IES CARPE DIEM

Opción A

matemáticas

1 Los números enteros y racionales

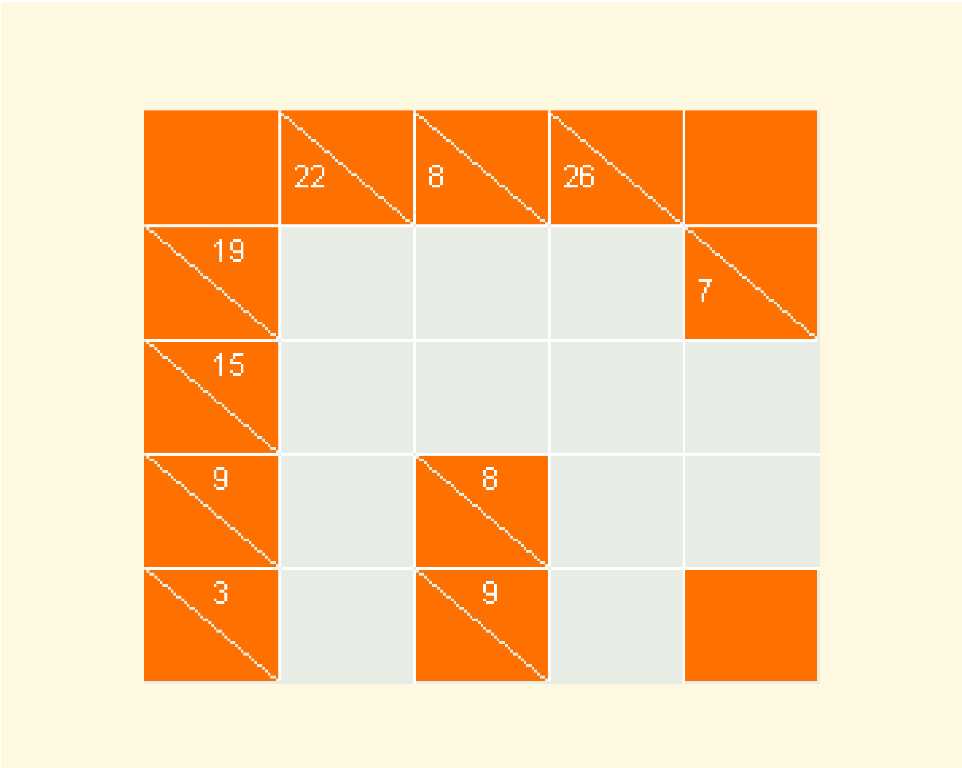
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Representar y ordenar números enteros
- Operar con números enteros
- Aplicar los conceptos relativos a los números enteros en problemas reales
- Reconocer y representar número racionales
- Operar con números racionales
- Expresar números en notación científica y operar con ellos

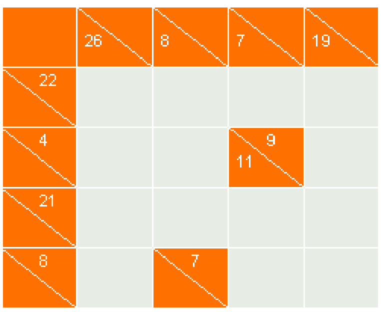
Antes de empezar

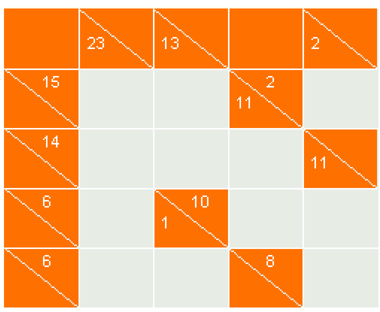
Comienza con un juego de números:

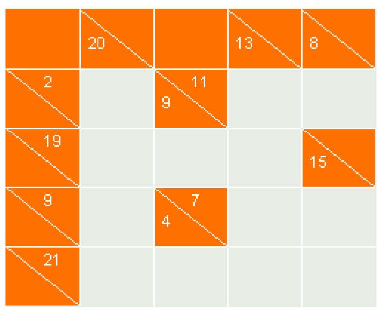


Tienes que rellenar las casillas que están en blanco, con números del 1 al 9, con la única condición de que sumen los números blancos indicados y que no se pueden repetir en la misma fila o columna.

Y aquí tienes alguno más para practicar:







1. Números enteros

Representación y orden

El conjunto de los **números enteros Z** está formado por:

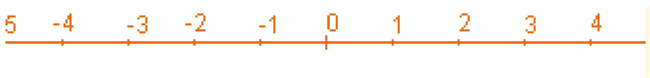
- Números enteros positivos: 1,2,3,4....
- Números enteros negativos: -1,-2,-3,-4..
- El número cero: 0

El **opuesto** de un número entero, **op(a)**, es el número cambiado de signo: op(a)=-a, op(-a)=a

El **valor absoluto** de un número entero, **|a|**, es el mismo número si es positivo y su opuesto si es negativo.

Los números enteros son un **conjunto ordenado**.

Los números enteros se representan en la recta numérica.



Opuesto:
op(-3)=3
op(8)=-8

Valor Absoluto:
|7|=7
|-3|=3

Orden:
-3<-2<-1<0<1<2<3

Suma y resta

- Para **sumar** dos **números enteros**, **a+b**
  - Si son del mismo signo se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo.
  - Si son de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del número de mayor valor absoluto.
- Para **restar** dos **números enteros**, **a-b**, se suma al primero el puesto del segundo: a - b = a + (-b).

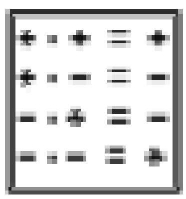
Suma y resta

$$-3-4=-7$$
$$-3+4=1$$
$$3-4=-1$$
$$3+4=7$$

Producto y división

Para **multiplicar ó dividir** dos **números enteros**, se multiplican ó se dividen sus valores absolutos. El signo será positivo si los dos son del mismo signo y negativo si son de signo contrario.

Regla de los signos:



Producto

$$(-3)\cdot(-4)=12$$
$$(-3)\cdot(+4)=-12$$
$$(+3)\cdot(-4)=-12$$
$$(+3)\cdot(+4)=12$$

División

$$(-8):(-4)=2$$
$$(-8):(+4)=-2$$
$$(+8):(-4)=-2$$
$$(+8):(+4)=2$$

EJERCICIOS resueltos

1. Calcular el valor absoluto de -3, 5, 0

Sol: $|-3|=3 \quad |5|=5 \quad |0|=0$

2. Ordena de mayor a menor: -78, -12, -35

Sol: $-12 > -35 > -78$

3. Calcula el opuesto de -3, 7, 0

Sol: $op(-3)=3 \quad op(7)=-7 \quad op(0)=0$

4. Calcula: $4(1-9)-1+8(1+2)$

Sol: $4(1-9)-1+8(1+2)=4(-8)-1+8(3)=-32-1+24=-9$

5. Calcular: $-8(7+3):(-8)$

Sol: Dividiendo $-8(7+3):(-8)=-8(10):(-8)=-80:-8=10\ 5x+4=3$

6. Halla el m.c.m. (882,168)

Sol: $882=2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \qquad 168=2^3 \cdot 3 \cdot 7$

$mcm(882,168)=2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2=3528$

7. Todos los pasteles que hemos fabricado hoy los hemos metido en cajas de 75 y 189 pasteles y no ha sobrado ninguno. ¿Cuántos pasteles como mínimo henos fabricado hoy?

Sol: Se han fabricado 4725 pasteles $\quad 75=3 \cdot 5^2 \qquad 189=3^3 \cdot 7$

$mcm(75,189)=3^3 \cdot 5^2 \cdot 7=4725$

8. El pasillo de una casa tiene 1024 cm de largo por 192 cm de ancho. Se quieren poner baldosas cuadradas del mayor tamaño posible. Halla las dimensiones que deben tener las baldosas si no queremos cortar ninguna.

Sol: Las baldosas deben tener 64 cm de lado $\quad 1024=2^{10} \qquad 192=2^6 \cdot 3$

$mcd(1024,192)=2^6=64$

9. ¿Cuánto tiene que valer x para qué el número 9x7 sea divisible por 3?

Sol: $9+x+7=16+x$ tiene que ser múltiplo de 3

$x=2 \quad x=5 \quad x=8$

10. Escribe un número mayor de 200 y menor 250 que sea múltiplo de 30

Sol: 210, 240

2. Fracciones y decimales

Fracciones equivalentes

Una **fracción** es una expresión de la forma:

$$\frac{a}{b}$$

con a y b números enteros y b#0, a se llama numerador y b denominador.

- Si m.c.d.(a,b)=1 la fracción se dice **irreducible**.
- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si a·d=b·c

El conjunto de los **números racionales *Q*** esta formado por todos los números que se pueden expresar en forma de fracción

Fracción irreducible

$$\frac{3}{4}$$

$$\text{mcd}(3,4)=1$$

Fracciones equivalentes

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

$$3{\cdot}8=4{\cdot}6$$

$$24=24$$

Expresión decimal. Clasificación

Para obtener la expresión decimal de una fracción, se divide el numerador entre el denominador.

Al hacer esta división el resultado puede ser:

Decimal exacto	Número finito de cifras decimales	Los únicos divisores del denominador son 2 o 5
Periódico puro	La parte decimal se repite indefinidamente (periodo)	Los números 2 o 5 no son divisores del denominador
Periódico mixto	La parte decimal esta formada por una parte que no se repite (ante periodo) seguida del periodo	Los divisores del denominador son 2 o 5 y tiene además otros divisores

Los decimales exactos y periódicos, puros o mixtos, pueden expresarse ne forma de fracción.

Decimal exacto:

$$\frac{7}{2}=3'5$$

y al contrario:

$$4{,}35=\frac{435}{100}=\frac{87}{20}$$

Periódico puro:

$$\frac{1}{3}=0'3333....=0'\overset{\frown}{3}$$

y al contrario:

$$4{,}\overset{\frown}{3}=\frac{43-4}{9}=\frac{39}{9}=\frac{13}{3}$$

Periódico mixto:

$$\frac{1}{6}=0'1666....=0'1\overset{\frown}{6}$$

y al contrario:

$$4{,}11\overset{\frown}{3}=\frac{4113-411}{900}=\frac{3702}{900}=\frac{1234}{300}$$

EJERCICIOS resueltos

11. Escribe la fracción irreducible de:

a) $\frac{160}{800}$ Sol: se simplifica por 160 $\frac{1}{5}$

b) $\frac{128}{256}$ Sol: se simplifica por 128 $\frac{1}{2}$

c) $\frac{14}{448}$ Sol: se simplifica por 14 $\frac{1}{32}$

12. Halla x para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{25}{x}$ y $\frac{75}{27}$ Sol: $x = 9$

b) $\frac{25}{32}$ y $\frac{75}{x}$ Sol: $x = 96$

c) $\frac{x}{18}$ y $\frac{88}{36}$ Sol: $x = 44$

13. Escribe la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{88}{9}$ Sol: $9,\overset{\frown}{7}$

b) $\frac{331}{99}$ Sol: $3,\overset{\frown}{34}$

c) $\frac{11}{3}$ Sol: $3,\overset{\frown}{6}$

14. Escribe la fracción generatriz de:

a) $3,3\overset{\frown}{32}$ Sol: $\frac{3319}{990}$

b) 7,68 Sol: $\frac{192}{25}$

c) $5,\overset{\frown}{80}$ Sol: $\frac{575}{99}$

3. Números racionales

Representación y orden

Los números racionales es un **conjunto ordenado**, para ordenar las fracciones se escriben fracciones equivalentes a ellas con el mismo denominador (reducir a común denominador) y se ordenan los numeradores.

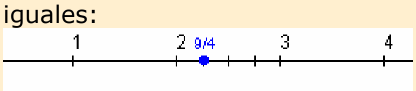
Los números racionales se representan de manera exacta en la recta numérica.

Antes de representar una fracción hay que saber entre que valores está comprendido

$$\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4} \quad \rightarrow 2<\frac{9}{4}<3$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Se divide el segmento de extremos 2 y 3 en cuatro partes iguales:



Suma y resta

Para **sumar** o **restar** los números racionales se escriben en forma de fracción y luego se suman o restan las fracciones.

Para sumar o restar las fracciones se reducen a común denominador y luego se suman o restan los numeradores.

Suma

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$$

Resta

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{7}{12}$$

Multiplicación y división

- El **producto** de dos números racionales es otro número racional que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.
- Para **dividir** dos números racionales se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Producto

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$$

Cociente

$$\frac{3}{4}:\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 1}=\frac{15}{4}$$

Operaciones con números periódicos

$$1'\widehat{2}+1'7\widehat{8}=\frac{12-1}{9}+\frac{178-17}{90}=$$

$$=\frac{11}{9}+\frac{161}{90}=\frac{110}{90}+\frac{161}{90}=$$

$$=\frac{271}{90}=3'0\widehat{1}$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

$$3^0 = 1$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Potencias de exponente entero

Si **a** es un número real y **n** un número natural, se tiene que:

$$a^n = \underbrace{a \cdots\cdots a}_{n \text{ veces}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdots\cdots \frac{1}{a}}_{n \text{ veces}}$$

Además para cualquier valor de **a** distinto de 0, se cumple:

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Para elevar una fracción a una potencia se elevan el numerador y el denominador.

$$3^4 \cdot 3^7 = 3^{11}$$

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^3$$

$$\left(3^4\right)^7 = 3^{28}$$

$$3^5 \cdot 5^5 = (3 \cdot 5)^5 = 15^5$$

$$\frac{3^{-5}}{6^{-5}} = \left(\frac{3}{6}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$$

Operaciones con potencias

Si m y n son números enteros cualesquiera se cumple:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Resolución de problemas

En la vida cotidiana aparecen situaciones donde es necesario trabajar con números faccionarios.

Para resolver problemas con fracciones debes seguir las mismas pautas que con otros tipos de problemas.

- Lee atentamente el enunciado.
- Reflexiona sobre la situación que propone el problema, qué te pide, qué datos tienes,...
- Organiza la información que tienes, haz un esquema, un dibujo...
- Una vez que tengas la solución compruébala.

Si tres kilos y cuarto de manzanas cuestan 2'6 €. ¿Cuánto costaran dos kilos y medio?

Calculamos el precio de un kg de manzanas. Para ello se divide le precio pagado entre los kilogramos comprados:

$$2'6 : \left(3 + \frac{1}{4}\right) = \frac{26}{10} : \frac{13}{4} = \frac{104}{130} = 0'8 \text{ €}/\text{kg}$$

El precio de dos kilos y medio será:

$$0'8 \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{40}{20} = 2 \text{ €}$$

Un abuelo deja al morir 120000€ para sus nietos Juan, Pedro y Ana. A Juan le toca 1/5, a Pedro 1/3 y a Ana el resto.¿Cuánto le toca a cada uno?

Juan $\quad 120000 \cdot \frac{1}{5} = \frac{120000}{5} = 24000\text{€}$

Pedro $\quad 120000 \cdot \frac{1}{3} = \frac{120000}{2} = 20000\text{€}$

Ana $\quad 120000 - 24000 = 96000\text{€}$

EJERCICIOS resueltos

15. Ordena de mayor a menor:

a) $\frac{56}{5}$ y $\frac{31}{2}$ Sol: $\frac{31}{2} > \frac{56}{5}$

b) $-\frac{10}{3}$ y $-\frac{33}{2}$ Sol: $-\frac{10}{3} > -\frac{33}{2}$

16. Calcula dando el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $4-\frac{1}{2}\left[\frac{10}{3}-\left(1+\frac{5}{6}\right)\right]=4-\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}-\frac{11}{6}\right)=4-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{6}=4-\frac{9}{12}=\frac{39}{12}=\frac{13}{4}$

b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}-7\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{5}:3=\frac{5}{6}-7\cdot\frac{-5}{12}-\frac{4}{15}=\frac{5}{6}+\frac{35}{12}-\frac{4}{15}=\frac{50}{60}+\frac{175}{60}-\frac{16}{60}=\frac{209}{60}$

c) $\dfrac{\frac{3}{4}-3\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)}{\frac{3}{2}-\frac{1}{5}:\frac{4}{3}}=\dfrac{\frac{3}{4}-3\cdot\frac{-3}{20}}{\frac{3}{2}-\frac{3}{20}}=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{9}{20}}{\frac{27}{20}}=\dfrac{\frac{24}{20}}{\frac{27}{20}}=\frac{24}{27}=\frac{8}{9}$

17. Calcula dando el resultado en forma decimal:

a) $2,\widehat{98}+6,\widehat{4}$ Sol: $\frac{298-2}{99}+\frac{64-6}{9}=\frac{934}{99}=9,\widehat{43}$

b) $\frac{1}{4}-5,\widehat{6}$ Sol: $\frac{1}{4}-\frac{56-5}{9}=-\frac{195}{36}=-5,41\widehat{6}$

c) $0,1-0,\widehat{24}$ Sol: $\frac{1}{10}-\frac{24}{99}=-\frac{131}{990}=-0,1\widehat{32}$

18. Calcula dando el resultado en forma decimal:

a) $\frac{1}{2}:2'\widehat{7}$ Sol: $\frac{1}{2}:\frac{27-2}{9}=\frac{1}{2}:\frac{25}{9}=\frac{9}{50}=0,18$

b) $4'\widehat{6}\cdot\frac{5}{3}$ Sol: $\frac{46-4}{9}\cdot\frac{5}{3}=\frac{42}{9}:\frac{5}{3}=\frac{210}{27}=7,\widehat{7}$

c) $6,\widehat{15}:0,5$ Sol: $\frac{615-6}{99}:\frac{1}{2}=\frac{609}{99}:\frac{1}{2}=\frac{1218}{99}=12,\widehat{30}$

19. Calcula las siguientes potencias:

a) 2^{-3} Sol: $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$ Sol: $\left(\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{9}{25}$

c) $(-3)^{-4}$ Sol: $\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ Sol: $(-2)^3=-8$

20. Calcula:

a) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$ Sol: $\left(2^2\right)^{-2}\cdot\left(2^3\right)^3=2^2=4$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}:\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$ Sol: $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-3}=\frac{3}{2}$

c) $\frac{343^5}{49^7}$ Sol: $\frac{(7^3)^5}{(7^2)^7}=7^{15-14}=7$

d) $(x^3)^5\cdot(x^4)^{-3}$ Sol: $x^{15-12}=x^3$

4. Notación científica

Definición

Para escribir números muy grandes o muy pequeños se emplea la notación científica.

Un número escrito en notación científica es de la forma **± a · 10^k^** con $1 \leq a < 10$ y k número entero, que se llama **orden de magnitud** del número.

Los números escritos en notación científica son fáciles de comparar:

- Los números esSi k>0 el número de cifras enteras es k+1.
- Si k<0 el número de cifras decimales son la suma de las cifras decimales de a más | k |

Notación científica

$178'23 = 1'7823 \cdot 10^2$

$234000000 = 2'34 \cdot 10^8$

$0'00000012 = 1'2 \cdot 10^{-7}$

Con la calculadora

Para introducir en la calculadora números en notación científica como:

- $9{,}0043 \cdot 10^{13}$

Teclea 9 . 0043 EXP 13

Aparecerá: $9.0043^{\ 13}$

- $6{,}0743 \cdot 10^{-18}$

Teclea 6 . 0743 EXP +/- 18

Aparecerá: $6.0743^{\ -18}$

Si introduces:

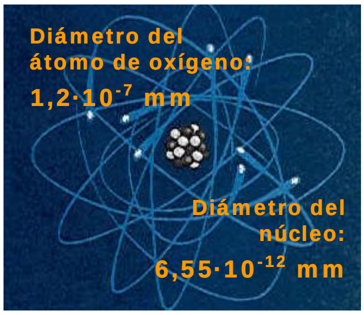
- $900{,}43 \cdot 10^{13}$

Teclea 900 . 43 EXP 13

Aparecerá: $900.43^{\ 13}$

Y pulsando = sale el nº en notación científica: $9.0043^{\ 15}$

Según el modelo de calculadora la tecla indicada es $\boxed{x10^x}$



Operaciones

Suma y Resta

Si los sumandos son del mismo orden de magnitud sumamos o restamos los números que preceden a las potencias de 10.

Si los sumandos no son del mismo orden de magnitud se reducen al mayor de los órdenes, y se suman o se restan los números que preceden a las potencias de 10.

Suma y resta

$1{,}2\cdot10^8+9{,}3\cdot10^9 =$
$= (1{,}2\cdot10^{-1}+9{,}3)\cdot10^9 =$
$=(0{,}12+9{,}3)\cdot10^9 =$
$= 9{,}42\cdot10^9$

$3{,}7\cdot10^8 - 5{,}3\cdot10^9 =$
$=(3{,}7 - 5{,}3\cdot10^{-1})\cdot10^8 =$
$=(3{,}7 - 0{,}53)\cdot10^8 =$
$=3{,}17\cdot10^8$

Multiplicación y división

Para multiplicar o dividir dos números en notación científica, se multiplican o dividen los números que preceden a las potencias de 10 y también dichas potencias.

En todos los casos el resultado se da en notación científica.

Producto y división

$7{,}2\cdot10^8 \cdot 3\cdot10^7 = 21{,}6\cdot10^{15}=$
$= 2{,}16\cdot10^{16}$

$8{,}4\cdot10^8 : 6\cdot10^{10} = 1{,}4\cdot10^{-2}$

EJERCICIOS resueltos

21. Escribe en notación científica:

a) 0'0000038 Sol: $3'8\cdot10^{-6}$

b) 1230000000 Sol: $1'23\cdot10^{9}$

22. Escribe la expresión decimal de:

a) $8'44\cdot10^{8}$ Sol: 844000000

b) $2'1\cdot10^{-4}$ Sol: 0'00021

23. Cuántas cifras decimales tiene el número:

a) $3'2\cdot10^{-9}$ Sol: 10

b) $7'27\cdot10^{-19}$ Sol: 21

24. Cuántas cifras enteras tiene el número:

a) $3'2\cdot10^{23}$ Sol: 24

b) $1'234\cdot10^{54}$ Sol: 55

25. Realiza las siguientes operaciones:

a) $3'2\cdot10^{23}+1'5\cdot10^{22}$

Sol: $3'2\cdot10^{23}+1'5\cdot10^{22}=\left(3'2+1'5\cdot10^{-1}\right)10^{23}=\left(3'2+0'15\right)10^{23}=3'35\cdot10^{23}$

b) $4'1\cdot10^{-12}-1'5\cdot10^{-11}$

Sol: $4'1\cdot10^{-12}-1'5\cdot10^{-11}=\left(4'1\cdot10^{-1}-1'5\right)10^{-11}=\left(0'41-1'5\right)10^{-11}=-1'19\cdot10^{-11}$

c) $4'1\cdot10^{12}\cdot2\cdot10^{32}$

Sol: $4'1\cdot10^{12}\cdot2\cdot10^{32}=8'2\cdot10^{43}$

d) $\dfrac{6'2\cdot10^{23}}{2\cdot10^{-22}}$

Sol: $\dfrac{6'2\cdot10^{23}}{2\cdot10^{-22}}=3'1\cdot10^{45}$

e) $\left(6'2\cdot10^{23}\right)^{2}$

Sol: $\left(6'2\cdot10^{23}\right)^{2}=38'44\cdot10^{46}=3'844\cdot10^{47}$

Para practicar

1. Calcula:

a) $6 - 6(3 - 1)$

b) $2 - (3 - 5(2 + 5) - 1)$

c) $3 - 3(4 - 4(3 - 7) + 1)$

d) $6 - (1 + 2(-3 - 1) - 5)$

2. Calcula:

a) $6 : 2 - 2(3 - 1)$

b) $(-16) : 2 - 3 \cdot 4$

c) $30 : (5 - 5(2 - 3)) + 1$

d) $4(15 : 5 - 2) : 2$

3. Indica si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$

b) $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{9}$

c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{-3}{5}$

4. Halla x para que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{2}{3}$ y $\frac{x}{12}$

b) $\frac{x}{3}$ y $\frac{10}{15}$

c) $\frac{2}{x}$ y $\frac{8}{28}$

5. Escribe la expresión decimal:

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{17}{15}$

6. Escribe la fracción generatriz:

a) $1,\widehat{2}$

b) $3,\widehat{12}$

c) $2,3\widehat{2}$

d) $1,92$

7. Indica qué tipo de número decimal es:

a) $\frac{128}{625}$

b) $\frac{223}{54}$

c) $\frac{51}{27}$

8. Ordena de menor a mayor:

a) $\frac{7}{4}$ y $\frac{67}{20}$

b) $-\frac{5}{3}$ y $-\frac{3}{2}$

c) $\frac{23}{2}$ y $\frac{34}{3}$

9. Calcula y simplifica:

a) $\frac{7}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}$

b) $\frac{3}{5} + 3 - \frac{1}{2}$

c) $-\frac{2}{4} - 3 + \frac{1}{3}$

d) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 1\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - 2\right)$

e) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right)$

10. Calcula y simplifica:

a) $\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$

b) $\frac{7}{4}:\frac{2}{3}$

c) $\left(\frac{3}{4}:\frac{5}{2}\right):\frac{1}{5}$

11. Calcula y simplifica:

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{1}{4}:\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)$

c) $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\left(3-\frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{3}}$

d) $-\frac{4}{9}-\dfrac{6}{3-\frac{1}{3}}$

12. Calcula y simplifica:

a) $1'\widehat{5}+3'\widehat{7}$

b) $2'\widehat{3}-3'\widehat{1}$

c) $3'\widehat{5}:1'\widehat{7}$

13. Calcula y simplifica:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{4}:\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{3}\right)^{2}$

14. Escribe en notación científica:

a) $23'12034$

b) $0'123\cdot10^{12}$

15. Calcula y escribe el resultado en notación científica:

a) $2'3\cdot10^{17}+5'6\cdot10^{18}$

b) $6'8\cdot10^{-8}-5'6\cdot10^{-9}$

c) $2'4\cdot10^{7}\cdot5'2\cdot10^{-18}$

d) $\dfrac{1'24\cdot10^{-7}}{2'48\cdot10^{8}}$

16. Sonia bebe diariamente un litro de leche. Si la leche la compra en botellas de un cuarto de litro. ¿Cuántas botellas debe comprar para 14 días?

