, 110, 138, 94, 143, 106, 99, 80, 74, 102, 93, 128, 78, 86, 104, 121, 137, 89, 107, 92 y 101

Haz una tabla, el recuento y obtén las marcas de clase.

En este caso, el número de posibles valores que puede tomar la variable es grande, pues varía entre 69 y 155. Agrupamos los datos en intervalos. Para ello, hallamos el recorrido (diferencia entre el mayor y el menor valor):

$$155 - 69 = 86$$

Tomaremos 6 intervalos de amplitud 15 ($6 \cdot 15 = 90 > 86$), empezando por el menor valor: 69.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECUENTO
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1

Las marcas de clase son: $\frac{69+84}{2} = 76{,}5$ $\quad \frac{99+114}{2} = 106{,}5$ $\quad \frac{129+144}{2} = 136{,}5$

$\frac{84+99}{2} = 91{,}5$ $\quad \frac{114+129}{2} = 121{,}5$ $\quad \frac{144+159}{2} = 151{,}5$

OBJETIVO 4

HALLAR LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN CONJUNTO DE DATOS 12

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **frecuencia absoluta** f_i de un conjunto de datos es el número de veces que se repite cada valor de la variable x_i en el total de los datos.

La **frecuencia relativa** h_i es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos:

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

La frecuencia relativa es siempre un número comprendido entre 0 y 1.

La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, n. La suma de todas las frecuencias relativas es 1.

Multiplicando la frecuencia relativa por 100, obtenemos el porcentaje (%).

EJEMPLO

Con los datos de las notas del examen de Matemáticas del ejemplo anterior, construye una tabla de frecuencias y porcentajes.

En la segunda columna colocamos el recuento, es decir, el número de veces que aparece cada valor. Este recuento se llama *frecuencia absoluta*.

En la tercera columna colocamos el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos (20). Este número se llama *frecuencia relativa*.

$$h_1 = \frac{1}{20} = 0{,}05 \qquad h_6 = \frac{3}{20} = 0{,}05$$

$$h_2 = \frac{1}{20} = 0{,}05 \qquad h_7 = \frac{3}{20} = 0{,}05$$

$$h_3 = \frac{1}{20} = 0{,}25 \qquad h_8 = \frac{2}{20} = 0{,}15$$

$$h_4 = \frac{1}{20} = 0{,}15 \qquad h_9 = \frac{2}{20} = 0{,}10$$

$$h_5 = \frac{5}{20} = 0{,}10 \qquad h_{10} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

x_i	f_i	h_i	%
1	1	0,05	5
2	1	0,05	5
3	1	0,05	5
4	1	0,05	5
5	5	0,25	25
6	3	0,15	15
7	3	0,15	15
8	2	0,10	10
9	2	0,10	10
10	1	0,05	5
Suma	20	1	100

En la cuarta columna colocamos el porcentaje, que es el resultado de multiplicar por 100 cada valor de la frecuencia relativa h_i.

1 **Se ha lanzado un dado 20 veces, obteniendo los siguientes resultados:**
2, 3, 5, 4, 2, 4, 6, 5, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 4, 6, 3 y 3. Construye una tabla con las frecuencias absoluta y relativa y los porcentajes.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EJEMPLO

Con los datos del ejemplo anterior del número de habitantes de cada edificio construye la tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentajes.

En la primera columna colocamos los valores de la variable (número de habitantes por edificio), agrupados en 6 *intervalos* de amplitud 15; en la segunda columna ponemos la *marca de clase* de cada intervalo; en la tercera columna indicamos la *frecuencia absoluta*; en la cuarta, la *frecuencia relativa*, y en la quinta, el *porcentaje*.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[69, 84)	76,5	4	4/30 = 0,13	13
[84, 99)	91,5	8	8/30 = 0,27	27
[99, 114)	106,5	8	8/30 = 0,27	27
[114, 129)	121,5	4	4/30 = 0,13	13
[129, 144)	136,5	5	5/30 = 0,17	17
[144, 159)	151,5	1	1/30 = 0,03	3
Suma		30	1	100

2 **El peso (en kilos) de una muestra de 30 individuos, escogidos al azar, es: 59, 69, 74, 70, 68, 85, 83, 75, 56, 92, 86, 94, 58, 61, 74, 77, 79, 67, 84, 73, 82, 74, 79, 80, 81, 65, 60, 59, 73 y 62. Agrupa los datos en intervalos y construye una tabla con las frecuencias absoluta y relativa y los porcentajes.**

Hay que calcular el recorrido de la variable (peso, en este caso). Para ello, observamos cuáles son los valores menor y mayor.

valor **menor** = 56 valor **mayor** = 94 **recorrido** = 94 − 56 = 38

Podemos tomar 5 intervalos de amplitud 10, ya que $5 \cdot 10 = 50 > 38$.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[50, 60)				
[60, 70)				
[70, 80)				
[80, 90)				
[90, 100)				
Suma				

OBJETIVO 5

CONSTRUIR LA TABLA DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **frecuencia absoluta acumulada** F_i de un valor x_i es la suma de las frecuencias f_i de todos los valores menores o iguales que él.
- La **frecuencia relativa acumulada** H_i de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos: $H_i = \frac{F_i}{N}$.

EJEMPLO

Con los datos de las notas del examen de Matemáticas del ejemplo anterior, construye una tabla de frecuencias absolutas acumuladas y frecuencias relativas acumuladas.

Obtenemos la frecuencia absoluta acumulada de cada valor:

$F_1 = f_1 = 1$

$F_2 = F_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$

$F_3 = F_2 + f_3 = 2 + 1 = 3$

$F_4 = F_3 + f_4 = 3 + 1 = 4$

$F_5 = F_4 + f_5 = 4 + 5 = 9$

$F_6 = F_5 + f_6 = 9 + 3 = 12$

$F_7 = F_6 + f_7 = 12 + 3 = 15$

$F_8 = F_7 + f_8 = 15 + 2 = 17$

$F_9 = F_8 + f_9 = 17 + 2 = 19$

$F_{10} = F_9 + f_{10} = 19 + 1 = 20$

Calculamos la frecuencia relativa acumulada de los distintos valores:

$$H_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{1}{20} = 0,05$$

$$H_2 = \frac{F_2}{N} = H_1 + h_2 = 0,05 + 0,05 = 0,10$$

$$H_3 = \frac{F_3}{N} = H_2 + h_3 = 0,10 + 0,05 = 0,15$$

$$H_4 = \frac{F_4}{N} = H_3 + h_4 = 0,15 + 0,05 = 0,20$$

$$H_5 = \frac{F_5}{N} = H_4 + h_5 = 0,20 + 0,25 = 0,45$$

$$H_6 = \frac{F_6}{N} = H_5 + h_6 = 0,45 + 0,15 = 0,60$$

$$H_7 = \frac{F_7}{N} = H_6 + h_7 = 0,60 + 0,15 = 0,75$$

$$H_8 = \frac{F_8}{N} = H_7 + h_8 = 0,75 + 0,10 = 0,85$$

$$H_9 = \frac{F_9}{N} = H_8 + h_9 = 0,85 + 0,10 = 0,95$$

$$H_{10} = \frac{F_{10}}{N} = H_9 + h_{10} = 0,95 + 0,05 = 1$$

DATOS	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i)	FRECUENCIA RELATIVA (h_i)	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i)
1	1	1	0,05	0,05
2	1	2	0,05	0,10
3	1	3	0,05	0,15
4	1	4	0,05	0,20
5	5	9	0,25	0,45
6	3	12	0,15	0,60
7	3	15	0,15	0,75
8	2	17	0,10	0,85
9	2	19	0,10	0,95
10	1	20	0,05	1

12

1 **Un dado se ha lanzado 20 veces, obteniéndose los siguientes resultados.**

2, 3, 5, 4, 2, 4, 6, 5, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 4, 6, 3 y 3

Construye la tabla de frecuencias con las columnas de las frecuencias absolutas y relativas acumuladas.