17. Si medio kilo de fruta cuesta 3€.¿cuánto costarán tres kilos y medio?

18. Al morir Juan deja una fortuna de 420.000€. A su mujer le deja la mitad y el resto a sus tres hijos en partes iguales. ¿Cuánto le toca a cada uno?.

19. En un laboratorio se ha observado que la población de un cultivo de bacterias se multiplica por 5 cada hora. Si el número inicial era de $1{,}4\cdot10^{16}$ bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de 5 horas?.

20. Un microorganismo mide 1,5 micras; sabiendo que una micra es la millonésima parte de 1 m, expresa en metros y en notación científica la longitud que ocupan 7 millones de microorganismos puestos en fila.

21. Un embalse que abastece a una población tiene 107,8 dam^3 de agua. Si una persona gasta por término medio 770 litros de agua anuales. ¿A qué población podrá abastecer en un año?.

Para saber más

Algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. de dos números

M.C.D(12345 , 60) = 15

	205	1	3
12345	60	45	15
45	15	0	

M.C.D(123456 , 2346) = 6

	52	1	1	1	1	1	15	1	2
123456	2346	1464	882	582	300	282	18	12	6
1464	882	582	300	282	18	12	6	0	

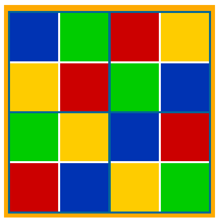
El m.c.d. de dos números se puede calcular dividiendo los números, luego se divide el divisor entre el resto y así hasta que el resto es cero. El último cociente es el m.c.d.

Fíjate en estos dos ejemplos.

Sudokus

Al comienzo del tema se proponía un juego con números, este tipo de pasatiempos se ha hecho muy popular en los últimos años. Posiblemente el más famoso sea el "sudoku", que tiene verdaderos adeptos en todo el mundo. Suele ser un cuadrado 9x9, en el que hay que colocar las cifras del 1 al 9 sin repetir en la misma fila o columna, ni en cada región 3x3 en que se divide el cuadrado grande.

Aquí tienes dos, tamaño 4x4, para entrenarte, el de colores está resuelto, completa el de números, es muy fácil, ¡qué te diviertas!.



	2		
1			

Recuerda lo más importante

$\mathbb{Z}$ Números enteros

Números enteros positivos: +1,+2,+3,..
Números enteros negativos: -1,-2,-3,-4,..
El número cero

Valor absoluto
|+a |=a |-a |=a |0|=0

Opuesto
Op (-4)=4 Op (4)=4.

$\mathbb{Q}$ Números Racionales

Son los que pueden expresarse en forma de fracción.

- Números enteros
  - Positivos
  - Negativos
  - El cero
- Números decimales
  - Exactos 1,23
  - Periódicos
    - Puros 1'23
    - Mixtos 1'23

Potencia positiva de un número entero

$$a^n = \overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}$$

Potencia positiva de una fracción

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Potencia negativa de un número entero

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potencia negativa de una fracción

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$$

Notación científica

$$N = a\cdot 10^n \quad 1<|a|<10$$

Autoevaluación

1. Calcular $-5(8-7)-3+4(-9+3)$:

2. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener **x** para qué el número **3x6** sea divisible por 3

3. Halla x para qué las fracciones $\frac{40}{x}$ y $\frac{80}{64}$ sean equivalentes

4. Encuentra el periodo de $\frac{743}{99}$

5. Escribe en forma de fracción irreducible el número $6'435$

6. Calcular: $8'66\widehat{7}-4'\widehat{8}$

7. Calcular: $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}-9\right)$

8. ¿Cuántas botellas de dos tercio de litro se pueden llenar con 128 litros de agua?

9. Calcular: $6'3\cdot10^{5}-6'6\cdot10^{4}$

10. Calcular: $\left(\frac{7}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{4}{7}\right)^{2}$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) -6 b) 35
c) -60 d) 18

2. a) -1 b) -20
c) 4 d) 2

3. a) si b) no c) no

4. a) 8 b) 2 c) 7

5. a) 1'4 b) $1'\widehat{6}$ c) $1'1\widehat{3}$

6. a) $\frac{11}{9}$ b) $\frac{103}{33}$
c) $\frac{209}{90}$ d) $\frac{48}{25}$

7. a) decimal exacto
b) periódico mixto
c) periódico puro

8. a) $\frac{7}{4} < \frac{67}{20}$
b) $-\frac{5}{3} < -\frac{3}{2}$
c) $\frac{34}{3} < \frac{23}{2}$

9. a) $\frac{133}{60}$ b) $\frac{31}{30}$ c) $-\frac{35}{12}$
d) $\frac{21}{10}$ e) $\frac{23}{60}$

10. a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{21}{8}$ c) $\frac{3}{2}$

11. a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{31}{10}$ c) $\frac{5}{12}$

12. a) $5'\widehat{3}$ b) $-0'\widehat{7}$ c) 2

13. a) $\frac{27}{8}$ b) $-\frac{8}{27}$
c) $\frac{27}{50}$ d) $\frac{5}{2}$

14. a) $2{,}31203 \cdot 10^{-1}$
b) $1{,}23 \cdot 10^{4}$

15. a) $5{,}83 \cdot 10^{18}$ b) $6{,}24 \cdot 10^{-8}$
c) $1{,}248 \cdot 10^{-10}$ c) $5 \cdot 10^{-16}$

16. 56

17. 9

18. 210.000€ y 70.000€

19. $4{,}375 \cdot 10^{19}$

20. 1,05 · 10 m

21. $1{,}4 \cdot 10^{6}$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. -32

2. 9

3. 32

4. 50

5. 6371/990

6. $3'77\widehat{8}$

7. $\frac{-71}{24}$

8. 282

9. $5'64 \cdot 10^{5}$

10. $\frac{26}{49}$

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

2

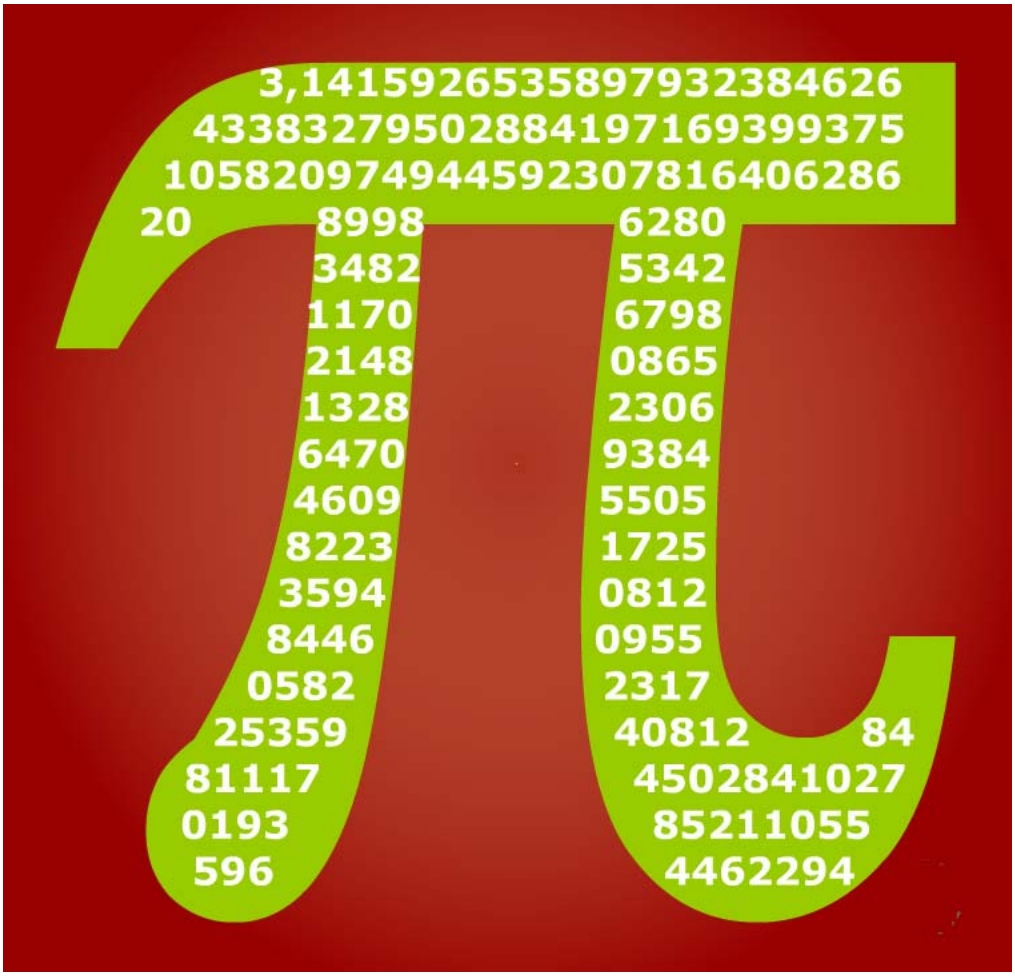
Números reales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Clasificar los números reales en racionales e irracionales.
- Aproximar números reales por truncamiento y redondeo.
- Representar gráficamente números reales.
- Comparar números reales.
- Realizar operaciones sencillas con radicales.

Antes de empezar



Investiga

Seguramente hayas realizado alguna vez algún cálculo con el número pi; por ejemplo, calcular la longitud de alguna circunferencia o el área de un círculo. En estos cálculos habrás utilizado valores como 3'14, 3'1416, 3'141592,... También es posible que hayas leído en algún periódico que se ha descubierto otra cifra del número pi, o que ya se conocen con exactitud tantas cifras del número pi. Todo lo anterior resulta un poco confuso. ¿Cuál de las cantidades anteriores es el auténtico número pi? ¿Cómo es posible que llamemos pi a todas ellas si es obvio que son diferentes? ¿Cómo es posible que se estén descubriendo todavía cifras de pi si lo estamos usando desde hace un montón de años?

Intenta dar una respuesta a estas preguntas. Si no lo consigues ahora vuelve a intentarlo después de ver este tema en profundidad. Para finalizar la propuesta ahí va otra pregunta: ¿Cuál es o cuál podría ser la última cifra del número pi?

1. Los números reales

Números irracionales

En la quincena anterior has visto que los números racionales pueden escribirse en forma decimal, produciendo siempre un decimal exacto o periódico. También hemos visto que todo decimal periódico puede escribirse en forma de fracción.

Es fácil comprobar que hay números cuya expresión decimal no es periódica, por ejemplo:

0,12345678910111121314.....

Estos números no se pueden escribir en forma de fracción: ***no son racionales***.

Llamamos **irracionales** a los números cuya parte decimal no es periódica.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES

El hecho de que los números irracionales tengan infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica plantea el problema de cómo representar dichos números de forma exacta.

Algunos de estos números pueden representarse de forma exacta. Por ejemplo:

$$\sqrt{2}\ ,\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\quad \sqrt[3]{5}$$

son representaciones exactas de los números 1,41421356…; 1,61803398…; 1,709975947… respectivamente (los puntos suspensivos indican que no hay un final).

En cambio, otros números irracionales no pueden expresarse en forma exacta. Por ejemplo, el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es una cantidad constante que es irracional pero no puede ser descrito en una forma sencilla como los números anteriores.

Para representar estos números de forma exacta les ponemos un nombre. En este caso se trata del número pi: π. Para hacer cálculos con estos números usamos un valor aproximado.

El número $\sqrt{2}$ es irracional *(ampliación)*

¿Cómo puede saberse si un número es irracional? No hay una técnica general pero en algunos casos puede usarse una técnica de demostración denominada ***reducción al absurdo*** que consiste en suponer que lo que se quiere probar es falso y llegar, a partir de esa suposición, a una contradicción. Eso implica que el hecho inicial no puede ser falso.

Lo que queremos probar es que $\sqrt{2}$ no es un número racional. *Para ello empezaremos suponiendo que sí lo es.*

Por tanto puede escribirse en forma de fracción que podemos convertir en irreducible simplificando todo lo que se pueda. Así pues, existirían dos números enteros, **m** y **n**, sin factores primos comunes de forma que

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}=\frac{p1\cdot p2\cdot \ldots \cdot pr}{q1\cdot q2\cdot \ldots \cdot qs}$$

Siendo p1, p2,…,pr los factores primos de n y q1, q2,…,qr los factores primos de m y todas las p son distintas de todas las q. Elevando al cuadrado queda:

$$2=\frac{n^2}{m^2}=\frac{p1^2\cdot p2^2\cdot \ldots \cdot pr^2}{q1^2\cdot q2^2\cdot \ldots \cdot qs^2}$$

Y n^2 y m^2 siguen sin tener factores primos comunes. Por tanto, $n^2=2m^2$, de donde se deduce que n es divisible por 2 y por tanto puede escribirse como n=2t. Así pues:

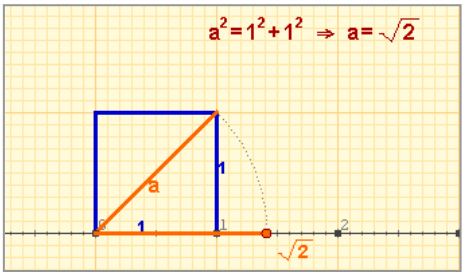
$$\sqrt{2}=\frac{2t}{m}$$

Y t y m no tienen factores primos comunes. Elevando de nuevo al cuadrado queda:

$$2=\frac{4t^2}{m^2}\Rightarrow 2m^2=4t^2\Rightarrow m^2=2t^2$$

Por tanto, m también es divisible por 2. Partiendo de que n y m no tienen factores primos comunes hemos llegado a la conclusión de que ambos son múltiplos de 2. Hemos llegado a una **contradicción**. Por tanto la suposición de que este número es racional es falsa y **deducimos de ello que $\sqrt{2}$ es irracional**.

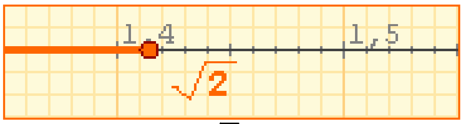
Números reales



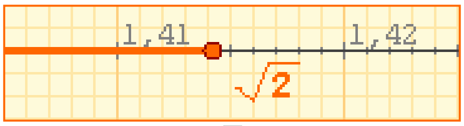
IR El conjunto de los números reales, denotado por la letra R con la forma que ves a la izquierda, está formado por todos los números racionales y todos los números irracionales. Es decir, todos los números que pueden escribirse en forma decimal, sea ésta exacta, periódica o no periódica.

Esto engloba a todos los tipos de números que conocemos hasta el momento.

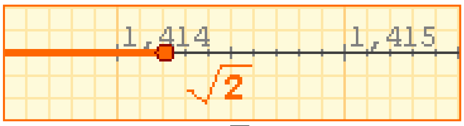
$$\text{R}\ \ \text{Reales}\begin{cases}\text{Q}\ \ \text{Racionales}\begin{cases}\text{Z}\ \ \text{Enteros}\begin{cases}\text{N}\ \ \text{Naturales}\\ \text{Cero}\\ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}$$



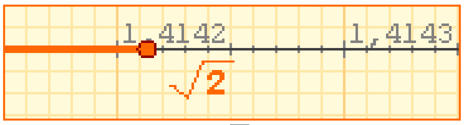
$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$



$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$



$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$



$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$

Aproximaciones

Como has comprobado, los números reales tienen infinitas cifras decimales, por lo que, en general, no es posible dar su valor exacto. En algunos casos, como los racionales (con la fracción generatriz) y los radicales, sí es posible representarlos de forma exacta. Pero en infinidad de otros casos (como el número π) esto no es posible.

Cuando en un problema necesitamos usar un número con infinitas cifras decimales, en la práctica usamos un valor aproximado que nos permita obtener un resultado aceptable aunque no sea exacto.

Una aproximación es **por defecto** si es menor que el número exacto y **por exceso** si es mayor.

- ✓ Cuando en un decimal nos quedamos con las n primeras cifras decimales decimos que hemos realizado un **truncamiento** con n cifras significativas.
- ✓ Realizamos un **redondeo** con n cifras significativas, si truncamos con n cifras, dejando igual la cifra n-ésima si la siguiente es menor que 5, y aumentando la última cifra en una unidad en caso contrario.

Observa los ejemplos de la izquierda donde se toman distintas aproximaciones de $\sqrt{2}$.

TRUNCAMIENTO	REDONDEO
1,4	1,4
1,41	1,41
1,414	1,414
1,4142	1,4142
1,41421	1,41421
1,414213	1,414214
1,4142135	1,4142136
1,41421356	1,41421356

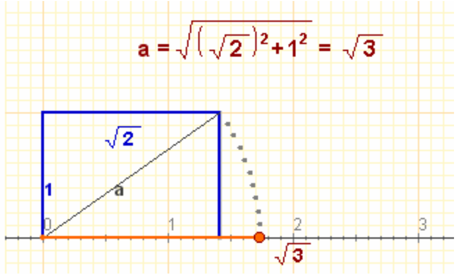
Un truncamiento siempre es una aproximación por defecto; el redondeo puede ser por defecto o por exceso.

Representación gráfica de números irracionales

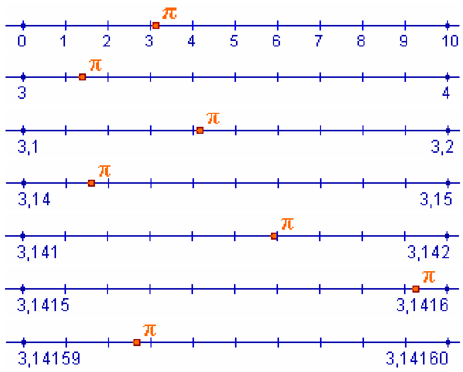
En este tema hemos visto ya las dificultades de representar de forma exacta los números irracionales, dificultades que se trasladan a su representación gráfica.

A la derecha puedes ver distintas técnicas usadas para la representación en forma gráfica de números irracionales. En algún caso pueden usarse métodos geométricos de gran exactitud, pero en la mayoría de los casos sólo podemos realizar una representación aproximada, eso sí, con el nivel de precisión que queramos.

Estos métodos garantizan que puede asociarse de manera única un punto de la recta a cada número real y, recíprocamente, un número real a cada punto de la recta. Por este motivo suele identificarse al conjunto **R** de los números reales con una recta, a la que se denomina **recta real**.



π = 3,141592353589793...

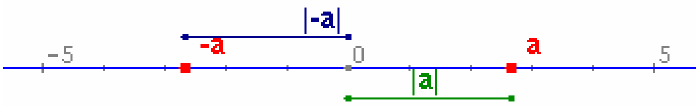


De esta forma podemos acotar π entre dos números racionales, que ya sabemos representar, y que están cada vez más próximos.

Valor absoluto

La equivalencia entre puntos y números permite aplicar conceptos geométricos al cálculo, en particular la idea de distancia mediante el valor absoluto de un número.

✓ Llamamos valor absoluto de un número real, **a**, al mayor de los números **a** y **-a**. El valor absoluto de **a** se representa así: **|a|**.



Propiedades del valor absoluto

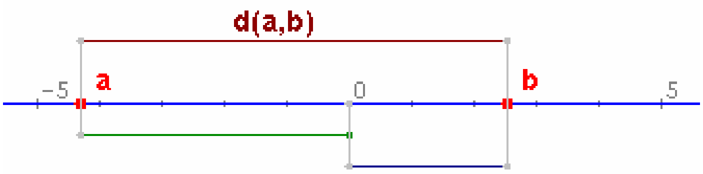
1) $|a| \geq 0$
2) $|a|=|-a|$
3) $|a+b|\leq|a|+|b|$
4) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

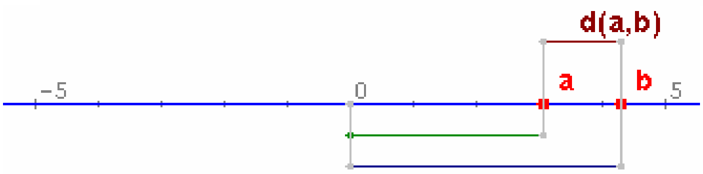
a=2,6828 **|a|=2,6828**
-a=-2,6828 **|-a|=2,6828**

El valor absoluto de un número representa la distancia del mismo al cero. Podemos generalizar esta idea:

✓ La **distancia** entre dos números reales, **a** y **b**, es el valor absoluto de su diferencia:

$$d(a,b)=|b-a|=|a-b|$$





Si a y b tienen el mismo signo la distancia entre a y b es la resta de los valores absolutos, y si el signo es distinto la suma.

a=-4,2946 **|a|=4,2946**
b=2,5447 **|b|=2,5447**
d(a,b)=6,8393

a=3,0054 **|a|=3,0054**
b=4,2861 **|b|=4,2461**
d(a,b)=1,2807

Intervalo cerrado:
Los extremos pertenecen al intervalo.

$$[\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$$

Intervalo abierto:
Los extremos no pertenecen al intervalo.

$$(\mathbf{a,b}) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$$

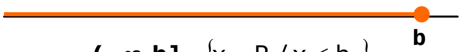
Intervalo semiabierto: Un extremo pertenece al intervalo y otro no.

$$(\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a < x \le b\}$$

Entorno simétrico de a:

$$(\mathbf{a-r,a+r}) = \{x \in R \,/\, a-r < x < a+r\}$$

Semirrecta acotada superiormente



$$(\mathbf{-\infty,b}] = \{x \in R \,/\, x \le b\}$$

Semirrecta acotada inferiormente

$$(\mathbf{a,+\infty}) = \{x \in R \,/\, a < x\}$$

Intervalos: segmentos y semirrectas

El concepto de intervalo está ligado a los conceptos geométricos de segmento y semirrecta: un intervalo acotado equivale a un segmento y un intervalo no acotado equivale a una semirrecta.

- ✓ Dados dos números reales **a** y **b**, se llama **intervalo de extremos a y b** al conjunto de números reales comprendidos entre ambos.
- ✓ La longitud del intervalo es la distancia(a,b)=**|b-a|**

En los **intervalos acotados** dependiendo de que los extremos pertenezcan o no al mismo, se distinguen los intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos (por la izquierda o por la derecha).

Si se construye un intervalo abierto alrededor de un punto a se obtiene un **entorno simétrico de a y de radio r,** conjunto de números reales cuya distancia a "a" es menor que r.

Un **intervalo no acotado** es el conjunto formado por todos los números mayores (o ≥), o menores (o ≤) que uno dado, a, la cota inferior o superior respectivamente. Se representan mediante una semirrecta y su longitud es infinita.

EJERCICIOS resueltos

1. Indicar el menor de los conjuntos numéricos a los que pertenecen los números:

   $$\text{a) } 5{,}97509\ldots \quad \text{b) } 6{,}10\overset{\frown}{3} \quad \text{c) } \frac{2}{3} \quad \text{d) } -\frac{6}{2} \quad \text{e) } \sqrt{5} \quad \text{f) } \sqrt{16}$$

   a) R *(decimal no periódico)* ***b) Q*** *(decimal periódico)* ***c) Q*** *(fracción no exacta)*

   d) Z *(fracción exacta negativa)* ***e) R*** *(radical no exacto)* ***f) N*** *(radical exacto)*

2. El radio de una circunferencia es de 4 m. Calcula su longitud
   2.1. Truncando el resultado primero a cm y luego a m.

   $$L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381\ldots m = 2488 \text{ cm} = 24 \text{ m}$$

   2.2. Redondeando el resultado primero a cm y luego a m

   $$L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381\ldots m = 2488 \text{ cm} = 25 \text{ m}$$

3. Calcula el valor absoluto de los números a=-3 y b=5, y la distancia entre ellos.

   $$|a|=3,\ |b|=5,\ dist(a,b)=|b-a|=|5-(-3)|=|8|=8$$

4. Calcula |a+b| |a-b| |a·b| y |a/b|

   $$|a+b|=|-3+5|=|2|=2;\ |a-b|=|-3-5|=|-8|=8;\ |a\cdot b|=|-3\cdot 5|=|-15|=15;$$
   $$|a/b|=|-3/5|=3/5$$

5. Indica qué puntos pertenecen al intervalo en cada caso:
   5.1. Intervalo (-74,-52]. Puntos: a) −53 b) −74 c) 11 ***Respuesta: a***
   5.2. Intervalo (-∞,75]. Puntos: a) 32 b) 75 c) 76 ***Respuesta: a y b.***

2. Radicales

Forma exponencial

Llamamos **raíz n-ésima** de un número dado, *a*, al número *b* que elevado a *n* nos da *a*.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Un **radical** es equivalente a una **potencia de exponente fraccionario** en la que el **denominador** de la fracción es el **índice** del radical y el **numerador** de la fracción es el **exponente** el radicando.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$\sqrt[3]{8} = 2$ por ser $2^3 = 8$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

Radicales equivalentes

Dos o más radicales se dicen **equivalentes** si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

Dado un radical se pueden obtener infinitos radicales semejantes, **multiplicando** o **dividiendo** el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número. Si se multiplica se llama **amplificar** y si se divide se llama **simplificar** el radical.

Radical **irreducible**, cuando la fracción de la potencia asociada es irreducible.

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$$

son equivalentes por ser: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Amplificar: $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3\cdot 2]{x^{2\cdot 2}} = \sqrt[6]{x^4}$

Simplificar: $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6:2]{x^{4:2}} = \sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt[3]{x^2}$

Irreducible por ser m.c.d.(3,2)=1

EJERCICIOS resueltos

6. Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{3}$ $\quad \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ $\qquad$ b) $\sqrt[5]{x^3}$ $\quad \sqrt[5]{x^3}$

7. Escribe las siguientes potencias como radicales:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ $\quad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ $\qquad$ b) $5^{\frac{2}{3}}$ $\quad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

8. Escribe un radical equivalente, amplificando el dado:

a) $\sqrt[3]{5}$ $\quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ $\qquad$ b) $\sqrt[5]{x^4}$ $\quad \sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5\cdot 3]{x^{4\cdot 3}} = \sqrt[15]{x^{12}}$

9. Escribe un radical equivalente, simplificando el dado.

a) $\sqrt[6]{49}$ $\quad \sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6:2]{7^{2:2}} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[35]{x^{28}}$ $\quad \sqrt[35]{x^{28}} = \sqrt[35:7]{x^{28:7}} = \sqrt[5]{x^4}$

3. Propiedades de las raíces

$$\sqrt[3]{2\cdot5} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2\cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2}\cdot\sqrt[7]{b^4}$$

Raíz de un producto

La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.

$$\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

Raíz de un cociente

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$$

Raíz de una potencia

Para hallar la raíz de una potencia, se calcula la raíz de la base y luego se eleva el resultado a la potencia dada.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

Raíz de una raíz

La **raíz n-ésima** de la **raíz m-ésima** de un número es igual a la raíz **nm-ésima** de dicho número.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

EJERCICIOS resueltos

10. Escribe con una sola raíz:

a) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b) $\sqrt[7]{x^4\sqrt{x}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^4\sqrt{x}} = \sqrt[7]{\sqrt{x^8 \cdot x}} = \sqrt[14]{x^9}$

11. Escribe con una sola raíz:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ $\qquad \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^3}$

12. Escribe con una sola raíz:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{x^3}} = \sqrt[5]{x}$

4. Operaciones con raíces

Introducción y Extracción de factores

Para **introducir** un factor dentro de un radical se eleva el factor a la potencia que indica el índice y se escribe dentro.

Si algún factor del radicando tiene por exponente un número mayor que el índice, se puede **extraer** fuera del radical dividiendo el exponente del radicando entre el índice. El cociente es el exponente del factor que sale fuera y el resto es el exponente del factor que queda dentro.

Introducir

$$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$$

Extraer:

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

Cálculo de raíces

Para calcular la raíz n-ésima de un número primero se factoriza y se escribe el número como producto de potencias, luego se extraen todos los factores.

Si todos los exponentes del radicando son múltiplos del índice, la raíz es exacta.

Esta técnica es muy útil para hallar raíces exactas. Cuando la raíz no es exacta esta técnica transforma el radical en una expresión *más manejable*.

$$\begin{array}{r|l} 1728 & 2 \\ 864 & 2 \\ 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Sumas y Restas

Dos expresiones radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando. Por ejemplo:

$$\frac{1}{8}\sqrt[12]{31} \qquad 2\sqrt[12]{31}$$

Solo se pueden ***sumar*** o ***restar*** radicales semejantes. Para ello se saca factor común el radical correspondiente y se suman o restan los coeficientes.

En ocasiones podemos sumar radicales no semejantes extrayendo algún factor que los convierta en semejantes.

$$-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{3}{2}\sqrt{20}+\frac{7}{2}\sqrt{20}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{20}=\frac{3}{2}\sqrt{20}$$

$$-\frac{1}{8}\sqrt{45}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=-\frac{1}{8}\sqrt{3^2\cdot 5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=-\frac{3}{8}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=\left(-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{5}=\frac{3}{8}\sqrt{5}$$

Productos

Dos expresiones radicales pueden multiplicarse sólo si tienen el mismo índice. En este caso el producto se hace de la siguiente manera:

$$\left(a\cdot\sqrt[n]{b}\right)\cdot\left(c\cdot\sqrt[n]{d}\right)=ac\cdot\sqrt[n]{bd}$$

comprobando al final si puede extraerse algún factor del radical.

Si los radicales no son del mismo índice, primero se buscan radicales semejantes que tengan el mismo índice y luego se multiplican. Ejemplo:

$$\left(2\cdot\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(7\cdot\sqrt{x}\right)=14\cdot\sqrt[6]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^3}=14\cdot\sqrt[6]{x^5}$$

Aquí solo veremos radicales cuadráticos.

$$\left(-\frac{1}{4}\sqrt{6300}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\sqrt{196}\right)=$$
$$=-\frac{1}{20}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 7^2}=$$
$$=-\frac{1}{20}\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^3}=$$
$$=-\frac{1}{20}\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{7}=$$
$$=-21\sqrt{7}$$

Cocientes

Dos expresiones radicales pueden dividirse sólo si tienen el mismo índice. En este caso el cociente se hace como se ve en la imagen:

$$\frac{a\cdot\sqrt[n]{b}}{c\cdot\sqrt[n]{d}}=\frac{a}{c}\cdot\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

En la práctica no suelen dejarse radicales en el denominador y en lugar de hacer así la división se utiliza otro método llamado **racionalización** que consiste en encontrar una fracción equivalente que no tenga radicales en el denominador.

En el cuadro adjunto describimos este método para radicales cuadráticos.

$$\frac{\frac{2}{3}\sqrt{6}}{9\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{6}}{27\sqrt{18}}=$$
$$=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{18}}{27\sqrt{18}\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{108}}{27\cdot 18}=$$
$$=\frac{\sqrt{108}}{243}=\frac{\sqrt{2^2 3^3}}{243}=$$
$$=\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{243}=\frac{2\sqrt{3}}{81}$$

EJERCICIOS resueltos

13. Introduce los factores dentro del radical:

a) $2\cdot\sqrt[4]{3}$ $\qquad 2\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{48}$

b) $x^2\sqrt[7]{x^3}$ $\qquad x^2\sqrt[7]{x^3}=\sqrt[7]{(x^2)^7\cdot x^3}=\sqrt[7]{x^{14}\cdot x^3}=\sqrt[7]{x^{17}}$

14. Extrae los factores del radical:

a) $\sqrt[4]{128}$ $\qquad \sqrt[4]{128}=\sqrt[4]{2^7}=2\sqrt[4]{2^3}=2\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[7]{x^{30}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^{30}}=\sqrt[7]{x^{28+2}}=\sqrt[7]{x^{28}\cdot x^2}=x^4\sqrt[7]{x^2}$

15. Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{1024}$ $\qquad \sqrt[5]{1024}=\sqrt[5]{2^{10}}=2^2=4$

b) $\sqrt[7]{x^{84}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^{84}}=\sqrt[7]{x^{12\cdot 7}}=\sqrt[7]{(x^{12})^7}=x^7$

16. Indica que radicales son semejantes

a) $\sqrt[4]{3};5\sqrt[4]{3}$ $\qquad \sqrt[4]{3}$ y $5\sqrt[4]{3}$ Son semajentes

b) $\sqrt[4]{x};\sqrt[3]{x}$ $\qquad \sqrt[4]{x}$ y $\sqrt[3]{x}$ No son semajentes,tienen distinto indice

17. Calcular la suma:

a) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$ $\qquad \sqrt{40}+\sqrt{90}=\sqrt{4\cdot 10}+\sqrt{9\cdot 10}=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}=5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{32}-\sqrt{8}$ $\qquad 2\sqrt{32}-\sqrt{8}=2\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}=2\cdot 2^2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=8\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

18. Calcular el producto:

a) $\left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\sqrt{252}\right)$

$$\left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\sqrt{252}\right)=-\frac{6\cdot 7}{7\cdot 3}\sqrt{2\cdot 7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 7}=-2\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 7^2}=-2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\sqrt{2}=-84\sqrt{2}$$

b) $\left(-\frac{5}{3}\sqrt{175}\right)\cdot\left(-2\sqrt{45}\right)$

$$\left(-\frac{5}{3}\sqrt{175}\right)\cdot\left(-2\sqrt{45}\right)=\frac{10}{3}\sqrt{5^2\cdot 7}\sqrt{3^2\cdot 5}=\frac{10}{3}\sqrt{3^2\cdot 5^3\cdot 7}=\frac{10}{3}\cdot 3\cdot 5\sqrt{5\cdot 7}=50\sqrt{35}$$

19. Calcular el cociente:

$$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{24}}{4\sqrt{108}}$$

$$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{24}}{4\sqrt{108}}=\frac{9\sqrt{24}}{\sqrt{1088}}=\frac{9\sqrt{24}\sqrt{108}}{8\sqrt{108}\sqrt{108}}=\frac{9\sqrt{2592}}{8\cdot 108}=\frac{\sqrt{2^5\cdot 3^4}}{96}=\frac{2^2\cdot 3^2\sqrt{2}}{96}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Para practicar

1. Considerando 7,4833147735.... como el valor exacto de $\sqrt{56}$, escribe las aproximaciones por defecto, por exceso y redondeos de orden primero y segundo (décimas y centésimas, respectivamente).

2. La cinta métrica que aparece abajo tiene unas divisiones hasta el medio cm. La utilizamos para medir una varilla y obtenemos el valor que se muestra en ella. ¿Entre qué valores exactos se encuentra la longitud real, suponiendo que ese valor es: a)por defecto; b) por exceso; c) redondeo a cm.

Las aproximaciones pueden utilizarse también con números enteros. Para generalizar esta idea usaremos el concepto de cifras significativas: "*Si un número N es un valor aproximado de otro número P, diremos que N tiene n cifras significativas si las primeras n cifras de N coinciden con las n primeras cifras de P. (No se consideran cifras significativas los ceros cuya única finalidad es situar la coma decimal)*". La definición anterior es bastante intuitiva pero no siempre es correcta del todo., por ello precisamos un poco más: "*Diremos que N tiene n cifras significativas si el número formado con las n primeras cifras de N difiere del número formado con las n primeras cifras de P (eliminando las comas decimales si las hubiera) en menos de 0,5*".

3. Nos dicen que la población de una ciudad es de 1579000 habitantes y que las 4 primeras cifras de esta cantidad son significativas. ¿Entre qué valores se halla realmente su población?

4. Determina los conjuntos $A\cap B$, AUB, A-B y -A en los casos siguientes:
   1. A = [-11,-9] B = (-1,6)
   2. A = [-5,5] B = (3,4)
   3. A = [-2,7] B = (-2,6)

5. Escribe como potencia de exponente fraccionario:

   a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

6. Escribe como un radical:

   a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $x^{\frac{1}{5}}$ d) $x^{\frac{5}{3}}$

7. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales

   a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$

   c) $\sqrt{9a^3}$ d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

8. Introducir dentro del radical todos los factores posibles que se encuentren fuera de él.

   a) $3\cdot\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{a}$

   c) $3a\cdot\sqrt{2a^2}$ d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

9. Suma los siguientes radicales indicados.

   a) $\sqrt{45}-\sqrt{125}-\sqrt{20}$

   b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$

   c) $\sqrt{175}+\sqrt{63}-2\sqrt{28}$

   d) $\sqrt{20}+\frac{1}{3}\sqrt{45}+2\sqrt{125}$

10. Realiza las operaciones siguientes:

    a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}$

    b) $(7\sqrt{5}+5\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$

    c) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot 4\sqrt{2}$

    d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

11. Divide los siguientes radicales

    a) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

Para saber más

Cuestiones sobre pi

En la presentación del tema se mencionaba que el valor de pi era 3'14, 3'1416, ... y se planteaban una serie de preguntas al respecto:

¿Cuál de las cantidades anteriores es el auténtico número pi?

Según has visto a lo largo del tema, en realidad ninguna de las anteriores cantidades son el valor exacto de pi, se trata de aproximaciones al número y el poner más o menos decimales depende de la precisión que necesitemos en la medida.

¿Cómo es posible que llamemos pi a todas ellas si es obvio que son diferentes?

El hecho de que llamemos pi a cualquiera de las anteriores cantidades se debe a que es imposible utilizar el valor exacto de la mayoría de los números irracionales, por lo que nos tenemos que contentar con dar aproximaciones a ese valor. Como ya dijimos antes el número de cifras decimales con que se da este número dependerá de la precisión de medida deseada y el hecho de que, por ejemplo, la cuarta cifra decimal sea un 6 en 3'1416 y un 5 en 3'14159 se debe a que la aproximación se hace en cada caso por redondeo y, con cuatro cifras decimales, 3'1416 está más próximo del valor exacto que 3'1415.

Algunos números irracionales como la raíz cuadrada de 2 sí pueden representarse en forma exacta, pero si esa cantidad la queremos medir en la práctica, no nos quedará más remedio que dar un valor aproximado con la precisión que deseemos.

¿Cómo es posible que se estén descubriendo todavía cifras de pi si lo estamos usando desde hace un montón de años?

Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica. Para hallar estas cifras existen distintos procedimientos o algoritmos. Algunos de estos algoritmos son relativamente sencillos, como el que se utiliza para obtener las cifras decimales de la raíz cuadrada de 2 (que antiguamente se enseñaba en la escuela primaria); otros, en cambio, son tremendamente largos y complejos. El número pi está en este segundo grupo. Actualmente los algoritmos para el cálculo de cifras decimales de pi se ejecutan con potentes ordenadores.

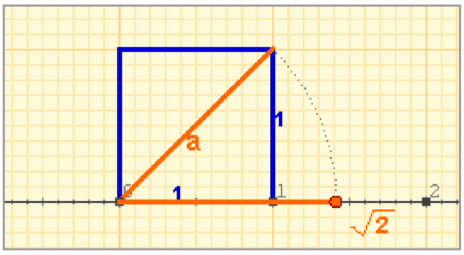
¿Cuál es o cuál podría ser la última cifra del número pi?

Como hemos dicho antes, los números irracionales tienen infinitas cifras decimales, por lo tanto no existe la última cifra del número pi. Como además sus cifras no se repiten de forma periódica no se puede predecir de antemano qué cifra será la que ocupe un determinado lugar hasta que se consiga calcular.

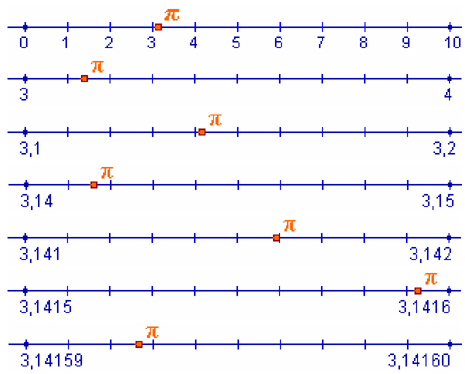
Recuerda lo más importante

Los números reales

Los números **irracionales** son los decimales no periódicos. El conjunto **R** de los números **reales** está formado por todos los números racionales e irracionales.



Todos los números reales, tanto los racionales como los irracionales, se pueden representar mediante un punto de la recta y recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real.



Aproximaciones

Para representar decimales infinitos usamos aproximaciones **por defecto** y **por exceso**, **truncamientos** y **redondeos**.

Propiedades de los radicales

$$\sqrt[n]{A\cdot B}=\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B} \qquad \sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

$$\sqrt[n]{A^p}=\left(\sqrt[n]{A}\right)^p \qquad \sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[np]{A}$$

Raíz n-ésima

$$\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a$$

Exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{A^p}=A^{\frac{p}{n}}$$

Radicales equivalentes

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

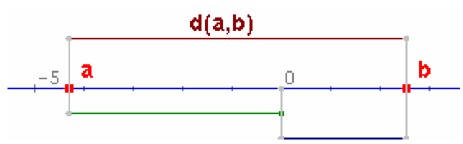
Radicales semejantes

Son radicales con el mismo índice y el mismo radicando, pudiendo diferir en su coeficiente.

La recta real

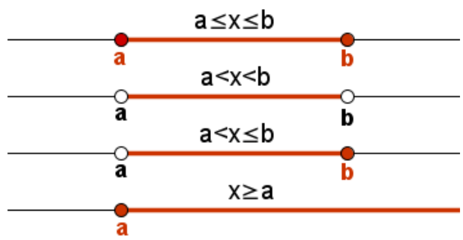
El **valor absoluto** de un nº a, **|a|** es el nº prescindiendo del signo.

La **distancia** entre dos puntos **a** y **b** es el valor absoluto de su diferencia **|a-b|=|b-a|**



Intervalos: segmentos y semirrectas

- Intervalo cerrado **[a,b]**
- Intervalo abierto **(a,b)**
- Intervalo semiabierto **(a,b]** ó **[a,b)**
- Intervalo no acotado como **[a,+∞)** ó **(-∞,a)**



Autoevaluación

1. Indica el menor conjunto numérico al que pertenece el número

$$12,80\overset{\frown}{965}$$

2. Una milla inglesa son 1609,34 m. Redondea a km 27 millas.

3. Con la calculadora, escribe un truncamiento y un redondeo a las milésimas de $\sqrt{21}$

4. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

5. Calcula la siguiente raíz: $\sqrt[7]{78125}$

6. Escribe en forma de exponente fraccionario: $\sqrt[10]{x^3}$

7. Introduce el factor en el radical: $6\sqrt[4]{5}$

8. Extrae los factores del radical: $\sqrt[4]{243}$

9. Calcula: $\sqrt{18} - \sqrt{98}$

10. Calcula y simplifica: $\sqrt{x^{10} \cdot y^9} \cdot \sqrt{x^4 \cdot y^5}$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) De primer orden:

Por defecto: 7,4

Por exceso: 7,5

Redondeo: 7,5

b) De segundo orden:

Por defecto: 7,48

Por exceso: 7,49

Redondeo: 7,48

2. a) Entre 1,100 y 1,105 m

b) Entre 1,095 y 1,100 m

c) Entre 1,095 y 1,105 m

3. Entre 1578500 y 1579500 con una cota de error de 500 habitantes.

4. Caso 1

1) $A \cap B =$ vacío
2) $A \cup B = [-11,-9] \cup (-1,6)$
3) $A - B = A = [-11,-9]$
4) $-A = (-\infty,-11) \cup (-9,+\infty)$

Caso 2

1) $A \cap B = (3,4)$
2) $A \cup B = [-5,5]$
3) $A - B = [-5,3] \cup [4,5]$
4) $-A = (-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$

Caso 3

1) $A \cap B = [-2,6)$
2) $A \cup B = [-2,7]$
3) $A - B = [6,7]$
4) $-A = (-\infty,-2) \cup (7,+\infty)$

5. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$
c) $a^{\frac{3}{2}}$ d) $a^{\frac{3}{5}}$

6. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5^3}$
c) $\sqrt[5]{x}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$

7. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{2}$
c) $3a\sqrt{a}$ d) $7ab^2c^3\sqrt[3]{2abc}$

8. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{4a}$
c) $\sqrt{18a^4}$ d) $\sqrt[3]{a^5b^7}$

9. a) $-4\sqrt{5}$ b) $11\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{7}$ d) $15\sqrt{5}$

10. a) $2-\sqrt{6}$
b) $14\sqrt{5}+30$
c) $8\sqrt{6}+4\sqrt{10}-20$
d) 2

11. a) $\sqrt{2}$ b) $y\sqrt{x}$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. **Q** (decimal periódico)

2. 43 km

3. redon.: 4,583 trun.: 4,582

4. (3,5]

5. 5 ($78125=5^7$)

6. $x^{\frac{3}{10}}$

7. $\sqrt[4]{6480}$

8. $3\sqrt[4]{3}$

9. $-4\sqrt{2}$

10. x^7y^7

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

3

Problemas aritméticos

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Recordar y profundizar sobre proporcionalidad directa e inversa, proporcionalidad compuesta y repartos proporcionales.
- Recordar y profundizar sobre porcentajes y variaciones porcentuales.
- Distinguir entre interés simple e interés compuesto.
- Conocer el significado de la Tasa anual equivalente en productos financieros.
- Calcular el capital final que se obtiene si depositamos periódicamente dinero en algunos productos de capitalización.
- Calcular la cuota periódica que hay que pagar para amortizar un préstamo.

Antes de empezar


Preparar distintas cantidades de una disolución es una actividad de proporcionalidad directa.


Calcular el número de obreros para acabar a tiempo es una actividad de proporcionalidad inversa.


Planificar la crianza de los animales de una granja es una actividad de proporcionalidad compuesta.


Repartir los beneficios de un negocio es una actividad de repartos proporcionales.


La proporción de alumnos, alumnas, matriculaciones, aprobados, suspensos se expresan con %.

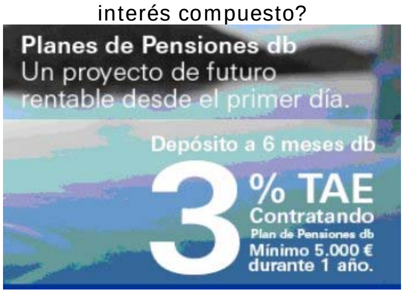

Los presupuestos de instituciones para un año se calculan mediante variaciones porcentuales.


Las variaciones del precio de las acciones de una empresa se expresan con porcentajes.


¿Qué interesa más, depositar un capital a un interés simple o a un interés compuesto?

Al colocar un capital a un interés compuesto, ¿qué periodo de capitalización interesa más?

¿Qué significado tiene la Tasa anual equivalente (T.A.E.)?



¿Cuánto dinero tendremos al acabar el periodo fijado para un plan de pensiones?

¿Qué cuota tendremos que pagar en un préstamo personal o hipotecario con unas condiciones determinadas?

Investiga: operaciones bancarias

En las operaciones bancarias, los bancos y cajas de ahorro ofertan un interés según unos índices de referencia. ¿Cuáles son algunos de estos índices? ¿Cuál es el más utilizado?