EJEMPLO

Con los datos de los habitantes de cada edificio del ejemplo anterior, construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas acumuladas.

INTERVALO	x_i	f_i	F_i	h_i	%
[69, 84)	76,5	4	4	$4/30 = 0,13$	0,13
[84, 99)	91,5	8	12	$8/30 = 0,27$	0,40
[99, 114)	106,5	8	20	$8/30 = 0,27$	0,67
[114, 129)	121,5	4	24	$4/30 = 0,13$	0,80
[129, 144)	136,5	5	29	$5/30 = 0,17$	0,97
[144, 159)	151,5	1	30	$1/30 = 0,03$	1
Suma		30		1	

2 **Con los datos del peso de las 30 personas del ejemplo anterior, completa la tabla con las frecuencias absolutas y relativas acumuladas.**

INTERVALO	x_i	f_i	F_i	h_i	%
[50, 60)	55				
[60, 70)					
[70, 80)					
[80, 90)					
[90, 100)					
Suma					

UTILIZAR Y ANALIZAR LOS GRÁFICOS ADECUADOS PARA REPRESENTAR DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Los **gráficos** representan la información que contienen las tablas estadísticas. Según sea la variable, se usa un tipo u otro de gráfico.

VARIABLES DISCRETAS

- **Diagrama de barras:** para representar datos cuantitativos o cualitativos discretos.
  Sobre el eje *X* se señalan los valores de la variable y se levantan barras de altura igual a la frecuencia representada (absoluta, absoluta acumulada, relativa o relativa acumulada).
- El **polígono de frecuencias** es una línea poligonal que se obtiene al trazar, en el diagrama de barras, una línea desde cada extremo de una barra hasta el extremo de la barra siguiente.

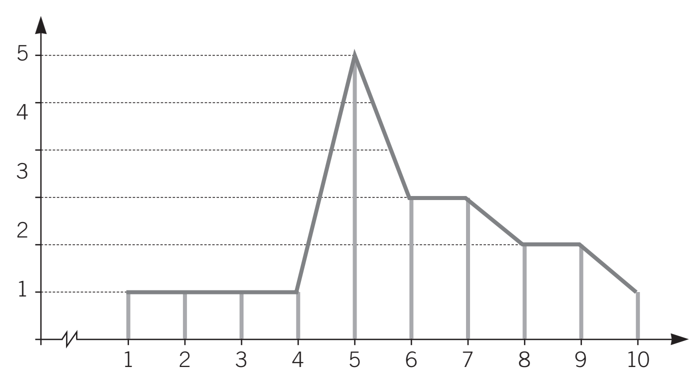
VARIABLES CONTINUAS

- **Histograma:** para representar variables cuantitativas continuas.
  Se señalan sobre el eje horizontal los extremos de los intervalos y se levantan rectángulos de altura igual que la frecuencia que se va representar.
- El **polígono de frecuencias** se obtiene al unir los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos del histograma.

EJEMPLO

Con las frecuencias absolutas del ejemplo de las notas en el examen de Matemáticas, construye el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

x_i	f_i
1	1
2	1
3	1
4	1
5	5
6	3
7	3
8	2
9	2
10	1
Suma	20

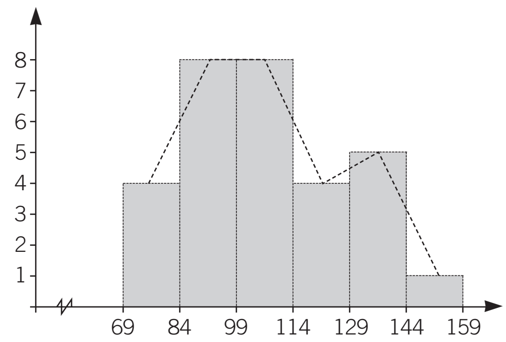


1 **Con los datos del ejemplo del lanzamiento del dado, construye el diagrama de barras y el polígono de frecuencias acumuladas.**

EJEMPLO

Con las frecuencias absolutas del ejemplo anterior de los habitantes de cada edificio, construye el histograma y el polígono de frecuencias.

INTERVALO	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1



2 **Con los datos del peso de las 30 personas, construye el histograma y el polígono de frecuencias.**

INTERVALO	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2
Suma		

GRÁFICO DE SECTORES

Se divide un círculo en sectores de ángulo proporcional a la frecuencia absoluta de cada valor de la variable estadística.

EJEMPLO

Con las frecuencias absolutas del ejemplo de las notas en el examen de Matemáticas, construye el diagrama de sectores.

x_i	f_i
1	1
2	1
3	1
4	1
5	5
6	3
7	3
8	2
9	2
10	1
Suma	20

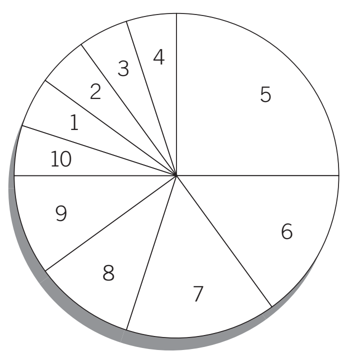
Para hallar la amplitud de cada sector, aplicamos con cada valor una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360^\circ \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ \quad x \longrightarrow 1 \text{ caso}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 1}{20} = 18^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360^\circ \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ \quad x \longrightarrow 5 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 5}{20} = 90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360^\circ \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ \quad x \longrightarrow 3 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 3}{20} = 54^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360^\circ \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ \quad x \longrightarrow 2 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 2}{20} = 36^\circ$$



3 **Representa en un gráfico de sectores las frecuencias del ejemplo de los habitantes de cada edificio.**

INTERVALO	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1

ADAPTACIÓN CURRICULAR

12 OBJETIVO 7
CALCULAR LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La media, la mediana y la moda son medidas de centralización, ya que reflejan la tendencia de los datos a concentrarse alrededor de ciertos valores.

La **media**, $\bar{x}$, de un conjunto de datos $x_1, x_2, \dots, x_n$ es: $\bar{x} = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$

Si los datos están agrupados en intervalos, el valor x_i es la marca de clase de cada intervalo.

EJEMPLO

Halla la nota media de las notas obtenidas por los 20 alumnos en el examen de Matemáticas.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Suma
f_i	1	1	1	1	5	3	3	2	2	1	20
$x_i \cdot f_i$	1	2	3	4	25	18	21	16	18	10	118

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{N} = \frac{118}{20} = 5{,}9$$

1 **Determina la media de habitantes en cada edificio de una calle del ejemplo anterior.**

INTERVALO	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[69, 84)	76,5	4	
[84, 99)	91,5	8	
[99, 114)	106,5	8	
[114, 129)	121,5	4	
[129, 144)	136,5	5	
[144, 159)	151,5	1	

2 **Halla la media de los datos del peso de las 30 personas del ejemplo anterior.**

INTERVALO	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2

- La **mediana** de un conjunto de datos es el valor tal que, ordenados los datos de forma creciente, la mitad son menores que él y la otra mitad son mayores que él. Se representa por ***Me***.
- Si el conjunto de datos es un número impar, la mediana es el valor central, colocados los datos de forma creciente.
- Si el conjunto de datos es par, la mediana es la media de los dos valores centrales.
- La **moda** de un conjunto de datos es el valor de la variable o el intervalo que más se repite. Se representa por ***Mo***.
- El valor de la moda puede no ser único, es decir, puede haber varios valores de la variable o intervalos que se repitan por igual.