1. Proporcionalidad directa e inversa

Proporcionalidad directa

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número.

Al dividir cualquier valor de la segunda magnitud por su correspondiente valor de la primera magnitud, se obtiene siempre el mismo valor (constante). A esta constante se le llama **constante o razón de proporcionalidad directa**.

Primera Magnitud	1	2	3	4	5	6
Segunda magnitud	7	14	21	28	35	42

Constante de proporcionalidad directa

$$\frac{7}{1}=\frac{14}{2}=\frac{21}{3}=\frac{28}{4}=\frac{35}{5}=\frac{42}{6}=7$$

Para resolver un ejercicio de proporcionalidad directa o inversa se puede utilizar:

- La razón de proporcionalidad.
- Una regla de tres.
- Reducción a la unidad.

He comprado 31 lápices por 8,68 €, ¿cuánto costarán 7 lápices?

Razón de proporcionalidad

$$\frac{8,68}{31}=\frac{x}{7}\Rightarrow x=\frac{8,68\cdot 7}{31}=1,96$$

Regla de tres

$$x=\frac{8,68\cdot 7}{31}=1,96$$

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº lápices		**2ª magnitud** euros
31	-----------	8,68
↓ : 31		↓ : 31
1	-----------	0,28
↓ x 7		↓ x 7
7	-----------	1,96

Solución: **1,96 euros**.

Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por ese mismo número.

Al multiplicar cualquier valor de la primera magnitud por su correspondiente valor de la segunda magnitud, se obtiene siempre el mismo valor. A este valor constante se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Primera Magnitud	1	2	3	4	5	6
Segunda magnitud	120	60	40	30	24	20

Constante de proporcionalidad inversa

$$1\cdot 120 = 2\cdot 60 = 3\cdot 40 = 4\cdot 30 = 5\cdot 24 = 6\cdot 20 = 120$$

Un grupo de 18 alumnos ha ganado un premio por un trabajo realizado y han recibido 200 € cada uno. ¿Cuánto recibirían si hubieran participado 10 alumnos?

Razón de proporcionalidad

$$18\cdot 200 = 10\cdot x \Rightarrow x=\frac{18\cdot 200}{10}=360$$

Regla de tres

$$x=\frac{18\cdot 200}{10}=360$$

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº alumnos		**2ª magnitud** euros
18	-----------	200
↓ : 18		↓ x 18
1	-----------	3600
↓ x 10		↓ : 10
10	-----------	360

Solución: **360 euros**.

EJERCICIOS resueltos

1. Un automóvil consume 56 litros de gasolina al recorrer 800 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina consumirá al recorrer 500 kilómetros?

Regla de tres directa

1ª magnitud kilómetros		2ª magnitud litros de gasolina
800	----------	56
500	----------	x

$$\frac{56}{800} = \frac{x}{500} \Rightarrow x = \frac{56 \cdot 500}{800} = 35$$

Solución: 35 litros de gasolina.

Reducción a la unidad

1ª magnitud kilómetros		2ª magnitud litros de gasolina
800	---------	56
$\downarrow$: 800		$\downarrow$: 800
1	---------	0,07
$\downarrow$ x 500		$\downarrow$ x 500
500	---------	35

Solución: 35 litros de gasolina.

2. Un rectángulo tiene 25 cm de base y 18 cm de altura. ¿Qué altura deberá tener un rectángulo de 15 cm. de base para que tenga la misma superficie?

Regla de tres directa

1ª magnitud base		2ª magnitud altura
25	----------	18
15	----------	x

$$25 \cdot 18 = 15 \cdot x \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 18}{15} = 30$$

Solución: 30 cm.

Reducción a la unidad

1ª magnitud base		2ª magnitud altura
25	---------	18
$\downarrow$: 25		$\downarrow$ x 25
1	----------	450
$\downarrow$ x 15		$\downarrow$: 15
15	----------	30

Solución: 30 cm.

3. Completar las siguientes tablas según sean las magnitudes:

Directamente proporcionales

5	b	12	16	d
a	56	96	c	184

Constante de prop.: $\frac{96}{12} = 8$

$$\frac{a}{5} = 8 \Rightarrow a = 8 \cdot 5 = 40$$

$$\frac{56}{b} = 8 \Rightarrow b = \frac{56}{8} = 7$$

$$\frac{c}{16} = 8 \Rightarrow a = 8 \cdot 16 = 128$$

$$\frac{184}{d} = 8 \Rightarrow d = \frac{184}{8} = 23$$

Inversamente proporcionales

4	6	9	15	20
e	f	g	24	h

Constante de prop.: $15 \cdot 24 = 360$

$$4 \cdot e = 360 \Rightarrow e = \frac{360}{4} = 90$$

$$6 \cdot f = 360 \Rightarrow f = \frac{360}{6} = 60$$

$$9 \cdot g = 360 \Rightarrow g = \frac{360}{9} = 40$$

$$20 \cdot h = 360 \Rightarrow h = \frac{360}{20} = 18$$

Repartos proporcionales

Directamente proporcionales

Se va a repartir una cantidad en varias partes con unas condiciones determinadas.

Cada una de las partes debe recibir una cantidad directamente proporcional a unos valores iniciales.

A mayor valor inicial de una parte le corresponderá mayor cantidad en el reparto.

1. Se suman los valores iniciales de cada una de las partes.

2. Se divide la cantidad a repartir entre la suma anterior.

3. Se multiplica el cociente obtenido por los valores iniciales de cada una de las partes.

4. Comprobación. La suma de todas las cantidades coincide con la cantidad a repartir.

Un padre reparte entres sus dos hijos 36 golosinas de forma directamente proporcional a las edades de cada uno que son 2 y 7 años. ¿Cuántas golosinas le da a cada uno?

1. Se suman los valores iniciales:

$$2 + 7 = 9$$

2. Se divide 36 entre 9

$$36 : 9 = 4$$

3. Se multiplican los valores iniciales por 4.

$$2 \cdot 4 = \mathbf{8\ golosinas}$$
$$7 \cdot 4 = \mathbf{28\ golosinas}$$

Comprobación:

$$8 + 28 = 36$$

Inversamente proporcionales

Se va a repartir una cantidad en varias partes con unas condiciones determinadas.

Cada una de las partes debe recibir una cantidad inversamente proporcional a unos valores iniciales.

A mayor valor inicial de una parte le corresponderá menor cantidad en el reparto.

Hacer un reparto inversamente proporcional a unos valores iniciales es igual que hacer un reparto directamente proporcional a los inversos de dichos valores iniciales.

1. Se suman los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

2. Se divide la cantidad a repartir entre la suma anterior.

3. Se multiplica el cociente obtenido por los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

4. Comprobación. La suma de todas las cantidades coincide con la cantidad a repartir.

Un padre reparte entres sus dos hijos 36 golosinas de forma inversamente proporcional a las edades de cada uno que son 2 y 7 años. ¿Cuántas golosinas le da a cada uno?

1. Se suman los inversos de los valores iniciales:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{7}{14} + \frac{2}{14} = \frac{9}{14}$$

2. Se divide 36 entre 9/14

$$36 : \frac{9}{14} = \frac{504}{9} = 56$$

3. Se multiplican los inversos de los valores iniciales por 56.

$$56 \cdot \frac{1}{2} = 28 \qquad 56 \cdot \frac{1}{7} = 8$$

Comprobación:

$$28 + 8 = 36$$

EJERCICIOS resueltos

4. Un padre reparte entre sus tres hijos 310 euros de forma directamente proporcional al número de asignaturas aprobadas, que han sido 2, 3 y 5 respectivamente. ¿Cuánto da a cada uno?

1. Se suman los valores iniciales: $2 + 3 + 5 = 10$
2. Se divide 310 entre 10: $310 : 10 = 31$
3. Se multiplican los valores iniciales por 120.

$31 \cdot 2 = 62$ euros $\quad 31 \cdot 3 = 93$ euros $\quad 31 \cdot 5 = 155$ euros

5. Un padre reparte entre sus tres hijos 310 euros de forma inversamente proporcional al número de asignaturas suspensas, que han sido 2, 3 y 5 respectivamente. ¿Cuánto da a cada uno?

1. Se suman los inversos de los valores iniciales: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$
2. Se divide 310 entre 31/30: $310:\frac{31}{30}=300$
3. Se multiplican los inversos de lo valores iniciales por 300.

$300\cdot\frac{1}{2}=150 \quad 300\cdot\frac{1}{3}=100 \quad 300\cdot\frac{1}{5}=60$

6. Cuatro socios pusieron en marcha un negocio aportando 3000 €, 5000 €, 9000 € y 12000 € respectivamente. El primer año obtienen 5800 € de beneficio, ¿cómo deben repartírselos?

1. Se suman los valores iniciales: $3000 + 5000 + 9000 + 12000 = 29000$
2. Se divide 5800 entre 29000: $5800 : 29000 = 0.2$
3. Se multiplican los valores iniciales por 30.

$0.2 \cdot 3000 = 600$ euros $\quad 0.2 \cdot 9000 = 1800$ euros

$0.2 \cdot 5000 = 1000$ euros $\quad 0.2 \cdot 12000 = 2400$ euros

7. Cuatro amigos se reparten 35 pasteles de forma inversamente proporcional a sus pesos, que son respectivamente 60 kg, 80 kg, 90 kg y 120 kg. ¿Cuántos pasteles corresponde a cada uno?

1. Se suman los inversos de los valores iniciales: $\frac{1}{60}+\frac{1}{80}+\frac{1}{90}+\frac{1}{120}=\frac{35}{720}=\frac{7}{144}$
2. Se divide 35 entre 7/144: $35:\frac{7}{144}=720$
3. Se multiplican los inversos de los valores iniciales por 720.

$720\cdot\frac{1}{60}=12 \quad 720\cdot\frac{1}{80}=9 \quad 720\cdot\frac{1}{90}=8 \quad 720\cdot\frac{1}{120}=6$

Proporcionalidad compuesta

Proporcionalidad compuesta

Una actividad de proporcionalidad compuesta relaciona más de dos magnitudes que pueden ser directa o inversamente proporcionales.

Para resolver una actividad de proporcionalidad compuesta se hace de forma ordenada con el procedimiento de **reducción a la unidad**, relacionando dos magnitudes y dejando la otra invariante.

Procedimiento de resolución:

En primer lugar se deja fija la segunda magnitud y se relaciona la primera con la tercera. En segundo lugar se deja fija la primera magnitud y se relaciona la segunda con la tercera.

También se puede resolver mediante una regla de tres compuesta

Para vallar un terreno, 4 personas construyen un muro de 120 m^2 en 18 días.. ¿Cuántos días tardarán 12 personas en construir un muro de 800 m^2?

1ª magnitud personas	**2ª magnitud** metros cuadrados	**3ª magnitud** días
4	120	18
↓ : 4	↓	↓ x 4
1	120	72
↓ x 12	↓	↓ : 12
12	120	6
↓	↓ : 120	↓ : 120
12	1	0.05
↓	↓ x 800	↓ x 800
12	800	40

Solución: **40 días**.

La primera y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Más personas trabajando tardarán menos días.

La segunda y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Si el muro es más grande se tardarán más días en construirlo.

1ª mag.	**2ª mag.**	**3ª mag.**
4	120	18
↓	↓	↓
12	800	x

Regla de tres compuesta

$$x = \frac{18 \cdot 4 \cdot 800}{12 \cdot 120} = 40$$

Solución: **4 días**.

Una piscina de 400 m^3 se llena con 5 grifos en 30 horas. ¿Cuántas horas se tardará en llenar una piscina de 600 m^3 con 9 grifos?

1ª magnitud metros cúbicos	**2ª magnitud** grifos	**3ª magnitud** horas
400	5	30
↓ : 400	↓	↓ : 400
1	5	0.075
↓ x 600	↓	↓ x 600
600	5	45
↓	↓ : 5	↓ x 5
600	1	225
↓	↓ x 9	↓ : 9
600	9	25

Solución: **25 horas**.

La primera y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Más metros cúbicos de agua se llenarán en más tiempo.

La segunda y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Si hay más grifos echando agua se tardará menos tiempo en llenar la piscina.

1ª mag.	**2ª mag.**	**3ª mag.**
400	5	30
↓	↓	↓
600	9	x

Regla de tres compuesta

$$x = \frac{30 \cdot 600 \cdot 5}{400 \cdot 9} = 25$$

Solución: **25 horas**.

EJERCICIOS resueltos

8. En una cadena de producción, 3 personas trabajando 4 horas diarias, fabrican 240 piezas. ¿Cuántas piezas fabricarán 9 personas trabajando 5 horas diarias?

La primera y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Más personas fabricarán más piezas.

La segunda y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Si se trabaja más tiempo se fabricarán más piezas.

Reducción a la unidad

1ª magnitud personas		2ª magnitud horas		3ª magnitud piezas
3	------------	4	------------	240
↓ : 3		↓		↓ : 3
1	------------	4	------------	80
↓ x 9		↓		↓ x 9
9	------------	4	------------	720
↓		↓ : 4		↓ : 4
9	------------	1	------------	180
↓		↓ x 5		↓ x 5
9	------------	5	------------	900

Regla de tres compuesta

3	--------	4	--------	240
9	--------	5	--------	x

$$x = \frac{240 \cdot 9 \cdot 5}{3 \cdot 4} = 900$$

Solución: 900 piezas.

9. Para imprimir unos folletos publicitarios, 12 impresoras han funcionado 6 horas al día y han tardado 7 días. ¿Cuántos días tardarán 3 impresoras funcionando 8 horas diarias?

La primera y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Menos impresoras tardarán más dias.

La segunda y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Funcionando más horas se tardará menos días.

Reducción a la unidad

1ª magnitud impresoras		2ª magnitud horas		3ª magnitud días
12	------------	6	------------	7
↓ : 12		↓		↓ x 12
1	------------	6	------------	84
↓ x 3		↓		↓ : 3
3	------------	6	------------	28
↓		↓ : 6		↓ x 6
3	------------	8	------------	128
↓		↓ x 5		↓ : 8
3	------------	8	------------	21

Regla de tres compuesta

12	--------	6	--------	7
3	--------	8	--------	x

$$x = \frac{12 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 8} = 21$$

Solución: 21 horas.

2. Porcentajes

Tanto por ciento de una cantidad

Calcular un porcentaje **r%** de una cantidad C es igual que resolver la siguiente actividad de magnitudes directamente proporcionales:

100 ------- C
r ------- P

Por cualquiera de los métodos estudiados, el valor de **P (r% de C)** es igual a:

$$\mathbf{P = C \cdot \frac{r}{100}}$$

Se puede calcular directamente el tanto por ciento de una cantidad multiplicando dicha cantidad por r/100.

Cálculo del tanto por ciento de una cantidad.

Un depósito tiene una capacidad de 1150 litros, pero ahora tiene el 68% del total. ¿Cuántos litros de agua contiene?

$$68\% \text{ de } 1150 = \frac{1150 \cdot 68}{100} = \mathbf{782}$$

También se puede hacer:

$$1150 \cdot 0,68 = \mathbf{782}$$

Solución: **782 litros**

Tanto por ciento correspondiente a una proporción

Calcular el % que representa una cantidad P de un total C equivale a resolver otra actividad de magnitudes directamente proporcionales:

100 ------- C
r ------- P

Ahora hay que calcular el valor de r.

$$\mathbf{r = \frac{P}{C} \cdot 100\ \%}$$

Se puede calcular directamente el tanto por ciento dividiendo la parte P por el total C y multiplicando el cociente obtenido por 100.

Cálculo del tanto por ciento correspondiente a una proporción.

Un depósito tiene una capacidad de 175 litros, pero ahora tiene 42 litros. ¿Qué porcentaje de agua contiene?

$$\frac{42}{175} \cdot 100 = \mathbf{24\ \%}$$

Solución: **24 %**

Cálculo del total conociendo la parte y el tanto por ciento.

Un depósito contiene 348 litros, que representa el 12% del total. ¿Cuál es su capacidad?

En la fórmula:

$$C \cdot 0,12 = 348$$

Se puede despejar el total:

$$C = \frac{348}{0,12} = \mathbf{2900}$$

Solución: **2900 litros**

EJERCICIOS resueltos

10. a) Calcular el 27 % de 450. b) a) Calcular el 85 % de 2360.

$$27\%\ \text{de}\ 450 = \frac{450 \cdot 27}{100} = 450 \cdot 0,27 = 121.5$$

$$85\%\ \text{de}\ 2360 = \frac{2360 \cdot 85}{100} = 2360 \cdot 0,85 = 2006$$

11. a) ¿Qué porcentaje representa 15 de un total de 120?
b) ¿Qué porcentaje representa 3120 de un total de 8000?

$$\frac{15}{120} \cdot 100 = 12.5\,\% \qquad \frac{3120}{8000} \cdot 100 = 39\,\%$$

12. a) El 64 % de una cantidad es 112. Calcular dicha cantidad.
b) El 3,5 % de una cantidad es 63. Calcular dicha cantidad.

$$C \cdot 0,64 = 112 \Rightarrow C = \frac{112}{0,64} = 175$$

$$C \cdot 0,035 = 63 \Rightarrow C = \frac{63}{0,035} = 1800$$

13. En las vacaciones navideñas un hotel ha tenido una ocupación de un 96%. Si el hotel tiene 175 habitaciones, ¿cuántas se han ocupado?

$$96\%\ \text{de}\ 175 = \frac{175 \cdot 96}{100} = 175 \cdot 0,96 = 168\ \text{habitaciones}$$

14. En mi clase hay 30 alumnos. De ellos, hay 18 que vienen al instituto desde otra localidad utilizando el transporte. ¿Qué porcentaje del total de alumnos utilizan transporte?

$$\frac{18}{30} \cdot 100 = 60\,\%$$

15. El 4,2% de los habitantes de mi pueblo son jóvenes entre 14 y 18 años. Si hay 756 personas en este intervalo de edad, ¿cuántos habitantes habrá?

$$C \cdot 0,042 = 756 \Rightarrow C = \frac{756}{0,042} = 18000\ \text{habitantes}$$

Aumentos y disminuciones porcentuales

Para aumentar un r% a una cantidad inicial CI, hay que sumar CI el porcentaje correspondiente. Se obtiene así una cantidad final CF.

$$\mathbf{CF = CI + CI\frac{r}{100} = CI \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)}$$

Para disminuir un r% a una cantidad inicial CI, hay que restar a CI el porcentaje correspondiente. Se obtiene así una cantidad final CF.

$$\mathbf{CF = CI - CI\frac{r}{100} = CI \cdot \left(1-\frac{r}{100}\right)}$$

Si llamamos **índice de variación** a **1±r/100**, se obtiene la fórmula:

$$\mathbf{CF = CI \times IV}$$

Para calcular el aumento que corresponde a una cantidad inicial CI, bastará multiplicar CI por el índice de variación.

Mi padre cobraba 1200 € al mes y este año le han subido el sueldo un 2%. ¿Cuánto cobra ahora?

Paso a paso:

$$2\%\ \text{de}\ 1200 = \frac{1200 \cdot 2}{100} = 24$$

$1200 + 24 =$ **1224 euros**

Directamente:

$$\text{I.V.} = 1 + \frac{2}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$$

$1200 \cdot 1,02 =$ **1224 euros**

Solución: **1224 euros**

Hemos comprado a mis padres un regalo que valía 65 €. Al pagarlo nos han hecho un descuento del 4%. ¿Cuánto nos ha costado?

Paso a paso:

$$4\%\ \text{de}\ 65 = \frac{65 \cdot 4}{100} = 2,60$$

$65 - 2,60 =$ **62,40 euros**

Directamente:

$$\text{I.V.} = 1 - \frac{4}{100} = 1 - 0,04 = 0,96$$

$65 \cdot 0,96 =$ **62,40 euros**

Solución: **62,40 euros**

Porcentajes sucesivos

Para aplicar varios porcentajes sucesivos a una cantidad inicial CI:

Se aplica el primer porcentaje a la cantidad inicial obteniendo así una segunda cantidad C2.

Se aplica el siguiente porcentaje a la cantidad obtenida obteniendo así una tercera cantidad C3.

Se continúa con este procedimiento para cada porcentaje. En el caso de dos porcentajes se tiene:

$$\mathbf{CF = CI \times IV1 \times IV2}$$

Aplicar a 2500 un aumento del 24% y a la cantidad resultante una disminución del 15 %.

$$IV1 = 1 + \frac{24}{100} = 1 + 0,24 = 1,24$$

$$IV2 = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$$

CF = CI · IV1 · IV2

2500 · 1,24 · 0,85 = 2535

EJERCICIOS resueltos

16. Después del aumento de este año de un 14%, el sueldo de mi madre es ahora de 1938 euros. ¿Cuánto cobraba antes?

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 + \frac{14}{100} = 1 + 0,14 = 1,14$$

$$CI \cdot IV = CF \;\Rightarrow\; CI \cdot 1,14 = 1938 \;\Rightarrow\; CI = \frac{1938}{1,14} = 1700 \text{ euros}$$

17. Mi padre cobraba al mes 1600 euros y después de la subida de este año cobra ahora 1792 euros. ¿Qué tanto por ciento le han subido?

$$CI \cdot IV = CF \;\Rightarrow\; 1600 \cdot IV = 1792 \;\Rightarrow\; IV = \frac{1792}{1600} = 1,12 = 1 + \frac{12}{100} \;\Rightarrow\; 12\%$$

18. Después de hacernos un 8% de descuento en la compra de un regalo, hemos pagado 156,40 euros. ¿Cuál era el precio inicial?

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 - \frac{8}{100} = 1 - 0,08 = 0,92$$

$$CI \cdot IV = CF \;\Rightarrow\; CI \cdot 0,92 = 156,40 \;\Rightarrow\; CI = \frac{156,40}{0,92} = 170 \text{ euros}$$

19. Hemos comprado un regalo que valía 80 euros, pero después de hacernos un descuento hemos pagado 71,20 euros. ¿Qué porcentaje nos han descontado?

$$CI \cdot IV = CF \;\Rightarrow\; 80 \cdot IV = 71,20 \;\Rightarrow\; IV = \frac{71,20}{80} = 0,89 = 1 - \frac{11}{100} \;\Rightarrow\; 11\%$$

20. El precio de un objeto en una tienda de regalos es de 208 euros. En primer lugar aumenta el precio un 45% y posteriormente vuelve a aumentar un 66%. ¿Cuál es el precio final?

Aumento del 46%: $\quad \text{Índice de variación: } IV1 = 1 + \frac{45}{100} = 1 + 0,45 = 1,45$

Aumento del 66%: $\quad \text{Índice de variación: } IV2 = 1 + \frac{66}{100} = 1 + 0,66 = 1,66$

$$CF = CI \cdot IV1 \cdot IV2 = 208 \cdot 1,45 \cdot 1,66 = 500,66 \text{ euros}$$

21. El precio de un objeto en una tienda de regalos es de 180 euros. En primer lugar reduce el precio un 12% y posteriormente aumenta un 27%. ¿Cuál es el precio final?

Disminución del 12%: $\quad \text{Índice de variación: } IV1 = 1 - \frac{12}{100} = 1 - 0,12 = 0,88$

Aumento del 27%: $\quad \text{Índice de variación: } IV2 = 1 + \frac{27}{100} = 1 + 0,27 = 1,27$

$$CF = CI \cdot IV1 \cdot IV2 = 180 \cdot 0,88 \cdot 1,27 = 201,17 \text{ euros}$$

3. Interés simple y compuesto

Interés simple

Si depositamos un capital C en un banco durante un año, el banco nos dará una cantidad I, llamada **interés**, que se obtiene aplicando un porcentaje r%, llamado **rédito**, a la cantidad C.

Si depositamos el capital durante t años, el interés se calculará con la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si depositamos el capital durante t meses, el rédito, que se expresa en tanto por ciento anual, hay que dividirlo entre 12 meses para calcular el rédito que corresponde a un mes. El interés se calculará con la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$$

Si depositamos el capital durante t días, el rédito, que se expresa en tanto por ciento anual, hay que dividirlo entre 360 días para calcular el rédito que corresponde a un día. El interés se calculará con la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$$

Al finalizar el periodo de tiempo el banco nos devolverá nuestro capital inicial más el interés producido.