EJEMPLO

En el ejemplo del examen de Matemáticas, el número de notas es par, y la mediana será:

$$Me = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$$

La moda es el valor que más se repite: $Mo = 5$.

3 **Halla la mediana y la moda en el ejemplo de los habitantes de cada edificio, tomando para ello las marcas de clase.**

INTERVALO	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1

4 **Obtén la mediana y la moda de los datos del peso de las 30 personas del ejemplo anterior.**

INTERVALO	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2

12 OBJETIVO 8
CALCULAR LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Las **medidas de dispersión** son las medidas estadísticas que indican el mayor o menor grado de agrupamiento de los valores que forman un conjunto de datos.
- El rango o recorrido, la desviación, la desviación media, la varianza y la desviación típica son medidas de dispersión.
- El **rango o recorrido** se calcula como la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de la variable estadística.
- La **desviación respecto a la media** es la diferencia entre cada valor de la variable y la media de dicha variable.

  La suma de las desviaciones es siempre cero.

EJEMPLO

En una ciudad hay dos coros, A y B, formados por 9 personas cada uno, cuyas edades son:

CORO A	10	10	20	30	30	30	40	50	50
CORO B	25	25	30	30	30	30	30	35	35

Halla la media de edad de cada coro, la mediana, la moda, el recorrido y la desviación.

- La media de cada coro es:

$$\overline{x}_A = \frac{10 + 10 + 20 + 30 + 30 + 30 + 40 + 50 + 50}{9} = \frac{270}{9} = 30 \text{ años}$$

$$\overline{x}_B = \frac{25 + 25 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 35 + 35}{9} = \frac{270}{9} = 30 \text{ años}$$

- La mediana es 30 en ambos casos, ya que ocupa el lugar central en cada serie.
- La moda es también igual en las dos series, 30.

  Se observa que los dos coros tienen los tres promedios iguales, pero son muy desiguales respecto a las edades. El coro A tiene dos niños de 10 años y dos personas mayores de 50 años, es decir, hay cuatro valores muy alejados de la edad media; en cambio, en el coro B, las edades son más homogéneas, pues todas están próximas a la media.

  Si queremos tener en cuenta estos aspectos, hay que medir el grado de separación o de dispersión de los datos con respecto a la media.
- El recorrido del coro A es: 50 − 10 = 40 años, mientras que el recorrido del coro B es: 35 − 25 = 10 años.
- Para los componentes de cada coro, las desviaciones son:

CORO A	10	10	20	30	30	30	40	50	50
$x - 30$	−20	−20	−10	0	0	0	10	20	20

CORO B	25	25	30	30	30	30	30	35	35
$x - 30$	−5	−5	0	0	0	0	0	5	5

Observa que, en ambos casos, la suma de las desviaciones es cero.

1 **En un examen se han obtenido las siguientes notas: 3, 5, 7, 2, 9, 5 y 3. Obtén el recorrido y la desviación.**

- La **desviación media (*DM*)** es la media de los valores absolutos de las desviaciones.

$$DM = \frac{\Sigma\,|x_i - \overline{x}|}{N}$$

Si los datos vienen dados con sus frecuencias, la desviación media es:

$$DM = \frac{\Sigma\,|x_i - \overline{x}| \cdot f_i}{N}$$

- La **varianza** es la media de los valores absolutos de las desviaciones.
Mide las desviaciones respecto de la media al cuadrado.

- La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza. Se designa con la letra σ.

Para datos simples, su fórmula es: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{N}}$

Para datos agrupados, su fórmula es: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{N}}$

EJEMPLO

Halla la desviación media, la varianza y la desviación típica de los dos coros del ejemplo anterior.

En este caso, los datos no vienen dados con sus frecuencias (la frecuencia de cada dato es 1).

- Las desviaciones medias son:

$$DM_A = \frac{|-20| + |-20| + |-10| + 0 + 0 + 0 + |10| + |20| + |20|}{9} = \frac{100}{9} = 11{,}11$$

$$DM_B = \frac{|25 - 30| + |25 - 30| + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + |35 - 30| + |35 - 30|}{9} = \frac{20}{9} = 2{,}22$$

Se observa que la desviación media del coro A es mayor que la del coro B.

- Las varianzas y las desviaciones típicas de ambos coros son:

$$\text{Varianza del coro A} = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2 + d_8^2 + d_9^2}{9} =$$

$$= \frac{(-20)^2 + (-20)^2 + (-10)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 10^2 + 20^2 + 20^2}{9} =$$

$$= \frac{400 + 400 + 100 + 0 + 0 + 0 + 100 + 400 + 400}{9} = \frac{1.800}{9} = 200$$

Desviación típica: $\sigma_A = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{200} = 14{,}14$

$$\text{Varianza del coro B} = \frac{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 5^2 + 5^2}{9} =$$

$$= \frac{25 + 25 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 25 + 25}{9} = \frac{100}{9} = 11{,}11$$

Desviación típica: $\sigma_B = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{11{,}11} = 3{,}33$

Se observa que la desviación típica en el coro A es bastante mayor que en el coro B, es decir, $\sigma_A > \sigma_B$.
Esto refleja que la dispersión de las edades en el coro A es mucho mayor que en el coro B.
La desviación típica aumenta a medida que se incrementa la dispersión de los datos.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

12

2 **En la tabla aparecen los resultados obtenidos en una prueba de 120 preguntas. Halla la desviación media, la varianza y la desviación típica.**

INTERVALO	x_i	f_i
[0, 30)	15	12
[30, 60)	45	20
[60, 90)	75	10
[90, 120)	105	7

3 **Las alturas (en cm) de los alumnos de una clase de 4.º ESO se distribuyen según la tabla.**

INTERVALOS DE ALTURAS	FRECUENCIAS ABSOLUTAS
[145, 150)	51
[150, 155)	95
[155, 160)	141
[160, 165)	152
[165, 170)	120
[170, 175)	88
[175, 180)	58

Resuelve.

a) Completa la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas.

b) Dibuja el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente.

c) Calcula la media aritmética.

d) Determina el intervalo modal y toma como moda la marca de clase correspondiente.

e) Calcula la mediana.

f) Halla la desviación típica.

(Sugerencia: averigua el intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada* F_i *es inmediatamente superior que la mitad del número de datos. Ese es el intervalo en el que se encuentra la mediana, y su marca de clase se puede tomar como valor aproximado de la mediana.)

13 Combinatoria

INTRODUCCIÓN

La combinatoria estudia las distintas formas de agrupar y ordenar los elementos de un conjunto, según unas normas establecidas.

En esta unidad se aprende a formar esas agrupaciones y a hacer su recuento por métodos de conteo. Se aprenderá también a clasificar las agrupaciones en permutaciones o variaciones, con y sin repetición de elementos, y en combinaciones.

Asimismo, se introducen los números combinatorios y el desarrollo del binomio de Newton.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Métodos de conteo.*
- *Números combinatorios.*
- Propiedades de los números combinatorios.
- *Binomio de Newton.*
- *Variaciones* de n elementos, tomados de m en m, con y sin repetición.
- *Permutaciones* de n elementos, con y sin repetición.
- *Combinaciones* de n elementos, tomados de m en m.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Utilizar distintos métodos de conteo.	• Método del producto. • Diagrama de árbol.	• Realización de conteos por el método del producto. • Elaboración de diagramas de árbol.
2. Manejar números combinatorios.	• $n!$ • $\binom{n}{m}$ • Propiedades de los números combinatorios.	• Desarrollo de $n!$. • Desarrollo de $\binom{n}{m}$. • Aplicación de las propiedades de los números combinatorios.
3. Utilizar el binomio de Newton.	• $(a+b)^n$ • Triángulo de Tartaglia.	• Desarrollo de distintas potencias de binomios.
4. Distinguir entre variaciones y permutaciones.	• $V_{n,\,m}$ • $VR_{n,\,m}$ • P_n	• Aplicación directa de las fórmulas. • Resolución de problemas.
5. Identificar combinaciones de n elementos tomados de m en m.	• $C_{n,\,m}$	• Aplicación directa de la fórmula. • Resolución de problemas.
6. Distinguir entre variaciones, permutaciones y combinaciones.	• Distinción entre $V_{n,\,m}$, $VR_{n,\,m}$, P_n y $C_{n,\,m}$.	• Resolución de problemas.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

13 OBJETIVO 1
UTILIZAR DISTINTOS MÉTODOS DE CONTEO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MÉTODO DEL PRODUCTO

El **método del producto** es un método de conteo que consiste en descomponer el experimento en otros experimentos más simples y multiplicar el número de posibilidades de cada uno de ellos.

EJEMPLO

Sacamos cuatro cartas, sin devolución, de una baraja de 40 cartas. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener?

- Primera carta → cualquiera de las 40 cartas → 40 posibilidades
- Segunda carta → cualquiera de las 39 cartas restantes → 39 posibilidades
- Tercera carta → cualquiera de las 38 cartas restantes → 38 posibilidades
- Cuarta carta → cualquiera de las 37 cartas restantes → 37 posibilidades

Podemos obtener: $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2.193.360$ resultados.

1 **Jimena quiere llevarse de vacaciones dos libros y una película, eligiendo entre cinco libros y ocho películas. ¿De cuántas formas distintas puede hacerlo?**

2 **¿De cuántas formas diferentes puedes colocar las cifras del número 9.432?**

3 **En un restaurante podemos elegir entre tres primeros platos, tres segundos platos, dos postres y cuatro bebidas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?**

DIAGRAMA DE ÁRBOL

El **diagrama de árbol** es un método gráfico de conteo que consiste en marcar, como si fueran las ramas en un árbol, las posibilidades que aparecen en cada uno de los experimentos simples en los que se descompone el experimento. El número de posibilidades se obtiene contando las ramas finales.

EJEMPLO

Olivia tiene cuatro bufandas: roja, azul, negra y verde. Nacho tiene tres gorros: gris, naranja y blanco. ¿De cuántas formas diferentes se podrán poner un gorro y una bufanda cada uno si deciden compartir sus prendas?

Los experimentos simples son elegir una bufanda y elegir un gorro. Realizamos un diagrama de árbol.

- BR
  - GG — BR, GG
  - GN — BR, GN
  - GB — BR, GB
- BA
  - GG — BA, GG
  - GN — BA, GN
  - GB — BA, GB
- BN
  - GG — BN, GG
  - GN — BN, GN
  - GB — BN, GB
- BV
  - GG — BV, GG
  - GN — BV, GN
  - GB — BV, GB

Olivia y Nacho pueden elegir entre 12 conjuntos de gorro y bufanda.

4 **Sabemos que Pedro, Alberto y Alejandro han llegado primero, segundo y tercero en una prueba de natación, pero se desconoce en qué orden. Escribe los posibles resultados ayudándote de un diagrama de árbol.**

5 **Con los dígitos 2, 3 y 4 formamos números de dos cifras.**

a) ¿Cuántos números hay de dos cifras distintas?

b) Si las cifras pueden repetirse, ¿cuántos números podemos hacer?

MANEJAR NÚMEROS COMBINATORIOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dado un número natural n, el **factorial de n** se escribe $n!$.

$$\mathbf{n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Se considera que **0! = 1**.

Dados dos números naturales m y n, ($m < n$), el **número combinatorio n sobre m** se escribe: $\binom{n}{m}$.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n \quad m)!}$$

EJEMPLO

Calcula.

a) **7!** $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

b) $\binom{8}{5} = \dfrac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

1 **Calcula.**

a) $9!$

b) $10! - 8!$

c) $\binom{14}{11}$

d) $\binom{15}{5}$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \qquad \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

EJEMPLO

Demuestra que se verifica la igualdad: $\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \binom{10}{7}$

$$\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 2 \cdot 1} = 84 + 36 = 120$$

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

2 **Demuestra que se verifican las siguientes igualdades.**

a) $\binom{12}{3} = \binom{12}{4} - \binom{13}{4}$

b) $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$

c) $\binom{123}{0} = 1$

OBJETIVO 3

UTILIZAR EL BINOMIO DE NEWTON

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para calcular las potencias del binomio **$(a + b)^n$** se utiliza una fórmula llamada del **binomio de Newton**.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Y para realizar el cálculo de los números combinatorios se puede usar el **triángulo de Tartaglia**.

1 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
1 2 1	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
1 3 3 1	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

EJEMPLO

$$(x-2)^4 = \binom{4}{0} x^4 \cdot (-2)^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot (-2)^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot (-2)^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot (-2)^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot (-2)^4 =$$

$$= 1x^4 \cdot 1 + 4x^3 \cdot (-2) + 6x^2 \cdot 4 + 4x^1 \cdot (-8) + 1x^0 \cdot 16 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

1 **Desarrolla y simplifica cuando sea posible.**

a) $\left(a + \dfrac{1}{2}\right)^3 =$

b) $(x^2 - 1)^5 =$

c) $\left(3x - \dfrac{1}{3}\right)^4 =$

d) $\left(\dfrac{x}{2} - x\right)^6 =$

2 **Completa el siguiente desarrollo.**

$$(y+3)^{\square} = \binom{5}{0} y^{\square} 3^0 + \binom{5}{1} \square\, 3^2 + \binom{5}{2} y^2 \square + \binom{5}{\ } \square + \binom{5}{\ } y^4 3^1 + \binom{5}{0} y^5 3^0 =$$

$$= \square + \square + \square + \square + \square + \square$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

13 OBJETIVO 4
DISTINGUIR ENTRE VARIACIONES Y PERMUTACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **variaciones**, $V_{n,\,m}$, cuentan los diferentes grupos de m elementos que se pueden formar con los n elementos de un conjunto ($m < n$), siempre que los elementos no se puedan repetir e influya el orden en que los coloquemos.

$$V_{n,\,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Las **variaciones con repetición** de n elementos, tomados de m en m, $VR_{n,\,m}$, son variaciones en las que los elementos se pueden repetir.

$$VR_{n,\,m} = n^m$$

EJEMPLO

Calcula.

a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se forman con los dígitos impares?

b) ¿Y si las cifras se pueden repetir?

a) Tenemos $n = 4$ elementos y los colocamos en grupos de $m = 3$ elementos. Influye el orden, por ejemplo, $315 \neq 351$. Las cifras han de ser distintas.

$$V_{4,\,3} = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ números}$$

b) Tenemos $n = 4$ elementos y los colocamos en grupos de $m = 3$ elementos. Influye el orden, por ejemplo, $315 \neq 351$. Las cifras pueden repetirse.

$$VR_{4,\,3} = 4^3 = 64 \text{ números}$$

1 **Se asigna a cada uno de los 25 alumnos de una clase un número. Se introducen en una bolsa 25 bolas numeradas, de las cuales sacamos tres. La primera bola que saquemos será para el delegado, la segunda para el subdelegado y la tercera para el secretario de la clase. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?**

2 **Una caja tiene una bola de cada uno de estos colores: rojo, azul, verde y amarillo. Se extraen, de una en una, tres bolas y se colocan sobre una mesa en el orden de extracción.**

a) ¿Cuántas colocaciones diferentes podemos tener si la bola extraída no se devuelve a la urna?

b) ¿Y si la bola se extrae con devolución?

EJEMPLO

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas del cine?