Calcular el interés que produce un capital de 16000 euros colocado a un interés simple del 3,25% durante 4 años.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

$$I = \frac{16000 \cdot 3{,}25 \cdot 4}{100} = 2080\ €$$

Solución: **2080 €**

Capital final:

16000 + 2080 = 18080 €

Calcular el interés que produce un capital de 22800 euros colocado a un interés simple del 4,5% durante 21 meses.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$$

$$I = \frac{22800 \cdot 4{,}5 \cdot 21}{1200} = 1795{,}50\ €$$

Solución: **1795,50 €**

Capital final:

22800+795,50=24595,50 €

Calcular el interés que produce un capital de 26500 euros colocado a un interés simple del 2% durante 329 días.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$$

$$I = \frac{26500 \cdot 2 \cdot 329}{36000} = 484{,}36\ €$$

Solución: **484,36 €**

Capital final:

26500 + 484,36 = 26984,36 €

EJERCICIOS resueltos

22. Calcular el capital que hay que colocar durante 3 años a un rédito del 4% para que produzca un interés de 5640 euros.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \Rightarrow C = \frac{I \cdot 100}{r \cdot t} = \frac{5640 \cdot 100}{4 \cdot 3} = 47000 \text{ euros}$$

23. Calcular el rédito al que hay que colocar un capital de 28500 euros durante 2 años para que produzca un interés de 5150 euros.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \Rightarrow r = \frac{I \cdot 100}{C \cdot t} = \frac{5150 \cdot 100}{28500 \cdot 2} = 9{,}04\%$$

24. ¿Cuántos años hay que tener un capital de 8500 euros a un rédito del 3,75% para que produzca un interés de 2868,75 euros?

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \Rightarrow t = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r} = \frac{2868{,}75 \cdot 100}{8500 \cdot 3{,}75} = 9 \text{ años}$$

25. Calcular el capital que hay que colocar durante 10 meses a un rédito del 5% para que produzca un interés de 2956 euros.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \Rightarrow C = \frac{I \cdot 1200}{r \cdot t} = \frac{2956 \cdot 1200}{5 \cdot 10} = 70944 \text{ euros}$$

26. Calcular el rédito al que hay que colocar un capital de 29500 euros durante 8 meses para que produzca un interés de 1710 euros.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \Rightarrow r = \frac{I \cdot 1200}{C \cdot t} = \frac{1710 \cdot 1200}{29500 \cdot 8} = 8{,}69\%$$

27. Calcular el interés que produce un capital de 10400 euros colocado a un interés simple del 1,5% durante 163 días.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} = \frac{10400 \cdot 1{,}5 \cdot 163}{36000} = 70{,}63 \text{ euros}$$

28. ¿Cuántos días hay que tener un capital de 40950 euros a un rédito del 2% para que produzca un interés de 182 euros?

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} \Rightarrow t = \frac{I \cdot 36000}{C \cdot r} = \frac{182 \cdot 36000}{40950 \cdot 2} = 80 \text{ días}$$

Interés compuesto

Otro tipo de interés es el llamado **interés compuesto**, en el que cada cierto tiempo, llamado **periodo de capitalización**, los intereses generados por el capital inicial se añaden al capital y generan más intereses.

Si llamamos al capital inicial CI, al rédito r y al tiempo en años t, el capital final CF es igual a:

$$\mathbf{CF = CI \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t}}$$

Si el periodo de capitalización es mensual, en un año habrá 12 periodos de capitalización; si es trimestral, habrá 4 periodos de capitalización; si es semestral habrá 2 periodos. Si k es el número de periodos de capitalización en un año, la fórmula queda:

$$\mathbf{CF = CI \cdot \left(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\right)^{k \cdot t}}$$

Se deposita un capital de 16000 € a un interés compuesto del 3,25% durante 4 años. Calcular el capital final si el periodo de capitalización es anual.

$$CF = CI \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t}$$

$$CF = 16000 \cdot \left(1 + \frac{3,25}{100}\right)^{4}$$

$$CF = 18183,61 \text{ euros}$$

Solución: **18183,61 €**

Se deposita un capital de 16000 € a un interés compuesto del 3,25% durante 4 años. Calcular el capital final si el periodo de capitalización es mensual.

$$CF = CI \cdot \left(1 + \frac{r}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot t}$$

$$CF = 16000 \cdot \left(1 + \frac{3,25}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot 4}$$

$$CF = 18208,05 \text{ euros}$$

Solución: **18208,05 €**

Tasa anual equivalente (T.A.E.)

Cuando ingresamos una cantidad de dinero en un banco a un interés compuesto del r% anual, los intereses que produce se van añadiendo al capital cada periodo de capitalización. La cantidad final que recibimos será mayor cuanto más pequeño sea este periodo, como se puede comprobar en la tabla de la derecha.

La TAE indica el % de crecimiento real del capital durante un año. Es una cantidad algo superior al r%. Se calcula mediante la fórmula:

$$\mathbf{TAE = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\right)^{k \cdot t} - 1\right]}$$

Capital final que se obtiene al depositar durante 1 año un capital de 1 euro, para distintos intereses y distintos periodos de capitalización.

%	1 mes	3 meses	4 meses	12 meses
1 %	1,0100	1,0100	1,0100	1,0100
2 %	1,0202	1,0202	1,0201	1,0200
3 %	1,0304	1,0303	1,0302	1,0300
4 %	1,0407	1,0406	1,0404	1,0400
5 %	1,0512	1,0509	1,0506	1,0500

EJERCICIOS resueltos

29. Se deposita un capital de 8200 euros a un interés compuesto del 5,5% durante 6 años. Calcular el capital final si el periodo de capitalización es anual.

$$CF = CI \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^{t} = 8200 \cdot \left(1+\frac{5,5}{100}\right)^{6} = 11306,51 \text{ euros}$$

30. Se deposita un capital de 29000 euros a un interés compuesto del 1,75% durante 7 años. Calcular el capital final si el periodo de capitalización es trimestral.

Si la capitalización es trimestral, en un año habrá 4 periodos de capitalización.

$$CF = CI \cdot \left(1+\frac{r}{4\cdot 100}\right)^{4\cdot t} = 29000 \cdot \left(1+\frac{1,75}{4\cdot 100}\right)^{4\cdot 7} = 32770,50 \text{ euros}$$

31. Se deposita un capital de 17600 euros a un interés compuesto del 4,5% durante 5 años. Calcular el capital final si el periodo de capitalización es semestral.

Si la capitalización es semestral, en un año habrá 2 periodos de capitalización.

$$CF = CI \cdot \left(1+\frac{r}{2\cdot 100}\right)^{2\cdot t} = 17600 \cdot \left(1+\frac{4,5}{2\cdot 100}\right)^{2\cdot 5} = 21985,98 \text{ euros}$$

32. Se coloca un capital de 1000 euros a un interés del 1%. Calcular el capital final obtenido desde 1 hasta 5 años distinguiendo los tipos de interés simple y compuesto.

Años	Interés simple	Interés compuesto	Diferencia
1	1010,00	1010,00	0
2	1020,00	1020,10	0,10
3	1030,00	1030,30	0,30
4	1040,00	1040,60	0,60
5	1050,00	1051,01	1,01

33. Calcular la tasa anual equivalente (TAE) correspondiente a un 2,5% anual con capitalización mensual.

$$TAE = 100\cdot\left[\left(1+\frac{r}{k\cdot 100}\right)^{k} - 1\right] = 100\cdot\left[\left(1+\frac{2,5}{12\cdot 100}\right)^{12} - 1\right] = 2,53\,\%$$

34. Calcular la tasa anual equivalente (TAE) correspondiente a un 4,75% anual con capitalización trimestral.

$$TAE = 100\cdot\left[\left(1+\frac{r}{k\cdot 100}\right)^{k} - 1\right] = 100\cdot\left[\left(1+\frac{4,75}{4\cdot 100}\right)^{4} - 1\right] = 4,84\,\%$$

Capitalización

Las **operaciones de capitalización** son operaciones bancarias en las que se ingresa una cantidad fija cada periodo de tiempo. Esta cantidad se añade a la cantidad existente y a los intereses generados hasta ese momento y forman una nueva cantidad, a la que hay que aplicar el interés correspondiente.

El capital final CF que se obtiene al ingresar una cantidad c, durante t periodos, a un interés del r% en cada periodo, se puede calcular mediante la fórmula:

$$CF = \frac{c \cdot \left[(1+i)^{t+1} - (1+i)\right]}{i}$$

siendo **i** el interés en cada periodo de capitalización:

$$i = \frac{r}{k \cdot 100}$$

Amortización

Al solicitar un préstamo la cantidad recibida CI se devuelve (amortiza) al banco mediante cantidades fijas c, llamadas **mensualidades o anualidades de amortización**, cada cierto periodo de tiempo t, meses, años, ...

Esta cantidad fija que debemos amortizar se puede calcular con la fórmula.

$$c = \frac{CI \cdot i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

siendo **i** el interés en cada periodo de capitalización:

$$i = \frac{r}{k \cdot 100}$$

Una persona abre un plan de pensiones a lo 33 años. Cada mes ingresa 100 €. El banco le da un interés del 5% anual. ¿Qué cantidad tendrá a los 67 años?

67-33=34 años

$$CF = \frac{c \cdot \left[(1+i)^{t+1} - (1+i)\right]}{i}$$

$$CF = \frac{100 \cdot \left[(1+0{,}0042)^{34 \cdot 12+1} - (1+0{,}0042)\right]}{0{,}0042}$$

Solución: **107357,02 €**

Una persona abre una cuenta de ahorro vivienda durante 4 años, con una cuota anual de 600 € y un interés del 2,75% aual. ¿De qué cantidad dspondrá cuando retire el dinero?

$$CF = \frac{c \cdot \left[(1+i)^{t+1} - (1+i)\right]}{i}$$

$$CF = \frac{600 \cdot \left[(1+0{,}0275)^{4+1} - (1+0{,}0275)\right]}{0{,}0275}$$

Solución: **2569,60 €**

Un comerciante solicita un préstamo de 90000 € a un interés del 5,5% anual y a devolver en 16 años. ¿Qué cantidad tendrá que pagar cada trimestre?

$$c = \frac{CI \cdot i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

$$= \frac{90000 \cdot 0{,}0138 \cdot (1+0{,}0138)^{16 \cdot 4}}{(1+0{,}0138)^{16 \cdot 4} - 1}$$

Solución: **2123,65 €**

EJERCICIOS resueltos

35. Una persona abre un plan de pensiones a lo 22 años. Cada año ingresa 1000 €. El banco le da un interés del 5,25% anual. ¿Qué cantidad tendrá a los 65 años? ¿Qé cantidad de dinero corresponde a sus cuotas?

El plan de pensiones está abierto 65-22=43 años.

$$CF = \frac{c\cdot\left[(1+i)^{t+1}-(1+i)\right]}{i} = \frac{1000\cdot\left[\left(1+\frac{5,25}{100}\right)^{43+1}-\left(1+\frac{5,25}{100}\right)\right]}{\frac{5,25}{100}} = 160925,18 \text{ euros}$$

Ha pagado de cuotas: 43 · 1000 = 43000 euros.

36. Una persona tiene una cuenta de ahorro vivienda durante 8 años, con una cuota mensual de 150 euros y un interés del 2,5% anual ¿De qué cantidad dispondrá cuando retire el dinero?

$$CF = \frac{c\cdot\left[(1+i)^{t+1}-(1+i)\right]}{i} = \frac{150\cdot\left[\left(1+\frac{2,5}{12\cdot 100}\right)^{12\cdot 8+1}-\left(1+\frac{2,5}{12\cdot 100}\right)\right]}{\frac{2,5}{12\cdot 100}} = 15955,88 \text{ euros}$$

37. Una persona tiene un deposita cada trimestre en un banco 400 euros, durante 10 años. El banco le da un interés del 5%. ¿Qué cantidad de dinero tendrá a los 5 años?

$$CF = \frac{c\cdot\left[(1+i)^{t+1}-(1+i)\right]}{i} = \frac{400\cdot\left[\left(1+\frac{5}{4\cdot 100}\right)^{4\cdot 10+1}-\left(1+\frac{5}{4\cdot 100}\right)\right]}{\frac{5}{4\cdot 100}} = 20853,27 \text{ euros}$$

38. Una persona tiene un préstamo personal de 120000 € a un interés del 5% anual y a devolver en 20 años. ¿Qué cantidad tendrá que pagar cada año? ¿Cuánto pagará en total?

$$c = \frac{CI\cdot i\cdot (1+i)^t}{(1+i)^t-1} = \frac{120000\cdot\frac{5}{100}\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)^{20}}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^{20}-1} = 9629,11 \text{ euros}$$

En total pagará: 9629,11 · 20 = 192582,20 euros.

39. Una persona tiene un préstamo hipotecario de 70000 € a un interés del 4,5% anual y a devolver en 15 años. ¿Qué cantidad tendrá que pagar cada mes? ¿Qué cantidad de dinero pagará en total?

$$c = \frac{CI\cdot i\cdot (1+i)^t}{(1+i)^t-1} = \frac{70000\cdot\frac{4,5}{12\cdot 100}\cdot\left(1+\frac{4,5}{12\cdot 100}\right)^{12\cdot 15}}{\left(1+\frac{4,5}{12\cdot 100}\right)^{12\cdot 15}-1} = 535,50 \text{ euros}$$

En total pagará: 535,50 · 12 · 15 = 96390 euros.

Para practicar

1. Una disolución contiene 176 gr. de un compuesto químico por cada 0,8 litros de agua. Si se han utilizado 0,5 litros de agua, ¿cuántos gramos del compuesto químico habrá que añadir?

2. Si 10 albañiles realizan un trabajo en 30 días, ¿cuántos se necesitarán para acabar el trabajo en 25 días?

3. Un grupo de 43 alumnos realizan un viaje de estudios. Tienen que pagar el autobús entre todos, pagando cada uno 90 €. Por otra parte los gastos totales de alojamiento son 12427 €. ¿Cuál sería el precio total y el precio individual si fuesen 46 personas?

4. Para alimentar a 11 pollos durante 16 días hacen falta 88 kilos de pienso. ¿Cuántos kilos de pienso harán falta para alimentar a 18 pollos en 8 días?

5. Si 10 obreros trabajando 9 horas diarias tardan en hacer un trabajo 7 días, ¿cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 5 obreros trabajando 6 horas diarias?

6. Tres socios abren un negocio aportando 20000, 35000 y 50000 € respectivamente. Al finalizar el año obtienen unos beneficios de 4200 €. ¿Cómo deben repartirlos?

7. Tres camareros de un bar se reparten 238 € de las propinas de un mes de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado, que ha sido 1, 4 y 6 días respectivamente. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

8. En mi instituto hay 450 estudiantes. El número de alumnas representa el 52% del total. ¿Cuántas alumnas hay?

9. El 28 % de los alumnos de un instituto ha aprobado todas las asignaturas. Sabiendo que han aprobado 196 personas. ¿Cuántos alumnos hay en el instituto?

10. Este año el presupuesto de una localidad ha sido de 1868500 €. Para el próximo año se va a incrementar un 1.7 %. ¿Cuál será el presupuesto?

11. La población de una localidad costera ha pasado de 44500 a 61410 habitantes. ¿Qué % ha aumentado?

12. Un bosque tiene 30900 árboles. En un incendio ha ardido el 18 % de los árboles. ¿Cuántos árboles quedan?

13. Después de repartir el 90 % de las botellas que levaba, un lechero regresa a su almacén con 27 botellas. ¿Con cuántas botellas salió?

14. Dos hermanos colocan un mismo capital de 22100 € a un rédito del 9% durante 6 años. Uno lo hace a interés simple y otro a interés compuesto con capitalización anual. ¿Qué diferencia hay entre los intereses que recibe cada uno?

15. Una persona coloca un capital de 18000 € durante 1 año a un interés compuesto del 4,2% con capitalización mensual. Calcula la TAE que corresponde y calcula el capital que se obtendría con los mismos datos a un interés simple igual a la TAE.

16. Una persona abre un plan de pensiones a la edad de 28 años. Cada mes ingresa 120 €. El banco le da un interés del 1,5 %. ¿Cuánto dinero tendrá cuando se jubile a los 67 años? ¿Cuánto dinero habrá ingresado durante la vigencia del plan?

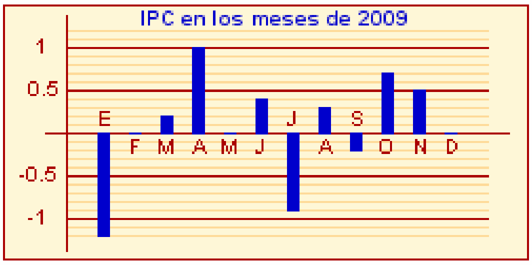
17. Hemos solicitado un préstamo hipotecario de 148000 € a pagar en 18 años y a un interés del 9,1 % anual. ¿Cuándo tendremos que pagar cada mes? ¿Cuál será el importe total del préstamo?

Para saber más

IPC. Índice de Precios al Consumo.

El **IPC** es una medida estadística que indica la evolución de los precios de los bienes y servicios que consumen las familias en España.

Se expresa en % y entre sus aplicaciones económicas está la ser un indicador de la inflación y la de servir de referencia para la revisión de los salarios de los trabajadores.

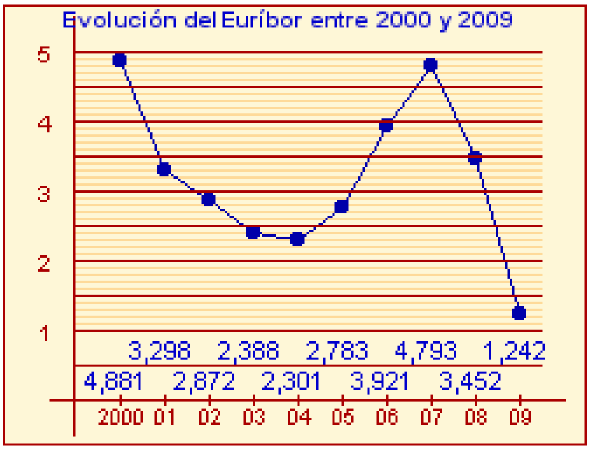


Euríbor. Tipo europeo de oferta interbancaria.

El **euríbor** es la media aritmética de los tipos de interés al que los principales bancos de la zona euro se prestan dinero unos a otros.

Se expresa en % y se actualiza a diario. Su valor a un año es el que se usa de referencia para el interés de los préstamos hipotecarios.

Algunas entidades financieras utilizan como índice el **IRPH** (Índice de referencia de préstamos hipotecarios).



El Banco Central Europeo y el precio del dinero.

El **Banco Central Europeo (BCE)** se fundó el 1 de junio de 1988. Tiene su sede en Francfort (Alemania). Es la entidad responsable de la política monetaria de la Unión europea.

La función principal del BCE es mantener el poder adquisitivo del euro. Se encarga de fijar los tipos de interés (precio del dinero).

El euro se adoptó como moneda única el 1 de enero de 1999.

Recuerda lo más importante

1. Proporcionalidad directa e inversa.

Magnitudes directamente proporcionales. Si se multiplica o divide una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Magnitudes inversamente proporcionales. Si se multiplica o divide una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Proporcionalidad compuesta.

La proporcionalidad compuesta consiste en relacionar tres o más magnitudes.

Al resolver una actividad de proporcionalidad compuesta se relacionan las magnitudes de dos en dos y se mantienen constantes las demás.

También se puede resolver mediante una regla de tres compuesta

Repartos proporcionales.

Directamente. Repartir una cantidad entre varias partes de forma que cada una de ellas reciba una cantidad directamente proporcional a un valor inicial de cada parte.

Inversamente. Se hace el reparto de forma directamente proporcional a los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

2. Porcentajes.

Para aplicar un porcentaje **r%** a una cantidad C:

$$r\% \text{ de } C = \frac{C \cdot r}{100} = C \cdot \frac{r}{100}$$

Variaciones porcentuales.

Se llama índice de variación a la variación que experimenta una unidad.

Para un aumento: $I.V. = 1 + \frac{r}{100}$

Para una disminución: $I.V. = 1 - \frac{r}{100}$

Para una cantidad CI cualquiera la cantidad final se calcula con: **CF = CI · IV**

3. Interés simple y compuesto.

Interés simple. Si depositamos un capital C en un banco, durante un tiempo t a un rédito r%, se obtiene un interés I dado por:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$$

según t se exprese en años, meses o días.

Interés compuesto. Si cada cierto periodo de tiempo, los intereses generados se añaden al capital, éstos producirán más intereses.

A estos periodos de tiempo (años, meses, ...) se les llama periodos de capitalización.

Si k es el número de periodos de capitalización que hay en un año, el capital final es igual a:

$$CF = CI \cdot \left(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\right)^{k \cdot t}$$

Tasa anual equivalente (TAE).

Expresa el crecimiento real de un capital durante un año. Se calcula con la formula:

$$TAE = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\right)^{k} - 1\right]$$

siendo k el número de periodos de capitalización.

Capitalización.

El capital final que se obtiene al ingresar una cantidad c, durante t periodos a un interés del r% en cada periodo es:

$$CF = \frac{c \cdot \left[(1+i)^{t+1} - (1+i)\right]}{i} \qquad i = \frac{r}{k \cdot 100}$$

Amortización.

Si tenemos un préstamo de una cantidad CI, a un interés del r%, a devolver en t cuotas periódicas, cada cuota es igual a:

$$c = \frac{CI \cdot i \cdot (1+i)^{t}}{(1+i)^{t} - 1} \qquad i = \frac{r}{k \cdot 100}$$

Autoevaluación

1. Un automóvil consume 14 litros de gasolina cada 60 kilómetros. ¿Cuántos litros consumirá en 90 kilómetros?

2. Repartir 130 objetos de forma inversamente proporcional a 4 y 9.

3. Si 37 grifos iguales llenan un depósito de 15 m^3 en 6 horas, ¿cuánto tiempo tardarán 2 grifos en llenar un depósito de 35 m^3?

4. En un congreso hay 154 personas españolas. Sabiendo que suponen el 55 % del total, ¿cuántas personas hay en el congreso?

5. El precio de un ordenador era 1060 €. En primer lugar se aplica un aumento del 6 % y después una rebaja del 4 %. ¿Cuál es su precio final?

6. Calcular el interés que produce un capital de 2500 € colocado a un interés simple del 8 % durante 160 días.

7. Se coloca un capital de 6800 € durante 5 años a un interés compuesto del 3,5% con periodos de capitalización anuales. Calcular el capital final que se obtiene.

8. Calcular la tasa anual equivalente correspondiente a un 5,25 % con capitalización mensual.

9. Una persona ha tenido abierto un plan de pensiones durante 31 años a un 4,25 %. Cada año ha ingresado una cuota única de 500 €. ¿De qué cantidad de dinero dispone ahora?

10. Una persona tiene un préstamo hipotecario de 101000 € a un interés del 9 % anual y a devolver en 23 años. ¿Cuánto tendrá que pagar cada mes?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 110 gramos
2. 12 albañiles
3. Precio total: 17164 €
   Precio individual: 373,13 €
4. 72 kilos
5. 21 días
6. 800 €, 1400 €, 2000 €
7. 168 €, 42 €, 28 €
8. 234 alumnas
9. 700 alumnos
10. 1900264,50 €
11. 38 %
12. 25338 árboles
13. 270 botellas
14. 3029,91 €
15. Capital final: 18770,72 €
    TAE: 4,28 %
16. Capital final: 76351,51 €
    Ingresa: 56160,00 €
17. Cuota mensual: 1395,20 €
    Importe: 301362,42 €

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 21 litros
2. 90 y 40 objetos respectivamente
3. 259 horas
4. 280 personas
5. 1086,80 €
6. 88,89 €
7. 8076,27 €
8. 5,38 %
9. 32302,47 €
10. 867,86 €
11. 3 %

No olvides enviar las actividades al tutor

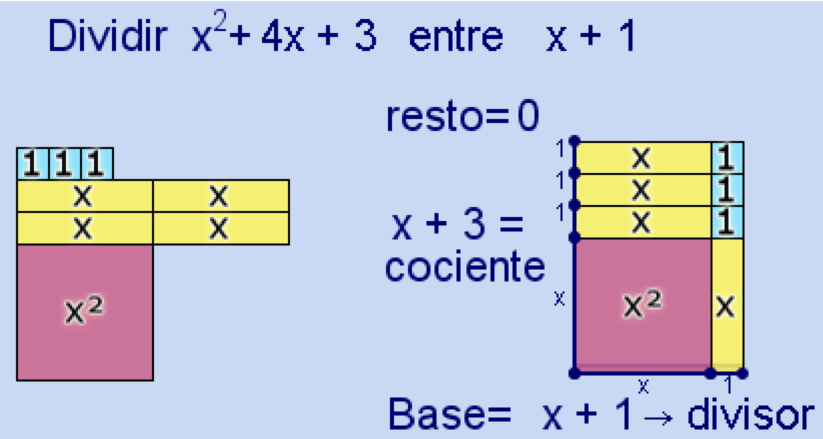
4 Polinomios

Objetivos

En esta quincena aprenderás:

- A trabajar con expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.
- La regla de Ruffini.
- El teorema del resto.
- A reconocer los polinomios con coeficientes reales irreducibles.
- A factorizar polinomios con raíces enteras.