En las distintas ordenaciones importa el orden. Y como dos personas no se sientan en la misma butaca, no hay elementos repetidos. Además, tenemos 8 elementos y los ordenamos.

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320 \text{ formas}$$

3 **Daniel, Viviana y Nicolás quieren repartirse tres libros distintos. ¿De cuántas formas diferentes pueden hacer el reparto?**

4 **Patricia tiene seis postales distintas que quiere enviar a seis amigos. ¿De cuantas maneras diferentes las puede enviar?**

5 **Con las cifras del número 53.412:**

a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas puedo formar?

b) Y si se repiten las cifras, ¿cuántos números de tres cifras se obtienen?

c) Calcula los números que se pueden formar con las cinco cifras.

6 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $P_9 - P_7$ b) $V_{6,3} + VR_{3,2}$ c) $P_5 - V_{5,3}$

13 OBJETIVO 5

IDENTIFICAR COMBINACIONES DE *n* ELEMENTOS TOMADOS DE *m* EN *m*

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **combinaciones** de n elementos, tomados de m en m, $C_{n,\,m}$, se utilizan para contar el número de grupos diferentes, en los que no importa el orden, que se pueden formar con m elementos distintos, elegidos de un conjunto de n elementos.

$$C_{n,\,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

EJEMPLO

¿Cuántos puntos de intersección producen 7 rectas coplanarias sabiendo que no hay dos rectas paralelas ni más de tres rectas que se corten en el mismo punto?

Tenemos $n = 7$ elementos y los colocamos en grupos de $m = 2$ elementos. No importa el orden, y el punto de intersección de las rectas r y s es el mismo que el de las rectas s y r.

$$C_{n,\,m} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21 \text{ puntos}$$

1 **¿Cuántas sumas diferentes, de cuatro sumandos distintos de una sola cifra, se pueden formar?**

2 **¿Cuántas multiplicaciones diferentes, de cuatro factores distintos de una sola cifra, se pueden formar con la condición de que el producto no sea cero?**

3 **Ana, Borja, Isabel, María, Diego y Beatriz hacen un torneo de tenis. Si todos juegan entre sí, ¿cuántos partidos individuales tendrá el torneo?**

DISTINGUIR ENTRE VARIACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para distinguir entre variaciones, variaciones con repetición, permutaciones y combinaciones hay que contestar a tres preguntas.

¿Influye el orden?	No	Combinaciones				
	Sí	¿Se trabaja con todos los elementos?	Sí	Permutaciones		
			No	¿Se pueden repetir los elementos?	Sí	Variaciones con repetición
					No	Variaciones

EJEMPLO

Halla cuántas palabras de tres letras distintas, tengan o no sentido, pueden formarse con las letras de la palabra CAMINO si todas deben empezar por *c* y no pueden contener la letra *o*.

¿Influye el orden? Sí.

¿Se trabaja con todos los elementos? No.

¿Se pueden repetir los elementos? No.

Son variaciones, pues todas las palabras han de empezar por *c* y no pueden incluir la letra *o*, siendo $n = 4$ elementos, tomados en grupos de $m = 3$.

$$V_{4,\,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ palabras}$$

1 **¿De cuántas formas distintas podemos colocar nueve discos en una caja?**

¿Influye el orden?

¿Se trabaja con todos los elementos?

¿Se pueden repetir los elementos?

2 **Pilar confecciona jerseys de dos colores. Si tiene lana de 10 colores diferentes, ¿cuántos tipos de jerseys puede hacer?**

¿Influye el orden?

¿Se trabaja con todos los elementos?

¿Se pueden repetir los elementos?

3 **Con los números 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos múltiplos de 5 de tres cifras se pueden formar?**

a) Las cifras han de ser distintas.

b) Las cifras se pueden repetir.

4 **Un alumno tiene 9 asignaturas en un curso. La nota de cada asignatura puede ser suspenso, aprobado, bien, notable o sobresaliente. ¿Cuántos boletines de notas distintos puede obtener?**

5 **En una oposición, el temario consta de 75 temas. El día del examen se eligen dos temas al azar. ¿Cuántos exámenes se pueden hacer?**

6 **Un bar prepara bocadillos de tres ingredientes. Si dispone de 12 ingredientes distintos, ¿cuántas clases de bocadillos puede preparar?**

7 **Con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números pares de seis cifras distintas se pueden formar?**

14 Probabilidad

INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana tienen lugar acontecimientos cuya realización es incierta y en los que el grado de incertidumbre es mayor o menor en cada caso. Los acontecimientos cuya realización depende del azar se llaman sucesos aleatorios, y la probabilidad mide hasta qué punto podemos esperar que sucedan.

Las posibles dificultades de esta unidad son más de tipo conceptual que procedimiental. Hay que incidir en la comprensión de estos conceptos: experimento aleatorio, espacio muestral, suceso elemental, operaciones con sucesos, tipos de frecuencias y regla de Laplace.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Suceso elemental*: cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- *Suceso seguro* es el que se verifica siempre, y *suceso imposible* es el que no se verifica nunca.
- La *unión* de dos sucesos la forman todos los sucesos elementales de los dos sucesos.
- La *intersección* de dos sucesos la forman los sucesos elementales comunes a ambos.
- *Sucesos compatibles*: tienen algún suceso elemental en común. *Sucesos incompatibles*: no tienen ningún suceso elemental en común.
- *Regla de Laplace*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Clasificar los experimentos. Obtener el espacio muestral.	• Experimento determinista. • Experimento aleatorio. • Espacio muestral. • Suceso elemental.	• Clasificación de experimentos. • Obtención del espacio muestral de un experimento aleatorio.
2. Obtener los distintos tipos de sucesos.	• Suceso seguro. • Suceso imposible.	• Expresión de los sucesos elementales, el suceso seguro y el suceso imposible de un experimento aleatorio.
3. Operar con sucesos.	• Unión e intersección de sucesos. • Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios.	• Obtención de la unión e intersección de dos o más sucesos y sus contrarios.
4. Obtener la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de un suceso.	• Frecuencia absoluta. • Frecuencia relativa.	• Obtención de las frecuencias absolutas y relativas de sucesos.
5. Calcular la probabilidad de un suceso.	• Regla de Laplace.	• Aplicación de la regla de Laplace para calcular probabilidades.
6. Experimentos compuestos.	• Probabilidad de un suceso compuesto.	• Determinación de probabilidades de sucesos compuestos.
7. Probabilidad condicionada.	• Sucesos dependientes. • Sucesos independientes.	• Determinación de probabilidades condicionadas de sucesos compuestos. Diagramas de árbol.
8. Tablas de contingencia.	• Tablas de contingencia.	• Obtención de probabilidades de sucesos simples y compuestos mediante tablas de contingencia.

14 OBJETIVO 1
CLASIFICAR LOS EXPERIMENTOS. OBTENER EL ESPACIO MUESTRAL

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **experimento determinista** es aquel experimento en el que podemos predecir su resultado, es decir, sabemos lo que sucederá antes de que ocurra.

  Por ejemplo:

  – *Si ponemos un recipiente con agua a calentar, conocemos que a 100 °C el agua hierve.*

  – *Si un coche circula a 120 km/h tarda 2 horas en hacer un trayecto, y sabemos que habrá recorrido 240 km.*
- Un **experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado **no se puede predecir**, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, de antemano no conocemos el resultado que vamos a obtener.

  Por ejemplo:

  – *Si lanzamos una moneda al aire, no podemos predecir si saldrá cara o cruz.*

  – *Si lanzamos un dado de parchís, no podemos saber el número que saldrá.*

  Los experimentos con los que se trabaja en Estadística son experimentos aleatorios.