Antes de empezar

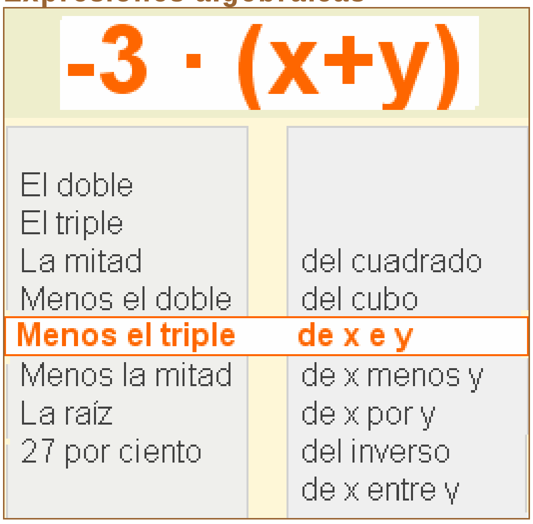


Para dividir x^2+4x+3 entre $x+1$ tomamos piezas:
una de área x^2
cuatro de área x
tres de área 1.
Y formamos con ellas el rectángulo mayor posible que tenga de base $x+1$.

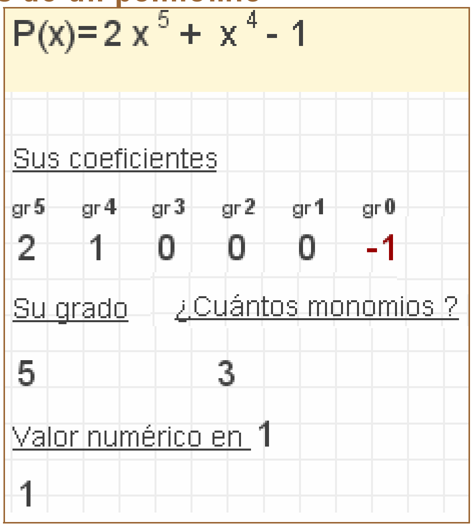
En la figura vemos que $x^2+4x+3=(x+1)\cdot(x+3)$.

Te proponemos un repaso de algunas de las cosas aprendidas en los cursos anteriores:

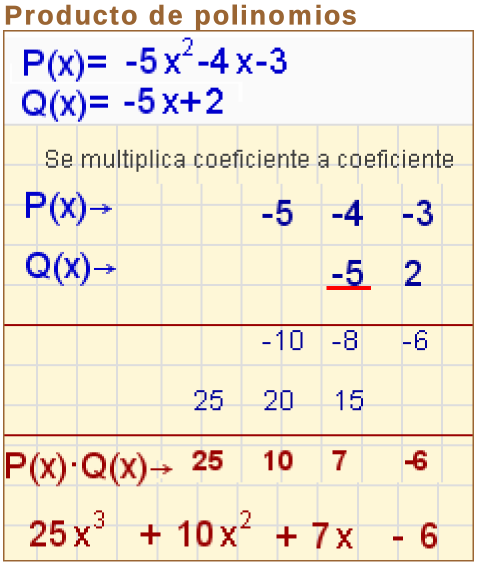
Expresiones algebraicas



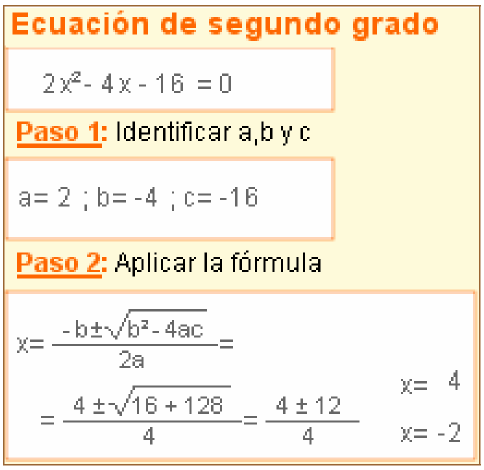
Elementos de un polinomio



Producto de polinomios



Ecuaciones de segundo grado

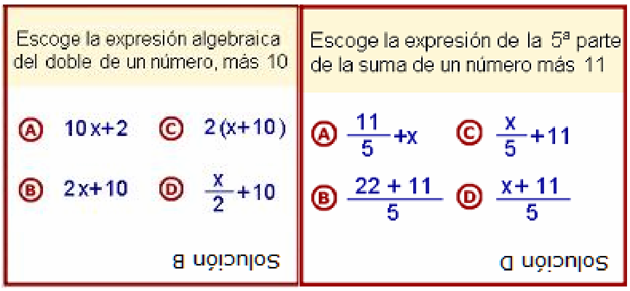


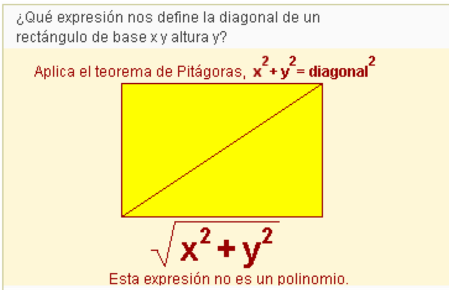
1. Expresiones algebraicas

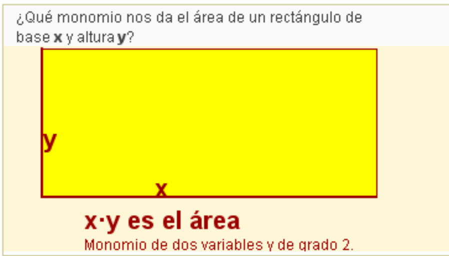
Transformar enunciados en expresiones

Son muchas las situaciones en las que se utilizan expresiones algebraicas, en la derecha se presentan algunas.

Cuando la expresión algebraica es de estos tipos: $3xy^2$; $2x^{10}$; $3/4 \cdot x^2 \cdot y^5$ solo con productos de números y potencias de variables de exponente natural, se denomina monomio. La suma de varios monomios es un polinomio.







Valor numérico

Si en una expresión algebraica sustituimos las letras (variables) por números, lo que tendremos será una expresión numérica. El resultado de esta expresión es lo que llamamos valor numérico de la expresión algebraica para esos valores de las variables.

Observa los ejemplos de la escena de la derecha.

Es importante que tengas en cuenta la **prioridad de las operaciones**

1. Potencias
2. Productos y cocientes
3. Sumas y restas

$2 - 6 \cdot x^3$

valor en 3

$2 - 6 \cdot 3^3$

$2 - 6 \cdot 27$

$2 - 162$

-160

$4 + 2 \cdot x^2$

valor en $\frac{-5}{7}$

$4 + 2 \cdot \left(\frac{-5}{7}\right)^2$

$4 + 2 \cdot \frac{25}{49}$

$4 + \frac{50}{49}$

$\frac{246}{49}$

Con la calculadora

Puedes utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de un polinomio. Recuerda que para realizar la potencia 7^4 se utiliza la tecla x^y,

7 x^y 4 = →2041

Polinomios. Expresión en coeficientes

Los polinomios son expresiones algebraicas en las que las partes literales no llevan por exponentes números negativos o fracciones, los coeficientes pueden llevar raices y se puede dividir por números, pero en los polinomios no aparece un literal dividiendo ni dentro de una raíz.

Es muy conveniente que recuerdes la manera de expresar un polinomio por sus coeficientes, tal y como se explica en la escena de la derecha.

No olvides poner un cero en el coeficiente cuando en el polinomio falta la potencia de un grado, así en $2x^3+x+5$ escribimos 2 0 1 5.

A golpe de vista y sin pasos intermedios debes saber ver la expresión en coeficientes de un polinomio.

$4x^3 + 4x^2 - 3x + 2$

$4x^3 + 4x^2 - 3x^1 + 2x^0$

4 4 -3 2

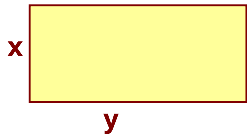
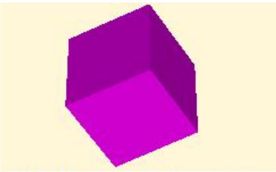
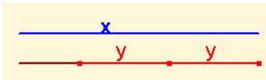
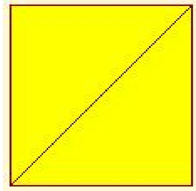
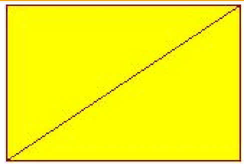
$-2x^4 - x^3 + 4x$

$-2x^4 - 1x^3 + 0x^2 + 4x^1 + 0x^0$

-2 -1 0 4 0

EJERCICIOS resueltos

1. Halla las expresiones algebraicas asociadas a cada imagen

Área del rectángulo 	 **Volumen, arista=x**	Longitud del segmento marrón 	Qué polinomio expresa la **media aritmética de** dos números **x, y**
El triple de un número menos cinco	La suma de los cuadrados de dos números	 La diagonal de un cuadrado de lado x	 La diagonal de un rectángulo de base x y altura y

Soluciones

x·y Polinomio de grado 2 y dos variables	x^3 Monomio de grado 3	x-2y Polinomio de grado1 Dos variables	0,5x+0,5y Polinomio de grado1 Dos variables
3x-5 Polinomio de grado 1 Una variable	x^2+y^2	$\sqrt{2}\cdot x$	$\sqrt{x^2+y^2}$

2. Escoge la expresión algebraica en cada caso

1 El triple de un número más seis	2 La quinta parte de un nº más 10.	3 Un cuarto de la suma un nº más 7.	4 La semisuma de dos números.	5 La mitad del producto de 2 $n^{0\,s}$.
A $6x+3$	A $\frac{x}{5}+10$	A $\frac{x+7}{4}$	A $\frac{x\cdot y}{2}$	A $\frac{x}{2}\cdot y$
B $3x+6$	B $\frac{x+10}{5}$	B $\frac{x}{4}+7$	B $\frac{x+y}{2}$	B $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$
C $3(x+6)$	C $10x+5$	C $\frac{14+7}{4}$	C $\frac{x}{2}+y$	C $\frac{x-y}{2}$
D $\frac{x}{3}+6$	D $5x+10$	D $\frac{7}{4}+x$	D $\frac{x-y}{2}$	D $\frac{x\cdot 7}{2}$
6 La raíz cuadrada de la suma de 2 cuadrados.	**7 El 40% de un número.**	**8 El cuadrado de la suma de 2 números.**	**9 El cuadrado de la semisuma de 2 números.**	**10 La media aritmética de tres números**
A $x+y$	A $0.4\ x$	A $(z+y)^2$	A $\frac{x^2+y^2}{4}$	A $0.5x+0.5y+0.5z$
B x^2+y^2	B $\frac{40}{100\,x}$	B x^2+y^2	B $\frac{x+y^2}{2}$	B $\left(\frac{x+y}{2}+z\right)/2$
C $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$	C $\frac{40}{10}x$	C $x+y^2$	C $\frac{(x+y)^2}{4}$	C $\frac{x+y+z}{3}$
D $\sqrt{x^2+y^2}$	D $\frac{100\,x}{40}$	D $(12+y)^2$	D $\frac{(x+y)^2}{2}$	D $\frac{x+y+z}{2}$

Soluciones: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

EJERCICIOS resueltos

3. Halla los valores numéricos indicados en cada caso.

$2-7\cdot x^5$ en (-2)	$3+5\cdot x^3$ en $\frac{2}{3}$	$3\sqrt{x}-3\cdot x^3$ en 9	$\frac{x^5}{y^3}+4$ en $x=-2$, $y=3$	$\frac{x^5}{y^4}+1$ en $x=4$, $y=4$
$2-7\cdot(-2)^5$	$3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\sqrt{9}-3\cdot 9^3$	$\frac{(-2)^5}{3^3}+4$	$\frac{4^5}{4^4}+1$
$2-7\cdot -32$	$3+5\cdot\frac{8}{27}$	$3\cdot 3-3\cdot 729$	$\frac{-32}{27}+4$	4^1+1
$2+224$	$3+\frac{40}{27}$	$9-2187$		$4+1$
226	$\frac{121}{27}$	-2178	$\frac{76}{27}$	5

4. Valor numérico en -3

$2\cdot x^2+5\cdot x+6$	Sustituye x por (-3)
$2\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)+6$	Realiza la potencia de (-3)
$2\cdot 9+5\cdot(-3)+6$	Efectúa los productos
$18+(-15)+6$	Opera
9	Este es el valor del polinomio para x=-3. Pulsa el botón > de la esquina superior.

5. Valor numético en 0.1

$3\cdot x^2+7\cdot x+2$	Sustituye x por 0.1
$3\cdot 0.1^2+7\cdot 0.1+2$	Efectua las potencias
$3\cdot 0.01+7\cdot 0.1+2$	Realiza los productos
$0.03+0.7+2$	Escribe el resultado
2.73	

6.

x^3+4x-2

¿Cuál es el grado del polinomio? ☐

☐ ☐ ☐ ☐

Escribe los coeficientes en los recuadros.

Solución: grado 3.

Coeficientes: 1 0 4 -2

$x^4-2x^3-x^2-2x$

¿Cuál es el grado del polinomio? ☐

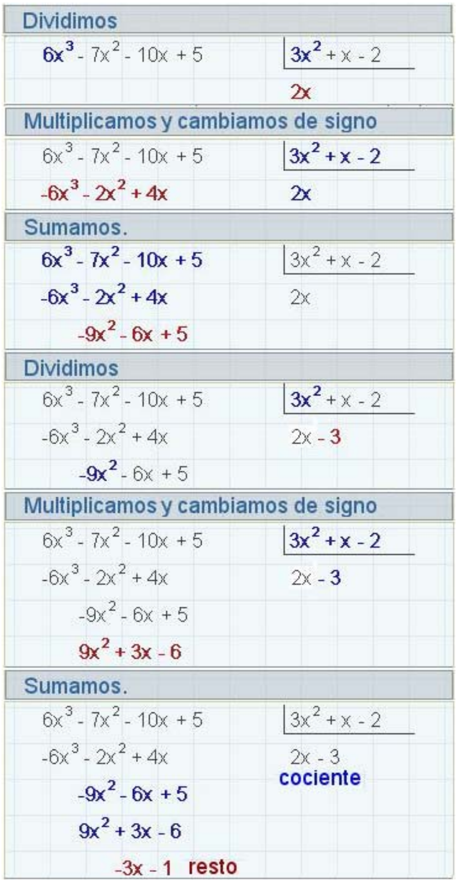
☐ ☐ ☐ ☐ ☐

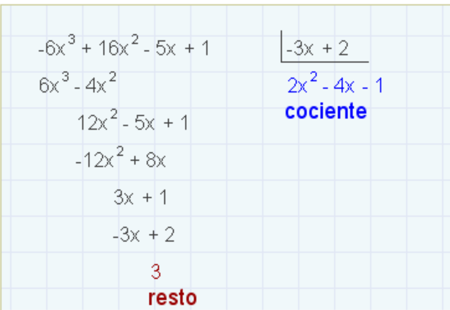
Escribe los coeficientes en los recuadros.

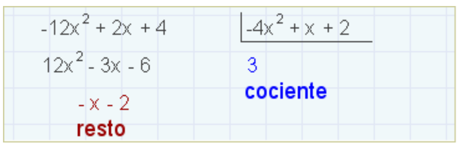
Solución: grado 4.

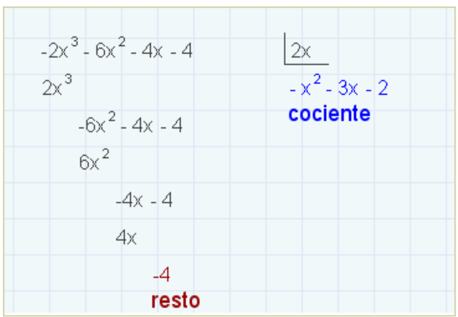
Coeficientes: 1 -2 -1 -2 0

2. División de polinomios









División

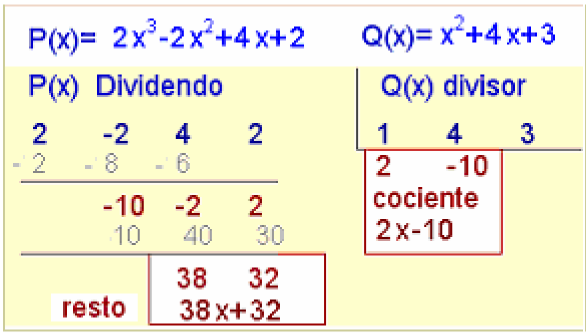
Para realizar la división **se dividen** los monomios de mayor grado, **se multiplica** y se cambia de signo, y **se suma.** Este proceso se repite hasta obtener un resto de grado menor que el del divisor.
La división de polinomios debe cumplir estas dos condiciones:

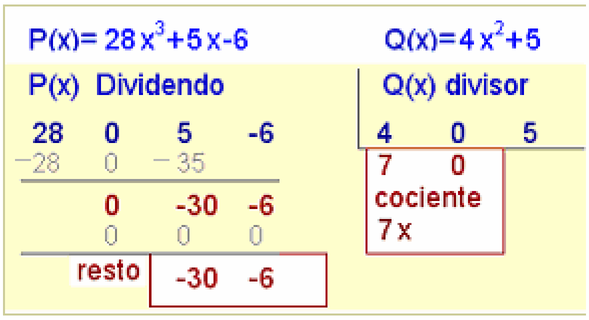
Dividendo = divisor·cociente + resto
gr(resto) < gr(divisor)

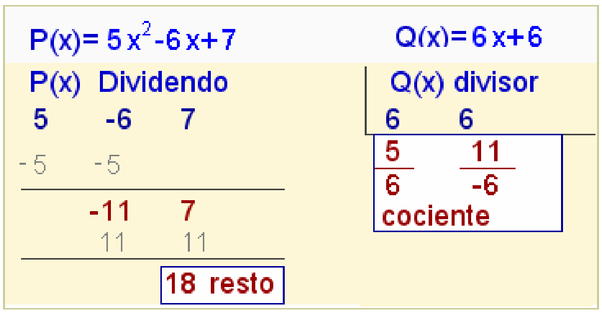
El grado del cociente es la diferencia de los grados del Dividendo y del divisor. Cuando el resto es cero, se dice que el dividendo es divisible entre el divisor.

División por coeficientes

A continuación se ve una division de polinomios con la expresión en coeficientes, algunas veces puede ser conveniente este método o simplemente será cuestión de preferencias elegir un método u otro.







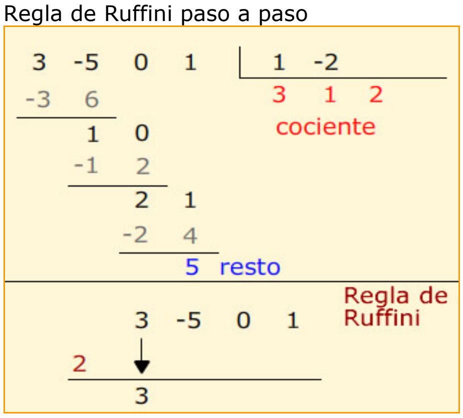
Regla de Ruffini

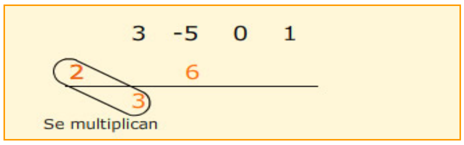
La regla de Ruffini es útil para dividir polinomios entre x-a.
En el ejemplo de la derecha se divide $3x^3-5x^2+1$ entre x-2, obteniendo de cociente $3x^2+x+2$ y de resto 5.
La regla explicada para **a=2**, vale también cuando **a** es un número racional o real, en el siguiente ejemplo se toma **a=-3/2** y representa la división de $4x^2+5x+2$ entre x+3/2

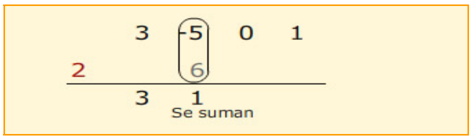
	4	5	2
-3/2		-6	3/2
	4	**-1**	**7/2 resto**

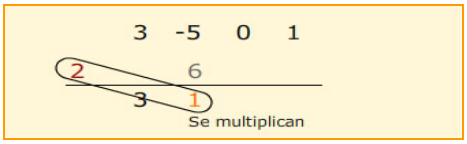
cociente
4x-1

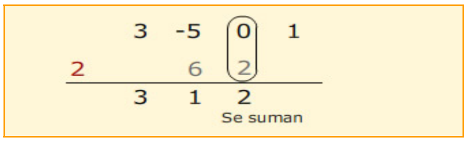
Observa la división y como se realiza la Regla de Ruffini paso a paso



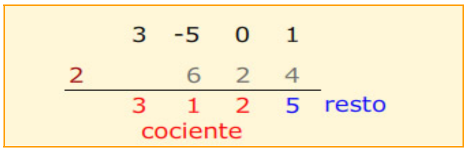








Se vuelve a multiplicar y a sumar obteniendo



Teorema del resto

Al dividir un polinomio P(x) por (x-a) el resto es siempre de grado cero y se obtiene un cociente C(x) que verifica:

$$P(x)=(x-a)\cdot C(x)+\text{resto}$$

Si sustituimos ahora la x por a,

$$P(a) = (a-a)\cdot C(a) + \text{resto}$$

En la igualdad anterior (a-a)=0, por tanto,

valor numérido de P en a = resto

Este resultado se conoce como **teorema del resto**
Así el valor numérico P(x) en a será cero cuando P(x) sea divisible por (x-a), es decir, el resto de P(x) entre x-a es cero, en este caso decimos que **a es raíz** del polinomio P(x).

Recuerda

a es raíz de P(x) ⇔ P(x)=(x-a)·C(x) ⇔ P(a)=0

El teorema se puede aplicar para calcular algunos valores numéricos.

$P(x) = x^3 + 15x^2 + 12x + 4$

Hallar $P(-14) = (-14)^3 + 15\cdot(-14)^2 + 12\cdot(-14) + 1$

	1	15	12	4
-14		-14	-14	28
	1	1	-2	32

También se utiliza nos para resolver problemas como el siguiente, hallar m para que el polinomio

$$P(x)=x^3+mx-4$$

sea divisible por x-2, que se resuelve sustituyendo la x por 2, igualando a 0 y despejando m, así m=-2.

Con la calculadora

Para calcular el valor numérico de un polinomio con la calculadora, valor de $P(x)= 3x^3-5x^2+1$ en x=2
Podemos aplicar la regla de Ruffini, para ello teclea la siguiente secuencia:

2 M in x 3 → 3
-5 = → 1
x MR + 0 = → 2
x MR + 1 =5

Obtenemos: 5 que es el resto de dividir P(x) para x-2 y el valor numérico en x=2.
De paso han ido saliendo los coeficientes del cociente cada vez que se pulsaba =.

EJERCICIOS resueltos

7. Halla el cociente y el resto de la división de P(x) entre Q(x) en cada caso

a) $P(x)=3x^2-11x-13$ $Q(x)=x^2-3x-4$ b) $P(x)=-9x^3-15x^2+8x+16$ $Q(x)=3x+4$

Sol. Cociente=3 Resto=-2x-1 Sol. Cociente= $-3x^2-x+4$ Resto=0

8. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ y $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre x-3

	1	5	-2	1
3)		3	24	66
	1	8	22	67

Cociente $x^2+8x+22$

Resto 67

	2	0	0	0	-5
3)		6	18	54	162
	2	6	18	54	157

Cociente $2x^3+6x^2+18x+54$

Resto 157

	1	3	-4	0
3)		3	18	42
	1	6	14	42

Cociente $x^2+6x+14$

Resto 42

9. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ y $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre x+1

	1	3	-2	1
-1)		-1	-2	4
	1	2	-4	5

Cociente x^2+2x-4

Resto 5

	1	0	0	0	-2
-1)		-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1

Cociente x^3-x^2+x-1

Resto -1

	1	-4	-1	0
-1)		-1	5	-4
	1	-5	4	-4

Cociente x^2-5x+4

Resto -4

10. Si el valor numérico de un polinomio en 2 es igual a 3 y el cociente de su división de entre x-2 es x ¿Sabes de que polinomio se trata?