1 **Clasifica estos experimentos. En caso de que sean aleatorios, escribe un posible resultado.**

EXPERIMENTO	DETERMINISTA	ALEATORIO	
Lanzar una moneda al aire		X	Sacar cara
Elevar un número al cuadrado			
Sacar una carta de una baraja española			
Medir la temperatura a la que se congela el agua			
Al lanzar un dado de parchís, sacar un número mayor que 4			

- El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por *E*.
- Cada uno de los resultados posibles se denomina **suceso elemental**.

EJEMPLO

Experimento	Espacio muestral	Sucesos elementales
Lanzar al aire una moneda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (c) y cruz (x)
Lanzar un dado de parchís	$E = \{1, 2, 3, 4, 5 \text{ y } 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 y 6
	↑ Todos los resultados posibles	↑ Cada uno de los resultados posibles

2 **Obtén el espacio muestral del siguiente experimento: determinar la suma de los puntos obtenidos al lanzar al aire dos dados de parchís.**

OBJETIVO 2

OBTENER LOS DISTINTOS TIPOS DE SUCESOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **suceso** puede estar formado por uno o varios sucesos elementales.
- El **suceso seguro** contiene a todos los resultados posibles (sucesos elementales). **Se verifica siempre.**
- El **suceso imposible** no contiene ningún suceso elemental. **Nunca se verifica.**

EJEMPLO

En el experimento de lanzar un dado de parchís al aire, un *suceso seguro* es obtener un número menor que 7, y un *suceso imposible* es que salga el número 15.

1 **Se lanza al aire un dado de parchís. Escribe los sucesos elementales que componen los siguientes sucesos.**

a) Salir un número par: $A = \{2, 4, 6\}$.

b) Salir un número menor que 3.

c) Salir un número que sea múltiplo de 3.

2 **Con una baraja de cartas española se realiza el experimento de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen los siguientes sucesos.**

a) Sacar una carta de copas.

b) Sacar un as.

c) Sacar una figura (sota, caballo o rey).

d) Un suceso seguro.

e) Un suceso imposible.

3 **De estos experimentos, indica qué sucesos son seguros y cuáles son imposibles.**

EXPERIMENTO	SUCESO SEGURO	SUCESO IMPOSIBLE
Al lanzar un dado de parchís al aire, salir un número mayor que 6		
Al lanzar dos dados, la suma de sus puntuaciones es menor que 13		
De una baraja española de 40 cartas, sacar el 9 de corazones		
Al tirar dos dados al aire y multiplicar la puntuación de sus caras, obtener 40		

14 OBJETIVO 3
OPERAR CON SUCESOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **operación entre sucesos** de un espacio muestral nos permite obtener otro suceso del mismo espacio muestral. Las dos operaciones más importantes son la unión y la intersección de sucesos.

- **Unión de sucesos:** la unión de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) que están en cualquiera de los sucesos A o B:

  $$A \cup B = A \text{ unión } B$$

- **Intersección de sucesos:** la intersección de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) comunes a los sucesos A y B:

  $$A \cap B = A \text{ intersección } B$$

- Cuando dos sucesos no tienen ningún suceso elemental en común, se dice que son **incompatibles**:

  $$A \cap B = \emptyset$$

- Cuando dos sucesos tienen algún suceso elemental en común, se dice que son **compatibles**:

  $$A \cap B \neq \emptyset$$

- Dado un suceso, A el suceso **contrario**, $\overline{A}$ está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A.

EJEMPLO

En el experimento consistente en lanzar un dado, considera los sucesos:

A = obtener un número menor o igual que 5 = {1, 2, 3, 4, 5}

B = obtener un número par = {2, 4, 6}

a) Escribe el suceso unión, formado por todos los sucesos elementales de A y B.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) Escribe el suceso intersección, formado por todos los sucesos comunes de A y B.

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

c) Escribe el suceso contrario de A, formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A.

$$\overline{A} = \{6\}$$

d) Escribe el suceso contrario de B, formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en B.

$$\overline{B} = \{1, 3, 5\}$$

Observa que la unión de un suceso y su contrario es siempre el espacio muestral.

$$A \cup \overline{A} = E$$

1 **Considera el experimento de lanzar un dado de parchís y los sucesos: A = salir un número par y B = salir un número primo. Escribe los sucesos A y B, y obtén los siguientes sucesos.**

$A = \{\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_\}$ $B = \{\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_\}$

a) $A \cup B =$ e) $A \cap B =$

b) $\overline{A} =$ f) $\overline{B} =$

c) $A \cup B =$ g) $A \cup \overline{B} =$

d) $\overline{A} \cap B =$ h) $A \cap \overline{B} =$

2 De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta y se consideran los siguientes sucesos.

A = salir un as
B = salir bastos
C = no salir 7
D = salir una figura.

Señala si las parejas de sucesos son compatibles, incompatibles o contrarias.

SUCESOS	COMPATIBILIDAD		CONTRARIOS	
	Compatibles	Incompatibles	Sí	No
A y B				
B y C				
A y D				
B y D				

3 En una bolsa hay diez bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola y se consideran los sucesos.

A = sacar un número par
B = sacar un número primo
C = sacar un número mayor que 7

Escribe los siguientes sucesos.

a) $A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
b) $B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
c) $C = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
d) $\overline{A} = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
e) $\overline{B} = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
f) $\overline{C} = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
g) $A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
h) $A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
i) $A \cup C = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
j) $A \cap C = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
k) $\overline{A} \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
l) $\overline{A} \cap C = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

4 Se lanzan dos dados de parchís y se consideran estos sucesos.

A = suma par
B = suma menor que 9
C = suma mayor que 10

Escribe los siguientes sucesos.

a) $A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
b) $B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
c) $C = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
d) $\overline{A} = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
e) $\overline{B} = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
f) $\overline{C} = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
g) $A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
h) $A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
i) $A \cup C = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
j) $A \cap C = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
k) $\overline{A} \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$
l) $\overline{A} \cap C = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

14 OBJETIVO 4
OBTENER LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y LA FRECUENCIA RELATIVA DE UN SUCESO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **frecuencia absoluta (f_i)** de un suceso es el número de veces que aparece dicho suceso cuando se repite un experimento aleatorio n veces.
- La **frecuencia relativa (h_i)** de un suceso es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se ha repetido el experimento: $h_i = \frac{f_i}{n}$

EJEMPLO

Hemos lanzado un dado 120 veces, obteniendo los resultados que aparecen en la tabla.

CARA	1	2	3	4	5	6	TOTAL
f_i	18	21	19	18	23	20	120
h_i	0,15	0,18	0,16	0,15	0,19	0,17	1

El número de veces que aparece cada cara es su *frecuencia absoluta*.

La *frecuencia relativa* se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento.

1 **Se lanzan dos dados de parchís simultáneamente 120 veces, anotando cada vez la suma de las dos puntuaciones obtenidas. Los resultados aparecen en la siguiente tabla.**

SUMA	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	8	10	12	18	19	16	13	11	5	5
h_i											

a) Completa la tabla, calculando las frecuencias relativas.

b) Se consideran los sucesos: A = número múltiplo de 5, B = número par, C = número mayor que 6. Determina las frecuencias relativas de A, B y C.

$A = \{5, 10\}$ $\quad h_A = h_5 + h_{10} =$ ______________ = ________

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\quad h_B = h_2 + h_4 + h_6 + h_8 + h_{10} =$ ______________ = ________

$C = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $\quad h_C = h_7 + h_8 + h_9 + h_{10} + h_{11} + h_{12} =$ ______________ = ________

c) Halla la frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$.

$$A \cup B = \{5, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

$h_{A \cup B} =$ ______________

$A \cap B =$ $\qquad$ $A \cap C =$

$h_{A \cap B} =$ ______________ $\qquad$ $h_{A \cap C} =$ ______________

$A \cup C =$ $\qquad$ $B \cup C =$

$h_{A \cup C} =$ ______________ $\qquad$ $h_{B \cup C} =$ ______________

OBJETIVO 5

CALCULAR LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

REGLA DE LAPLACE

Cuando todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A es el cociente del número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles. Esta expresión es la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Las propiedades de esta regla son:

a) La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.

b) La probabilidad de un suceso imposible es 0. La probabilidad del suceso seguro es 1.

c) La suma de las probabilidades de un suceso A y su contrario $\overline{A}$ es igual a 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

d) La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio es 1. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

e) Dados dos sucesos A y B del espacio muestral E:

- Si son **incompatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si son **compatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

EJEMPLO

En una urna hay 3 bolas rojas, 2 bolas blancas y 4 bolas azules. Si extraemos una bola, halla:

a) La probabilidad de que sea roja.

b) La probabilidad de que no sea blanca.

c) La probabilidad de que sea roja o azul.

d) La probabilidad de que sea azul o blanca.

a) Llamamos a los sucesos: R = sacar bola roja, B = sacar bola blanca y A = sacar bola azul. Aplicando la regla de Laplace, la probabilidad de que la bola que salga sea roja es:

$$P(R) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

b) La probabilidad de que la bola no sea blanca (suceso $\overline{B}$) es:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{10} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

c) La probabilidad de que la bola sea roja o azul es el suceso $R \cup A$.

Como sacar bola roja o azul son sucesos incompatibles (la bola es roja o azul, pero no puede ser roja y azul a la vez), la probabilidad es la suma de ambas probabilidades:

$$P(R \cup A) = P(R) + P(A) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

d) Como sacar bola azul o blanca son sucesos incompatibles, la probabilidad pedida es:

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

14

1 **Lanzamos dos dados de parchís y sumamos los puntos obtenidos. Como la probabilidad de sacar cualquier número en cada dado es la misma por ser sucesos equiprobables, halla:**

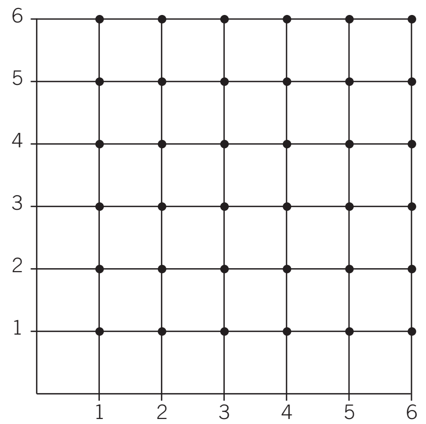
a) El espacio muestral, *E*.

b) La probabilidad de que la suma sea 6.

c) La probabilidad de que la suma no sea 6.

d) La probabilidad de que la suma sea mayor que 10 (la suma de la probabilidad de que sea 11 y la probabilidad de que sea 12).

a) El espacio muestral está formado por todas las posibles combinaciones de las puntuaciones de los dos dados. Las representamos sobre un par de ejes, siendo cada combinación uno de estos puntos.



2 **Una bolsa contiene 4 bolas rojas, 6 bolas verdes y 3 bolas amarillas. Se sacan sin reemplazamiento 2 bolas, de las cuales la primera es verde. Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea:**

a) Amarilla.

b) Roja.

c) Verde.

d) Roja o verde.

3 **Si la extracción se hace con devolución, ¿cuáles son entonces las probabilidades anteriores?**

EXPERIMENTOS COMPUESTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

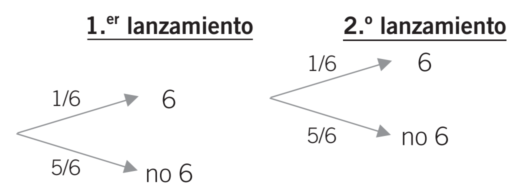
La probabilidad de un experimento compuesto se calcula a partir de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

EJEMPLO

¿Cuál es la probabilidad de sacar dos números 6 al lanzar dos dados de parchís?

Una forma de resolver el problema es aplicar directamente la regla de Laplace: de las 36 combinaciones posibles que pueden darse al tirar dos dados, únicamente es favorable el suceso (6, 6): $P(6, 6) = \frac{1}{36}$.

Otra manera de resolver los problemas de probabilidades compuestas es construir un diagrama de árbol:

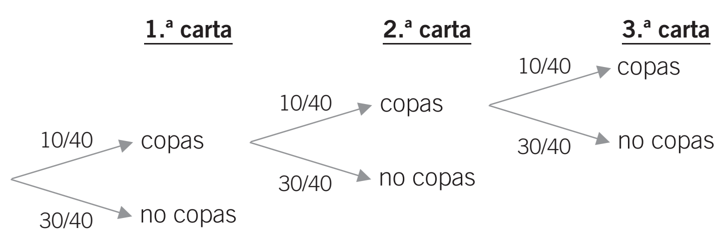


$$P(6, 6) = P(6) \cdot P(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

1 **Halla la probabilidad de sacar tres cartas de copas, al extraer tres cartas de una baraja española.**

a) Devolviendo la carta al mazo b) Sin devolverla al mazo.

a) Formamos el diagrama en árbol, teniendo en cuenta que el número de cartas contenidas en el mazo son 40 siempre, ya que en este caso se devuelven.



$$P(\text{copas, copas, copas}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

b) Forma primero el diagrama de árbol, teniendo en cuenta que el número de cartas contenidas en el mazo disminuye cada vez, pues en este caso no se devuelven.

2 **En una clase hay 18 chicos y 22 chicas. Seleccionados al azar dos alumnos, construye un diagrama de árbol y halla.**

a) La probabilidad de que sean dos chicos.

b) La probabilidad de que sean dos chicas.

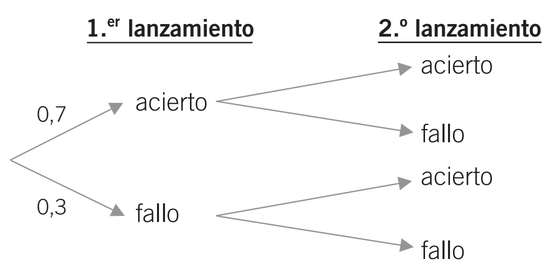
c) La probabilidad de que sean un chico y una chica.

3 **Un jugador de baloncesto lanza dos tiros libres. Sabiendo que suele encestar el 70 % de los tiros que lanza y que falla el 30 %, construye un diagrama de árbol y calcula.**

a) La probabilidad de que enceste los dos tiros.

b) La probabilidad de que solo enceste uno.

c) La probabilidad de que no enceste ninguno.

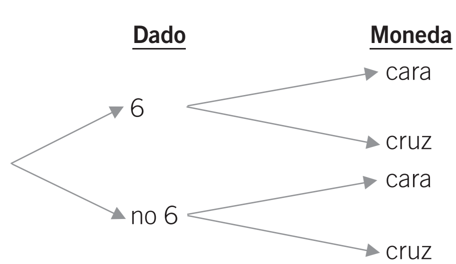


4 **Lanzamos a la vez un dado y una moneda. Construye un diagrama de árbol y calcula.**

a) La probabilidad de que salgan un 6 y cara.

b) La probabilidad de que no salgan un 6 y cruz.

c) La probabilidad de que no salgan un 6 y cara.