Dividendo = divisor·cociente +resto, el divisor es x-2, el cociente x y el resto 3, por tanto el polinomio es x^2-2x+3

11. Halla m para que mx^2+2x-3 sea divisible entre x+1

El polinomio será divisible entre x+1 si su valor en -1 es 0, luego ha de ser

m-2-3=0, es decir, m=5

12. Aplica el Terorema del resto y la regla de Ruffini para hallar el valor numérico de $P(x)=x^3-15x^2+24x-3$ en x=13

Aplicando la regla de Ruffini por x-13 da de resto –29, que es el valor numérico pedido.

13. ¿Existe algún valor de m para que el polinomio $x^3+mx^2-2mx+5$ sea divisible por x-2?

Por el teorema del resto basta resolver la ecuación $2^3+m\cdot2^2-2m\cdot2+5=0$, lo que da una igualdad imposible 13=0, por tanto no hay ningún valor de m para el cual el polinomio sea divisible por x-2

3. Descomposición factorial

Sacar factor común una potencia de x

Al descomponer un polinomio en factores lo primero que tendremos que observar es si se puede sacar factor común de todos los sumandos alguna potencia de x.

Esto será posible solo cuando el coeficiente de grado cero del polinomio sea nulo.

En la parte inferior puedes practicar esta extracción.

Tambien es interesante que busques, si es posible el m.c.d. de los coeficientes y lo extraigas como factor así en

$$6x^5+15x^2$$

se puede sacar factor común $3x^2$,

$$6x^5+15x^2=\mathbf{3}x^2(2x^3+5)$$

$$2x^9+x^6-3x^4=$$

$$=2\cdot\boxed{x^4\cdot x^5}+\boxed{x^4\cdot x^2}-3\cdot x^4$$

x^4 está en todos los sumandos.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$

$$=\quad x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

Se ha sacado factor común una potencia de x.

Polinomios de 2º grado

Recuerda la fórmula para resolver la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c=0$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A b^2-4ac se le llama discriminante de la ecuación y se suele designar por Δ.

Esto determina la descomposición factorial de los polinomios de 2º grado:

Las soluciones de $2x^2-8x+6=0$ son 1 y 3, luego $2x^2-8x+6 = 2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$, discriminante positivo.

Las soluciones de $3x^2+6x+3=0$ son 1 y 1, luego $3x^2+6x+3=(x-1)2$, $\Delta=0$.

Las soluciones de $2x^2+6 = 0$ no son reales, b^2-4ac es negativo, $2x^2+6$ no descompone.

$-2x^2 + 20x - 48 = 0$

Paso 1: Identificar a,b y c

a= -2 ; b= 20 ; c= -48

Paso 2: Aplicar la fórmula **Δ= b² -4ac**

$\Delta = (20)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-48) = 16$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

Δ > 0 Hay dos soluciones distintas puedes comprobar que son 6 y 4

Descomposición

$-2x^2 + 20x - 48 = -2\cdot(x-6)\cdot(x-4)$

$3x^2 + 54x + 243 = 0$

Paso 1: Identificar a,b y c

a= 3 ; b= 54 ; c= 243

Paso 2: Aplicar la fórmula **Δ= b² -4ac**

$\Delta = (54)^2 - 4\cdot(3)\cdot(243) = 0$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

Δ= 0 Hay dos soluciones iguales puedes comprobar que es -9

Descomposición

$3x^2 + 54x + 243 = 3\cdot(x+9)^2$

$-3x^2 + 4x - 8 = 0$

Paso 1: Identificar a,b y c

a= -3 ; b= 4 ; c= -8

Paso 2: Aplicar la fórmula **Δ= b² -4ac**

$\Delta = (4)^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-8) = -80$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

Δ < 0 No hay solución

Descomposición

$-3x^2 + 4x - 8$ no descompone

Raíz 2	Raíz -2
Divisor x - 2	Divisor x+2

Regla de Ruffini reiterada

Si x-a es un divisor del polinomio P(x), se dice que **a es raíz** de P(x), por el teorema del resto sabemos que esto equivale a decir que P(a)=0.

$P(x)=p_n\mathbf{x}^n+p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{x}+p_0$ y **a raíz** de P(x),

$p_n\mathbf{a}^n+p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{a}+p_0=0$,

y despejando p_0

$p_0=-p_n\mathbf{a}^n-p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}-\ldots-p_1\mathbf{a}$

Por tanto, si los coeficientes de P(x) son números enteros y **a** también, p_0 es múltiplo de **a**.

Las **raíces** enteras no nulas de un polinomio con coeficientes enteros, son **divisores del coeficiente de menor grado** del polinomio.

La descomposición de un polinomio de tercer grado con raíces 4, 1 y -2 será a·(x-4)·(x-1)·(x+2).

Se llama **multiplicidad** de una raíz al número de veces que aparece en la descomposición.

Descomposición factorial de $x^4-15x^2+10x+24$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 24

±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Con la regla de Ruffini vamos viendo qué divisores son raíces

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

$x^4-15x^2+10x+24=$
$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$

Identidades notables

Suma al cuadrado

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & +2ab & +b^2 \end{array}$$

La suma al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º

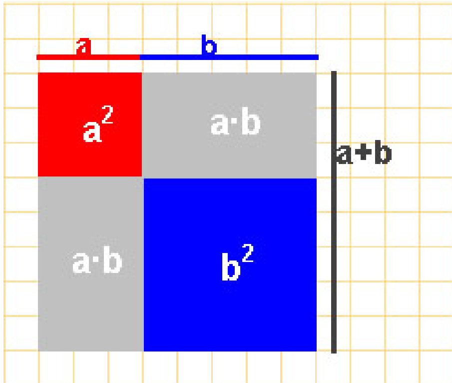
Diferencia al cuadrado

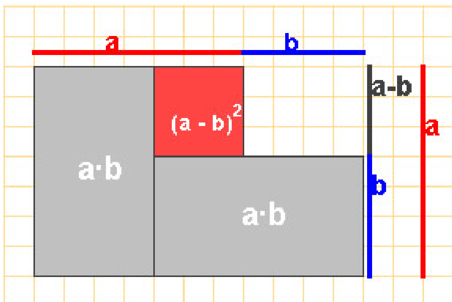
$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab & +b^2 \end{array}$$

La diferencia al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º





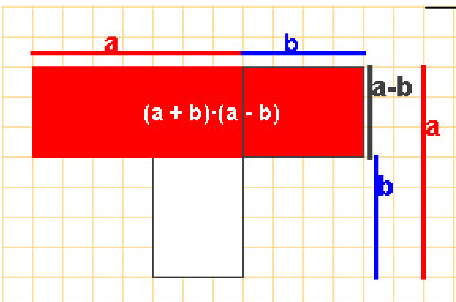
Suma por diferencia

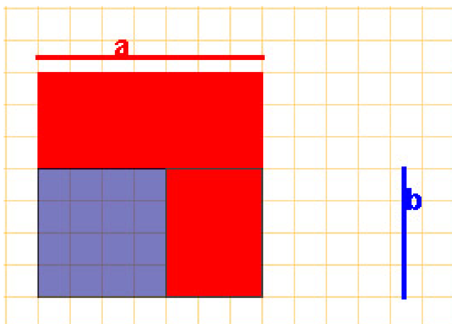
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

La suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$





EJERCICIOS resueltos

14. Saca factor común una potencia de x en cada uno de los siguientes polinomios:
$P(x)=2x^3+3x$ $\quad$ $Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $\quad$ $R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solución: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $\quad$ $Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $\quad$ $R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, en este último caso se ha podido sacar factor común también un número.

15. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 12

$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 4 \quad \pm 6 \quad \pm 12$

Con la regla de Ruffini miramos que divisores son raíces del polinomio

	1	-7	4	12
-1)		-1	8	-12
	1	**-8**	**12**	**0**
2)		2	-12	
	1	-6	**0**	

$\boxed{\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}$

16. Factoriza $2x^2-8x+6$; $-x^2+3x+4$; x^2+2x+3; x^2+6x+9.

$2x^2-8x+6=2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ pues $2x^2-8x+6=0$ tiene por soluciones $x=1$; $x=3$.

$-x^2+3x+4=-(x+1)\cdot(x-4)$ pues $-x^2+3x+4=0$ tiene por soluciones $x=-1$; $x=4$.

x^2+2x+3 no descompone pues su discriminante es <0

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ pues su discriminante es 0, luego tiene una raíz doble: $x=-3$.

17. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. Se ha sacado factor común x^4.
Las posibles raíces enteras de $x^3-x^2\mathbf{-4}$ son los **divisores de -4**:

1,-1, 2,-2, 4,-4

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
1)		1	0	0
	1	0	0	$\mathbf{-4 \neq 0}$,

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
-1)		-1	2	-2
	1	-2	2	$\mathbf{-6 \neq 0}$

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si **2** es raíz de P

	1	-1	0	-4
2)		2	2	4
	1	1	2	**0**

2 es raíz de P

1 $\quad$ 1 $\quad$ 2 $=$ x^2+x+2 La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones reales, por tanto es primo

$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x-\mathbf{2})\cdot(x^2+x+2)}$

EJERCICIOS resueltos

18. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Busquemos las raíces racionales de $\mathbf{x^4-4}$. Las posibles raíces en Q son los cocientes de los divisores de -4 (coeficiente de menor grado) entre los divisores de 1 (coeficiente de mayor grado),

divisores de -4	± 1	± 2	± 4

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ninguno de los posibles valores son raíces de x^4-4. El polinomio no tiene raíces racionales.

Si se reconoce x^4-4 como una diferencia de cuadrados, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultará fácil la descomposición factorial:
$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
El primer factor es primo, pero el segundo vuelve a ser una diferencia de cuadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

19. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

Las posibles raíces enteras de $x^4+x^3-x^2-2x\mathbf{-2}$ son los **divisores de -2**:

$$\boxed{1,-1,\ 2,-2}$$

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5**

-5 distinto de 0, 1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1**

1 distinto de 0, **-**1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 2 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2**

-2 distinto de 0, 2 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22**

22 distinto de 0, -2 no es raíz de P

$\boxed{\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2} \text{ No tiene raíces enteras}}$

No podemos hallar la descomposición factorial de este polinomio.

Para practicar

1. Halla la expresión algebraica de un número de tres cifras si la cifra de las unidades es 4 veces la cifra de las decenas.

2. ¿Cuál es esl grado de $2x^5-x^3+3x^2$? ¿Su coeficiente de grado 3? ¿y el de grado 2? Calcula su valor numérico en x=2

3. Halla P(x)-3·Q(x) siendo $P(x)=4x^2+4x$ y $Q(x)=6x^2+2x$.

4. Multiplica los polinomios $P(x)=-3x^3+4x^2-x-2$ y $Q(x)=-x^2+7$.

5. Halla el cociente y el resto de la división de x^3+2x^2+5x-7 entre $-x^2+x-1$.

6. Haz la división de x^3+4x^2+2x-3 entre x-2 con la regla de Ruffini.

7. Aplica el teorema del resto para calcular el resto de la división de $2x^3-2x^2+x-7$ entre x-5.

8. a) Halla m para que $x^3+mx^2-2mx+6$ sea divisible por x+2

   b) Halla m para que $x^3+mx^2-8mx+4$ sea divisible por x-1.

9. Efectúa las potencias
   a) $(3x+2)^2$
   b) $(2x-4)^2$
   c) $(x-5)^2$

10. Descomponer, aplicando las identidades notables, los polinomio:
    a) $x^4-72x^2+36^2$
    b) x^4-16

11. Descomponer los siguientes polinomios, si es posible, aplicando la ecuación de segundo grado.
    a) $3x^2-10x+3$
    b) x^2-4x+5

12. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

    a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$

    b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$

    c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

13. Saca factor común en $12x^{12}+24x^{10}$

14. Halla la descomposición en factores primos de los siguientes polinomios

    a) $3x^8-39x^7+162x^6-216x^5$

    b) $3x^9+12x^8+15x^7+6x^6$

15. Un polinomio de grado 3 tiene por raíces −5, 7 y 1. Halla su descomposición factorial sabiendo que su valor en 2 es 128.

16. ¿Cómo realizas mentalmente el cálculo de 23^2-22^2?

Para saber más

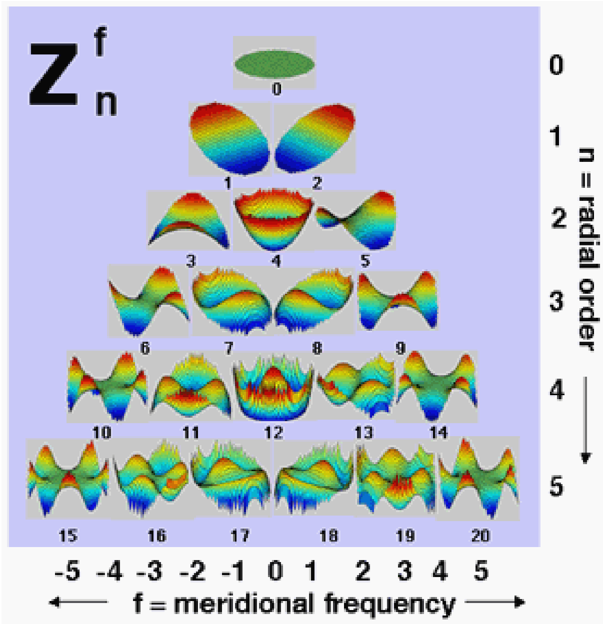
Pide a un compañero que memorice una figura del último cuadro pero que no diga cuál. Tu por telepatía la adivinarás. Pregúntale si la figura escogida está en cada una de las siguientes tarjetas

SI = 1 NO = 0 NO = 0 SI = 1 NO = 0

Con cada respuesta afirmativa escribe 1, con la negativa un 0, para el resultado **1**00**1**0, la figura es la **1**$\cdot2^4$+**1**$\cdot$2=18, el círculo verde. Solo hay que calcular el valor en 2 del polinomio cuyos coeficientes se obtienen con 1 o 0, con Sí o No.

Los polinomios en otras ciencias

Si investigas en la web, es probable que encuentres muchos polinomios con nombre propio: Polinomios de Lagrange, Hermite, Newton, Chevichev... copiamos aquí un extracto de un blog que habla de los polinomios de Zernike y su aplicación en óptica para corregir defectos visuales.



...Las matemáticas, con los polinomios de Zernike, nos ofrecen un método para descomponer superfices complejas en sus componentes más simples. **Así, con este procedimiento matemático podemos jerarquizar y definir todas las aberraciones visuales**. Un esquema que está presente con mucha frecuencia en las consultas de cirugía refractiva es el de las diferentes aberraciones agrupadas y jerarquizadas:

Lo de la jerarquía es fundamental, porque según cuál sea el grupo de la aberración, tendrá más o menos importancia, será más o menos fácil de corregir, etc. Por ejemplo, el número 4 corresponde a la miopía (y su inverso, la hipermetropía), y el 3 y 5 corresponden al astigmatismo...

Extracto de la página http://ocularis.es/blog/?p=29

Recuerda lo más importante

Expresión en coeficientes

$-4x^3 - x^2 + 3$

-4	-1	0	3

División de Polinomios

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
12x^4 & +10x^3 & +15x^2 & +9x & +6 & & 4x^2+2x+3 \\
-12x^4 & -6x^3 & -9x^2 & & & & 3x^2+x+1 \\
 & 4x^3 & +6x^2 & +9x & +6 & & \text{cociente} \\
 & -4x^3 & -2x^2 & -3x & & & \\
 & & 4x^2 & +6x & +6 & & \\
 & & -4x^2 & -2x & -3 & & \\
 & & & 4x & +3 & & \\
 & & & \text{resto} & & &
\end{array}
$$

Regla de Ruffini. Teorema del resto

El resto de la división por x-a es el valor numérico del dividendo en a

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3 & -5 & 0 & 1 & 1 \quad -2 \\
-3 & 6 & & & 3 \quad 1 \quad 2 \\
 & 1 & 0 & & \text{cociente} \\
 & -1 & 2 & & \\
 & & 2 & 1 & \\
 & & -2 & 4 & \\
 & & & 5 & \text{resto}
\end{array}
$$

T. del resto

$5=3\cdot2^3-5\cdot2^2+1$

Regla de Ruffini

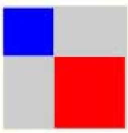
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -5 & 0 & 1 \\
2 & & 6 & 2 & 4 \\
\hline
 & 3 & 1 & 2 & 5 \ \text{resto}
\end{array}
$$

cociente

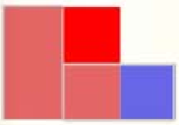
Raíces de un polinomio

Raíz 2	Raíz -2
P(2)=0	P(-2)=0
Divisor x-2	Divisor x+2

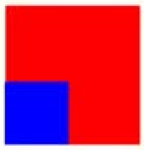
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$



$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$



Descomposición factorial

Los polinomios con coeficientes en IR **primos** son los de **grado uno** y los de **grado dos**, ax^2+bx+c, **con $b^2-4ac<0$**

Raíz de un polinomio

Raíz a

Divisor x-a

P(a)=0

Las raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente.

Para hallar la descomposición factorial de un polinomio se tendrán en cuenta las siguientes herramientas:

- Regla de Ruffini
- Ecuación de 2º grado
- Identidades notables

$P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

Probando la regla de Ruffini (con divisores de 18), encontramos que -1 y 2 son raíces de este polinomio

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 5 & 1 & -21 & -18 \\
-1) & & -1 & -4 & 3 & 18 \\
\hline
 & 1 & 4 & -3 & 18 & 0 \\
2) & & 2 & 12 & -18 & \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & 0 &
\end{array}
$$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+6x+9)$

$P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+6x+9)$

El polinomio de segundo grado x^2+6x+9 se puede descomponer resolviendo la ecuación $x^2+6x+9=0$ que da una solución doble, -3, o se puede reconocer la identidad notable $x^2+6x+9=(x+3)^2$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)^2$

Autoevaluación

1. Halla los coeficientes de P(x)·Q(x)+ P(x)·R(x) siendo $P(x)=3x+2$, $Q(x)=2x^2-5$ y $R(x)=x^2+8x$.

2. Escribe los coeficientes del cociente y del resto en la división de $2x^3-5x^2+5$ entre x^2+5.

3. Calcula el valor numérico de $-3x^3-5x^2+3$ en $x=-1$

4. ¿Es cierta la igualdad $2x^2+20x+25=(2x+5)^2$?

5. Calcula m para que el resto de la división de $4x^2+mx+1$ entre $x+5$ sea 2.

6. Si $P(x)=ax^2+bx+5$ y $a\cdot 6^2+b\cdot 6=3$, ¿cuál es el resto de la división de P(x) entre x-6?

7. Halla una raíz entera del polinomio $x^3+5x^2+8x+16$

8. Halla la descomposición factorial de $-4x^2+12x+112$.

9. El polinomio $5x^3+9x^2-26x-24$ tiene por raíces 2 y −3 ¿Cuál es la otra raíz?

10. Las raíces de un polinomio de grado 3 son −6, 0 y 4. Calcula el valor numérico del polinomio en 2 sabiendo que su coeficiente de mayor grado es 3.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $100x+14y$
2. grado 5; c. gr 3→-1; c. gr 2→3;
   v.n. en 2→68
3. $-14x^2-2x$
4. $3x^5-4x^4-20x^3+30x^2-7x-14$
5. Cociente $-x-3$ Resto $7x-10$
6. Cociente $x^2+6x+14$ Resto 25
7. -33
8. a) 1/4 b) 5/7
9. a) $(3x+2)^2=9x^2+12x+4$
   b) $(2x-4)^2=4x^2-16x+16$
   c) $(x-5)^2=x^2-10x+25$
10. a) $(x+6)^2\ (x-6)^2$
    b) $(x+4)(x-2)(x^2+4)$
11. a) $3(x-1/3)(x-3)$
    b) No descompone
12. a) $(x+4)/3$
    b) $3(x+2)/(x-2)$
    c) $(2x+1)/(3\cdot(2x-1))$
13. $12x^{10}\cdot(x^2+2)$
14. a) $3x^5(x-3)(x-4)(x-6)$
    b) $3x^6(x+2)(x+1)^2$
15. $2(x+5)(x-7)(x-1)$
16. $23^2-22^2=(23+22)\cdot(23-22)=45$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 9 30 1 -10
2. Cociente $2x-5$, resto $-10x+30$
3. 1
4. No, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
5. m=19,8
6. 8
7. −4
8. $-4(x+4)\cdot(x-7)$
9. −0,8
10. -96

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

5 Ecuaciones e Inecuaciones

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Resolver ecuaciones de primer y segundo grado.
- Resolver ecuaciones bicuadradas y factorizadas.
- Identificar y resolver inecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
- Aplicar las ecuaciones e inecuaciones a la resolución de problemas de la vida real.

Antes de empezar

Gran cantidad de problemas prácticos en la vida real conducen a la resolución de una ecuación. Traducir al "lenguaje del álgebra" resulta imprescindible en estas ocasiones, el lenguaje algebraico nos sirve para expresar con precisión relaciones difíciles de transmitir con el lenguaje habitual. El ejemplo de la imagen se resuelve fácilmente con una ecuación:

$$2x + 249 = 5x$$
$$2x - 5x = -249$$
$$-3x = -249$$
$$x = 249/3 = 83$$

Ecuaciones e Inecuaciones

1. Ecuaciones

Elementos de una ecuación

En las ecuaciones distinguimos varios elementos:

- **Incógnita:** La letra (o variable) que figura en la ecuación.
- **Miembro:** Es cada una de las dos expresiones algebraicas separadas por el signo =.
- **Término:** Cada uno de los sumandos que componen los miembros de la ecuación.
- **Grado:** Es el mayor de los exponentes de las incógnitas, una vez realizadas todas las operaciones (reducir términos semejantes)

Solución de una ecuación

La **solución de una ecuación** es el valor de la incógnita que hace que la igualdad sea cierta.

- Si una ecuación tiene solución se llama **compatible**, si no tiene se dice **incompatible**.
- Dos ecuaciones que tienen las misma soluciones se dicen que **equivalentes**.

Distingue los elementos de esta ecuación:

$$14x + (19x + 18) = x^2 + 7x + 1$$

Incógnita: x
Primer Miembro**:** x + (19x+18)
Segundo miembro: $x^2 + 7x + 1$
Términos: 14x, 19x, 18, x^2, 7x, 1
Grado: 2

x+2 = 9 Solución x=7
7+2=9 Es **compatible**

Un ecuación **equivalente**:
2x+4=18

Observa que para obtener una ecuación equivalente se han multiplicado los dos miembros por 2.
$2(x+2) = 2·9 \rightarrow 2x+4 = 18$

2. Ecuaciones de primer grado

Solución

Una **ecuación de primer grado** con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma ax+b=0, con a#0.

La **solución** de una ecuación del tipo **ax+b=c** es:
x=-b/a

Resolver: **-6x+4=15x**

Pasamos la x la izquierda y lo que no tiene x a la derecha
-6x-15x=-4
Hacemos operaciones: -21x=4

Despejamos la x: $x = -\frac{4}{21}$

Aplicaciones. Resolución de Problemas

Las ecuaciones de primer grado se aplican a la resolución de problemas.