PROBABILIDAD CONDICIONADA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

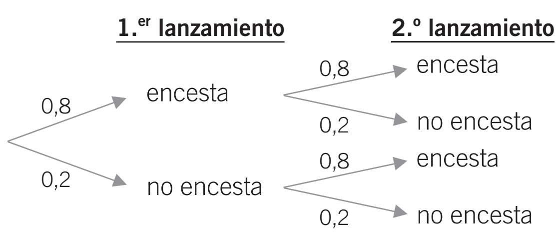
- Un suceso *B* está condicionado por otro suceso *A*, y se expresa *B/A* cuando sabemos que ha ocurrido el suceso *A*.
- La probabilidad de que ocurra $A \cap B$ es igual a la probabilidad de que ocurra el suceso *A*, multiplicada por la probabilidad de que ocurra el suceso *B* condicionado a *A*.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

EJEMPLO

El marcador de un partido de baloncesto entre los equipos A y B está en 80-81, a falta de que un jugador del equipo A lance dos tiros libres. Si suele acertar el 80 % de los lanzamientos, ¿cuál será la probabilidad de que enceste los dos tiros y gane A? ¿Y de que falle los dos tiros y gane B? ¿Y de que enceste uno y queden empatados?

Construimos el correspondiente diagrama de árbol:



Para que gane el equipo A es necesario encestar el segundo lanzamiento, siempre que se haya encestado el primero. Esto se expresa así:

$$P(1.^{\circ} \cap 2.^{\circ}) = P(1.^{\circ}) \cdot P(2.^{\circ}/1.^{\circ})$$

Suponemos que la probabilidad de encestar en el 2.º lanzamiento es independiente de lo que haya ocurrido en el 1.er lanzamiento, y vale igual que en el primero, 80 % = 0,8. En este caso resulta que:

$$P(1.^{\circ} \cap 2.^{\circ}) = P(1.^{\circ}) \cdot P(2.^{\circ}/1.^{\circ}) = P(1.^{\circ}) \cdot P(2.^{\circ}) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$$

Hay un 64 % de probabilidad de que gane el equipo A.

La probabilidad de que falle los dos lanzamientos será:

$$P(\text{no } 1.^{\circ} \cap \text{no } 2.^{\circ}) = P(\text{no } 1.^{\circ}) \cdot P(\text{no } 2.^{\circ}/\text{no } 1.^{\circ}) = P(\text{no } 1.^{\circ}) \cdot P(\text{no } 2.^{\circ}) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$$

La probabilidad de que falle uno de los dos lanzamientos es:

$$P(\text{sí } 1.^{\circ}/\text{no } 2.^{\circ}) + P(\text{no } 1.^{\circ}/\text{sí } 2.^{\circ}) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16 + 0{,}16 = 0{,}32$$

- Dos sucesos *A* y *B* son **independientes** si la realización de *A* no condiciona la probabilidad de *B*:

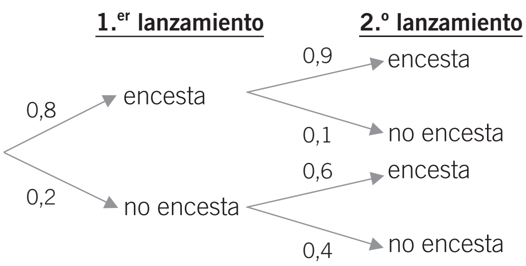
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$$

- Dos sucesos *A* y *B* son **dependientes** si la realización de *A* condiciona la probabilidad de *B*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

1 **Al sacar una carta de una baraja española y lanzar una moneda, ¿cuál es la probabilidad de sacar copas y cruz? ¿Son sucesos dependientes o independientes?**

2 **En el ejemplo anterior, la probabilidad de encestar en el segundo lanzamiento es distinta según se haya encestado o no en el primer lanzamiento. Si ha encestado el primero, la probabilidad del segundo lanzamiento es del 90 %; pero si ha fallado el primero, la probabilidad del segundo lanzamiento es del 60 %. Halla las probabilidades de que gane A, de que gane B o de que se produzca un empate.**



3 **En un club de tenis hay 200 socios, de los que 80 son mujeres. De ellas, 10 son menores de edad, mientras que de los hombres, hay 70 menores de edad. Calcula la probabilidad de que, elegido un socio al azar:**

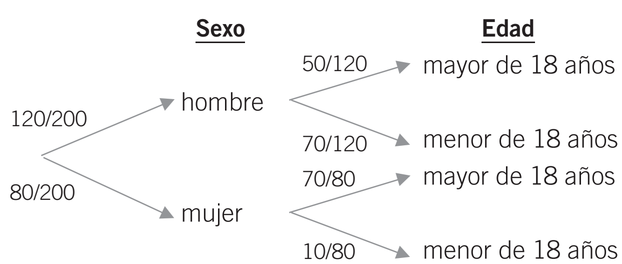
a) Sea hombre.

b) Sea mujer y mayor de edad.

c) Sea hombre y menor de edad.

d) Sea mayor de edad (hombre o mujer).

e) Sea menor de edad (hombre o mujer).



TABLAS DE CONTINGENCIA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Otra forma de resolver los problemas de probabilidad de sucesos simples y compuestos es a partir de una tabla de contingencia.

EJEMPLO

En una pandilla formada por 12 chicas y 8 chicos, se forman dos grupos, uno para ir al cine y otro para ir al fútbol. Para ir al fútbol se apuntan 2 chicos y 9 chicas. Elegido uno de los 20 amigos al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y vaya al fútbol?

c) ¿Y la probabilidad de que sea chico y vaya al cine?

Con los datos del enunciado, construimos una tabla de doble entrada:

	CHICAS	CHICOS	TOTAL
VAN AL FÚTBOL	9	2	11
VAN AL CINE	3	6	9
TOTAL	12	8	20

a) La probabilidad de que sea chica la obtenemos dividiendo el total de chicas (12) entre el total de amigos (40):

$$P\,(\text{chica}) = \frac{12}{40} = 0{,}3$$

b) Para hallar la probabilidad de que sea chica y vaya al fútbol, observamos la tabla:

$$P\,(\text{chica e ir al fútbol}) = \frac{9}{40} = 0{,}225$$

c) La probabilidad de que sea chico y vaya al cine es:

$$P\,(\text{chico e ir al cine}) = \frac{6}{40} = 0{,}15$$

1 **Resuelve el ejercicio 3 de la página anterior construyendo una tabla de contingencia.**

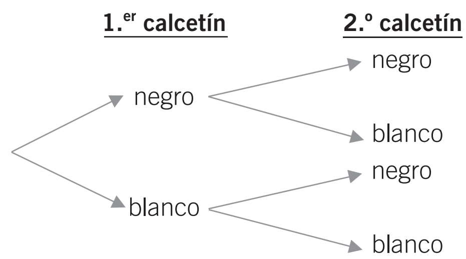
	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
MENORES DE 18 AÑOS	70	50	120
MAYORES DE 18 AÑOS	10	70	80
TOTAL	80	120	200

2 **En un cajón hay 16 calcetines negros y 12 calcetines blancos. Halla, construyendo un diagrama de árbol, la probabilidad de que, al sacar dos calcetines al azar:**

a) Los dos sean negros.

b) Salga uno de cada color.

c) Ambos sean blancos.



3 **En una clase hay 16 chicas y 14 chicos. Al preguntarles quién creen que va a ganar el partido Real Madrid-Barcelona, 9 chicas contestan que el equipo ganador será el Barcelona y 6 chicos creen que ganará el Real Madrid. Elegido un nombre cualquiera al azar, calcula la probabilidad de:**

a) Ser chica y partidaria del Barcelona.

b) Ser chico y partidario del Real Madrid.

4 **En un banquete hay 28 hombres y 32 mujeres. Al elegir entre postre y café, toman postre 15 hombres y 20 mujeres. Elegida una persona al azar, determina la probabilidad de que:**

a) Sea mujer y tome café.

b) Tome postre (indistintamente de que sea hombre o mujer).