Halla tres números consecutivos cuya suma sea 249

Llamamos **x** al menor de los tres números.
Los números consecutivos son **x+1**, **x+2**

La ecuación es: x+x+1+x+2=249
Resolvemos: 3x + 3 = 249
3x = 246
x = 246/3 = 82

La solución: Los números son **82**, **83** y **84**

EJERCICIOS resueltos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{-7x+5}{7}+\frac{9x-7}{8}=-1$ Sol: $56\frac{-7x+5}{7}+56\frac{9x-7}{8}=56\cdot(-1)\to 8(-7x+5)+7(9x-7)=-56$

$-56x+40+63x-49=-56\to 7x=-47\to x=\frac{-47}{7}$

b) $\frac{2x-(x+1)}{4}=\frac{5x+2}{6}$ Sol: $12\frac{x-1}{4}=12\frac{5x+2}{6}\to 3(x-1)=2(5x+2)$

$3x-3=10x+4\to -7x=7\to x=\frac{7}{-7}=-1$

c) $\frac{3x-7(x+1)}{6}=\frac{2x-1}{3}-2$ Sol: $6\frac{3x-7(x+1)}{6}=6\frac{2x-1}{3}-6\cdot 2\to 3x-7(x+1)=2(2x-1)-12$

$3x-7x-7=4x-2-12\to -8x=-7\to x=\frac{7}{8}$

d) $\frac{2x-5}{3}-\frac{-2x+8}{7}=x$ Sol: $21\frac{2x-5}{3}-21\frac{-2x+8}{7}=21x\to 7(2x-5)-3(-2x+8)=21x$

$14x-35+6x-24=21x\to -x=59\to x=-59$

e) $\frac{6x-(x-8)}{6}=\frac{-2x-17}{3}+x$ Sol: $6\frac{6x-(x-8)}{6}=6\frac{-2x-17}{3}+6x\to 6x-(x-8)=2(-2x-17)+6x$

$5x+8=-4x-34+6x\to 3x=-42\to x=-14$

2. La edad de un padre es el triple que la de su hijo, si entre los dos suman 56 años ¿Cuál es la edad de cada uno?

Sol: Edad del hijo: x

Edad del padre: 3x

$x+3x=56\to 4x=56\to x=\frac{56}{4}=14$

La edad del hijo es 14 años y la del padre es 42 años

3. ¿Cuántos litros de vino de 5€ el litro deben mezclarse con vino de 3€ el litro para obtener 50 litros de vino cuyo precio sea de 4€ el litro?

Sol:

Litros de vino de 5€ : x

	litros	precio
vino de 3€ el litro	x	5x
vino de 4€ el litro	50 – x	3(50 – x)
vino de 6€ el litro	50	200

$5x+3(50-x)=200\to 2x=50\to x=25$

Hay que mezclar 25 litros de 5€ con vino de 3€

3. Ecuación de segundo grado

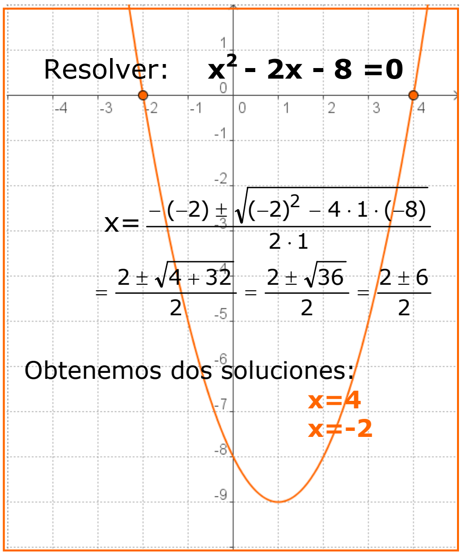
Solución

Las **ecuaciones de segundo grado** son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolverlas empleamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Ecuaciones incompletas

Cuando b, c ó los dos son 0 estamos ante una ecuación de segundo grado incompleta.

En estos casos no es necesario aplicar la fórmula sino que resulta más sencillo proceder de la siguiente manera:

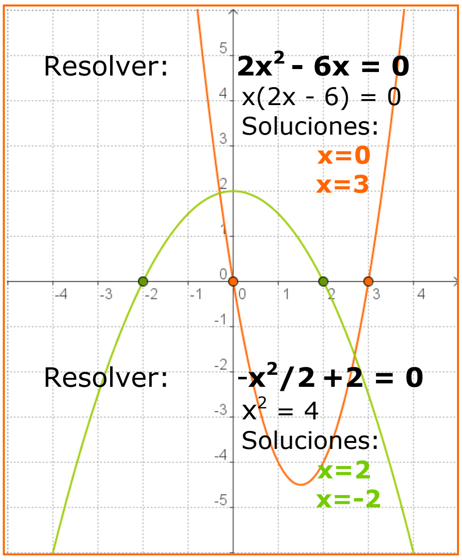
- Si b=0 $\quad ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a$

  $$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

  - Si $-c/a>0$ hay dos soluciones
  - Si $-c/a<0$ no hay solución

- Si c=0 $\quad ax^2 + bx = 0$

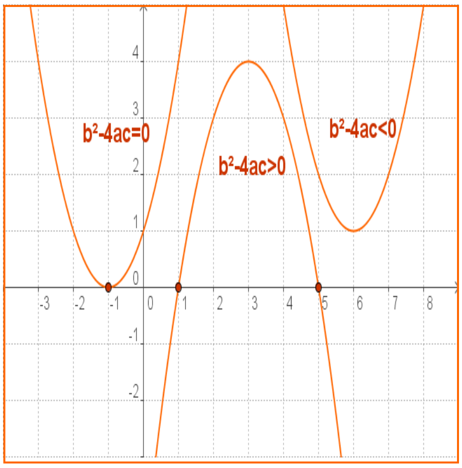
  sacando x factor común : $x(ax+b)=0$ $\Rightarrow$ $x=0$, $x=-b/a$ son las dos soluciones.



Número de soluciones

Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones, una o ninguna solución, según sea **b^2-4ac**, el llamado **discriminante**.

- **b^2-4ac > 0** Hay dos soluciones.
- **b^2-4ac = 0** Hay una solución doble: $x=-b/2a$
- **b^2-4ac < 0** No hay solución.



Aplicaciones

Las ecuaciones de segundo grado se aplican a la resolución de problemas.

- Comienza por leer detenidamente el enunciado hasta asegurarte de que comprendes bien lo que se ha de calcular y los datos que te dan.
- Traduce al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resuelve la ecuación planteada.
- Una vez resuelta la ecuación da la solución al problema. Puede ocurrir que alguna solución no valga.

A continuación puedes ver algunos ejemplos:

EJEMPLO 1

✓ *La suma de los cuadrados de dos números naturales es 313. ¿Cuáles son esos números?*

SOLUCIÓN

Llamamos x al menor de los números.

El consecutivo es x+1

La ecuación es: $x^2 + (x+1)^2 = 313$

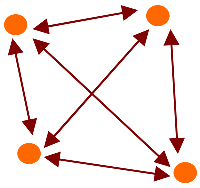
Resolvemos:

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$$
$$2x^2 + 2x + 1 = 313$$
$$2x^2 + 2x - 312 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 2496}}{2\cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2500}}{4} = \frac{-2 \pm 50}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 12 \\ -13 \end{array}\right.$$

La solución es el número 12, (-13 no vale por no ser natural)

EJEMPLO 2

✓ *En un parque nacional hay casetas forestales unidas cada una con todas las demás por un camino. Si el número de caminos es 28, ¿cuántas casetas hay?*



SOLUCIÓN

x= nº casetas, de cada una salen x-1 caminos

Como entre caseta y caseta, el camino de ida es igual al de vuelta el número total de caminos es:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 28 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = 56$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - x - 56 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}$$

Obtenemos x=-14/2=-7 y x=16/2=8

La solución negativa no es válida ya que se trata de nº de casetas, luego hay 8 en el parque.

EJERCICIOS resueltos

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ Sol: $x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$

b) $3x^2 + 17x + 20 = 0$ Sol: $x = \frac{-17 \pm \sqrt{289-240}}{6} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-17 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{-5}{3} \\ -4 \end{cases}$

c) $3x^2 + 5x + 4 = 0$ Sol: $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-48}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6} =$ No hay solución

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 6x = 0$ Sol: $x(x-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$

b) $x^2 + 27x = 0$ Sol: $x(x+27) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 27 = 0 \rightarrow x = 27 \end{cases}$

c) $3x^2 + 5x = 0$ Sol: $x(3x+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2 - 36 = 0$ Sol: $x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$

b) $4x^2 - 9 = 0$ Sol: $x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

c) $x^2 + 9 = 0$ Sol: $x^2 = -9 \rightarrow$ No hay solución

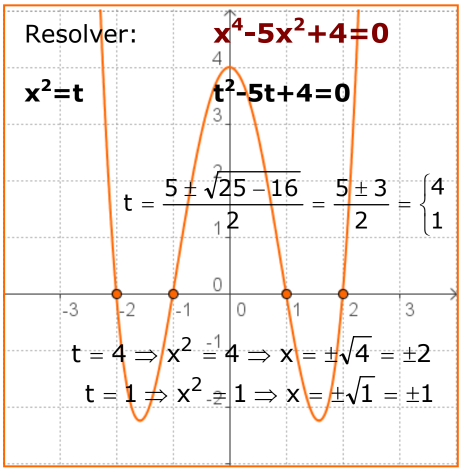
7. Indica sin resolver cuántas soluciones tiene la ecuación: $x^2 + 7x - 11 = 0$

El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es, $7^2 - 4 \cdot 11 = 49 - 44 = 5 > 0$
La ecuación tiene dos raíces distintas

8. Para construir una caja cúbica se han empleado 96 cm^2 de cartón. Determina la longitud de las aristas de la caja

x : Longitud de la arista
Superficie del cubo : $6x^2 \rightarrow 6x^2 = 96 \rightarrow x^2 = \frac{96}{6} = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$
La arista del cubo mide 4 cm

4. Otros tipos de ecuaciones



Ecuaciones bicuadradas

A las ecuaciones del tipo $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$ se les llama bicuadradas.

Para resolverlas basta hacer $\mathbf{x^2=t}$, obteniendo una ecuación de segundo grado: $\mathbf{at^2+bt+c=0}$, en la que

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x=\pm\sqrt{t_1} \\ x=\pm\sqrt{t_2} \end{matrix}$$

(x-2)(2x+3)=0

Se iguala a cero cada factor

Resolvemos:

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$
$$2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Tipo (x-a)·(x-b)·....=0

Para calcular la solución de este tipo de ecuaciones, factorizadas, se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones resultantes.

(x-a)·(x-b)·(x-c)=0

x-a=0 → **x=a**

x-b=0 → **x=b**

x-c=0 → **x=c**

Ensayo-error. Bisección

Resolver: $\mathbf{x^3+x+1=0}$

A	B	f(A)	f(B)	M	f(M)
–1	0	–1	–1	–0'5	0'375
–1	–0'5	–1	0'375	–0'75	–0'172
–0'75	–0'5	–0'172	0'375	–0'625	0'131
–0'75	–0'625	–0'172	0'131	–0'688	–0'014

La solución aproximada es x=-0'688

Se utiliza para resolver ecuaciones complicadas o que no sabemos resolver.

- En primer lugar se pasa todo al mismo miembro para que un miembro de la ecuación sea 0, la ecuación queda de la forma f(x)=0.
- Se trata de encontrar dos valores a y b (a<b) que hagan la ecuación de distinto signo f(a)>0 y f(b)<0. En el ejemplo -1 y 0.

  La solución estará comprendida entre a y b.
- Luego se coge un punto c entre a y b, a<c<b y se mira el signo de la ecuación, si f(c)=0 ya he terminado y c es la solución, si f(c)>0 me quedo con c y b (en otro caso con a y c). En el ejemplo -1 y -0,5.
- Se repite el proceso hasta encontrar la solución o un valor aproximado a ella.

EJERCICIOS resueltos

9. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ $x^2=t$

$t^2 - 25t + 144 = 0$

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

b) $x^4 + 9x^2 - 162 = 0$ $x^2=t$

$t^2 + 9t - 162 = 0$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{81+648}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-9 \pm 27}{2} = \begin{cases} -18 \Rightarrow \text{Sin sol.} \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

c) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ $x^2=t$

$t^2 - 8t + 15 = 0$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

d) $x^4 + 9x^2 + 14 = 0$ $x^2=t$

$t^2 + 9t + 14 = 0$

$$t = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-9 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \Rightarrow \text{Sin sol} \\ -7 \Rightarrow \text{Sin sol} \end{cases}$$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)(x+3) = 0$ Sol: $x-2=0 \rightarrow x = 2$; $x+3=0 \rightarrow x = 3$

b) $(3x-1)(x-5) = 0$ Sol: $3x-1=0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$; $x-5=0 \rightarrow x = 5$

c) $(3x-2)(x+6) = 0$ Sol: $3x-2=0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$; $x+6=0 \rightarrow x = -6$

d) $(3x+1)(7x-5) = 0$ Sol: $3x+1=0 \rightarrow x = \frac{-1}{3}$; $7x-5=0 \rightarrow x = \frac{5}{7}$

11. Resuelve la siguiente ecuación por el método de bisección:

$$x^3 + 2x + 1 = 0$$

A	B	f(A)	f(B)	M	f(M)
–1	0	–2	1	–0'5	–0'125
–0'5	0	–0'125	1	–0'25	0'484
–0'5	–0'25	–0'125	0'484	–0'375	0'197
–0'5	–0'375	–0'125	0'197	–0'438	0'04

La solución aproximada es x= - 0,438

5. Inecuaciones con una incógnita

Definición. Solución.

Dos expresiones algebraicas separadas por los signos $<, >, \leq, \geq$ forman una **inecuación**.

La solución de una inecuación son todos los puntos que cumplen la desigualdad. La solución de una ecuación siempre va a ser un conjunto de puntos, un intervalo.

Propiedades.

- Al sumar o restar la misma cantidad a los dos miembros de una inecuación la desigualdad no varía.
- Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número positivo, la desigualdad no varía.
- Al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un mismo número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Comprobemos las propiedades

63>9

1. Sumo 10 a los dos miembros, queda:

73>19

que sigue siendo cierto.

2. Multiplico por 10 a los dos miembros, queda:

630>190

que sigue siendo cierto.

3. Multiplico por -1 los dos miembros, queda: -63>-9, que no es cierto, para qué lo sea cambio el sentido de la desigualdad.

-63<-9

Inecuaciones de primer grado

Para resolver una inecuación de primer grado, aplicamos las propiedades de las inecuaciones hasta obtener una inecuación de la forma:

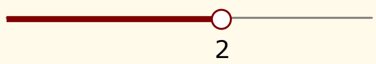
$$\begin{aligned} x < a &\rightarrow \text{sol} : (-\infty, a) \\ x \leq a &\rightarrow \text{sol} : (-\infty, a] \\ x > a &\rightarrow \text{sol} : (a, +\infty) \\ x \geq a &\rightarrow \text{sol} : [a, +\infty) \end{aligned}$$

Resolver la inecuación: **3x+1<7**

3x<6

x<2

sol: (- ∞,2)



Inecuaciones de segundo grado

Una **inecuación de segundo grado** con una incógnita es una desigualdad algebraica que se puede expresar en la forma

$$ax^2+bx+c<0$$

con a#0, y a, b, c números reales.

Para resolverla, se hallan las raíces de la ecuación x_1 y x_2. La solución, si tiene, será algunos o algunos de los intervalos $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2), $(x_2,+\infty)$ con $x_1 < x_2$

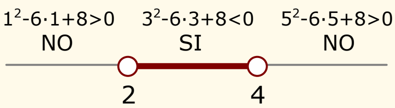
Para saber si un intervalo es de la solución se coge un punto interior a él y se comprueba si verifica la desigualdad, si la verifica es de la solución.

Resolver la inecuación:

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Raíces x=2, x=4



La solución es (2,4)

Para practicar

1. Obtén la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{3} = 1$

b) $\frac{x-3}{2} - 3(x+2) = -20$

c) $\frac{2-2(x-3)}{2} - \frac{x+4}{4} = 3$

d) $\frac{4(x+1)}{2} + x - \frac{x+3}{3} = 5 + 3(x-2)$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $-6x^2 - 7x + 155 = -8x$

b) $3x^2 + 8x + 14 = -5x$

c) $(x-6)(x-10)=60$

d) $(x+10)(x-9)=-78$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

b) $x^4 + 14x^2 - 72 = 0$

c) $x^4 - 81 = 0$

d) $(x^2 - 8)(x^2 - 1) = 8$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $(x+3)(2x-5) = 0$

b) $(5x+3)(2x-8) = 0$

c) $(x-2)(2-3x)(4+x) = 0$

d) $x(x+3)(2x+1) = 0$

5. Resuelve las inecuaciones:

a) $3(x-1)+2x < x+1$

b) $2 - 2(x-3) \geq 3(x-3) - 8$

c) $2(x+3)+3(x+1) > 24$

d) $3x \leq 12 - 2(x+1)$

6. Resuelve las inecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

b) $-2x^2 + 18x - 36 > 0$

c) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

d) $3x^2 - 18x + 15 \leq 0$

7. Encuentra dos números consecutivos que sumen 71

8. Encuentra un número tal que sumado con su triple sea igual a 100

9. ¿Qué edad tengo ahora si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 8 años?

10. Juan tiene 12 años menos que María, dentro de 4 años María tendrá el triple de la edad de Juan ¿cuántos años tienen ahora?

11. Para vallar una parcela rectangular de 240 m^2 se emplean 62 m de cerca. ¿Qué dimensiones tiene la parcela?.

12. La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 25, ¿cuáles son?.

13. Al sumar una fracción de denominador 3 con su inversa se obtiene 109/30, ¿cuál es la fracción?.

14. El cuadrado de un número más 6 es igual a 5 veces el propio número, ¿qué número es?.

15. Busca un número positivo tal que 6 veces su cuarta potencia más 7 veces su cuadrado sea igual a 124.

16. Encuentra m para que $x^2-mx+121=0$ tenga una solución doble.

Para saber más

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

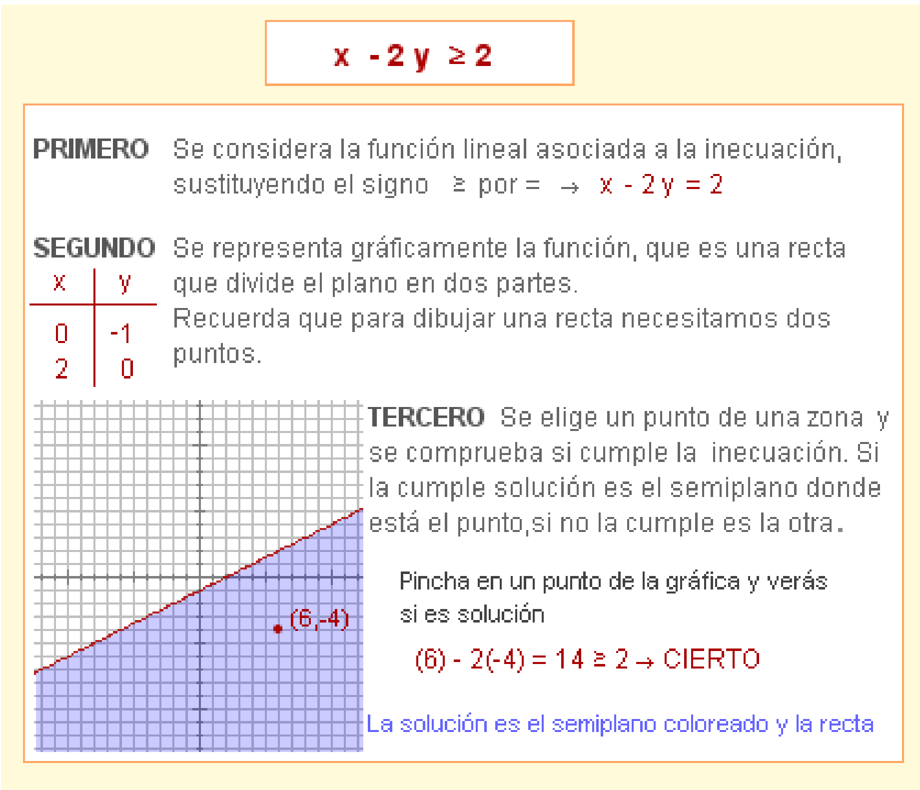
Una **inecuación de primer grado** con una incógnita es una desigualdad algebraica que se puede expresar en alguna de las formas:

ax+by<c, **ax+by>c**, **ax+by ≤c** ó **ax+by≥c**

con a, b, c números reales.

Para resolverla, se considera la función lineal asociada a la inecuación **ax + by = c**, y se representa gráficamente, (recuerda que se trata de una recta).

La solución será uno de los dos semiplanos en que la recta divide el plano.



Recuerda lo más importante

Ecuaciones

Primer miembro — Segundo miembro

$$\underbrace{7x + x^3}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2x - 5}_{\text{Segundo miembro}}$$

Términos

Incógnita: x
Grado: 3

Ecuaciones de primer grado

Se reducen al tipo **ax = b**

Solución: $x = \frac{b}{a}$

Ecuaciones de segundo grado

- Completas: $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$

  Se resuelven con la fórmula:

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Si $b^2 - 4ac < 0$ sin solución.
  Si $b^2 - 4ac = 0$ una solución doble.
  Si $b^2 - 4ac > 0$ dos soluciones.

- Incompletas: $\mathbf{ax^2+c=0}$

  Se despeja $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

- Incompletas: $\mathbf{ax^2+bx=0}$

  Dos soluciones: $x=0$, $x=-b/a$

Otras ecuaciones:

- Bicuadradas: $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$

  $x^2 = t$

  $x = \pm\sqrt{t_1}$ $x = \pm\sqrt{t2}$ donde t_1 y t_2 son las soluciones de $at^2+bt+c=0$

- Factorizadas: $\mathbf{(x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots=0}$

  Soluciones: $x=a$
  $X=b$
  … etc

Inecuaciones

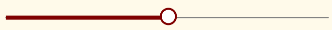
$$\underbrace{3x + x^2}_{\text{Primer miembro}} \leq \underbrace{2x - 6}_{\text{Segundo miembro}}$$

Términos

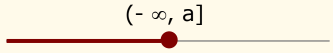
Incógnita: x
Grado: 2

Inecuaciones de primer grado

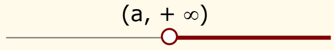
$x < a$ $(-\infty, a)$



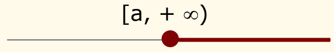
$x \leq a$ $(-\infty, a]$



$x > a$ $(a, +\infty)$



$x \geq a$ $[a, +\infty)$



Autoevaluación

1. Resuelve la inecuación: $-7x+8(-4x-5)<-5x-210$

2. Resuelve la ecuación: $x-\dfrac{x-26}{2}=9(x-8)$

3. Encuentra un número sabiendo que si le sumo 8 veces el consecutivo el resultado es 359

4. Encuentra dos números positivos consecutivos de forma que su producto sea 272.

5. Resuelve la ecuación: $3x^2 + 15x = 0$

6. Resuelve la ecuación: $3x^2 - 768 = 0$

7. Encuentra dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 1105.

8. Resuelve la ecuación : $x^4 - 2937x^2 + 100 = 0$

9. Resuelve la ecuación: $x^2 - 6x + 8 = 0$

10. Resuelve la ecuación: $(x-9)(4x-8)=0$.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) x=15 b) x=5
   c) x=0 d) x=6
2. a) x=5, x=-31/6
   b) x=-2, x=-7/3
   c) x=16, x=0
   d) x=21, x=1
3. a) $x=\pm\sqrt{12}$ b) x=±2
   c) x=±3 d) x=0, x=±3
4. a) x=-3 x=5/2
   b) x=-3/5 x=4
   c) x=2 x=3/2 x=-4
   e) x=0 x=-3 x=-1/2
5. a) (-∞, 1)
   b) (-∞, 5]
   c) (17/5, +∞)
   d) (-∞, 2]
6. a) (2, 3)
   b) (3, 6)
   c) (-∞, -4] ∪ [2, +∞)
   d) [1, 5]
7. 35 y 36
8. 25
9. 18
10. Juan 2, María 14 años
11. 15 m x 16 m
12. 13 y12
13. 10/3
14. 3 y 2
15. 2
16. 22 y -22

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $(5,+\infty)$
2. $x=10$
3. 39
4. 16 y 17
5. x=-5 x=0
6. x=1 x-16
7. 23 y 24
8. $x=\pm2$ $x=\pm8$
9. x=4 x=2
10. x=9 x=2

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

6 Sistemas de ecuaciones

Objetivos

En esta quincena recordarás la resolución de sistemas de ecuaciones y aprenderás a resolver también algunos sistemas de inecuaciones. Cuando la hayas estudiado deberás ser capaz de:

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por los distintos métodos.
- Identificar el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Utilizar los sistemas de ecuaciones para plantear y resolver problemas
- Resolver sistemas de inecuaciones con una incógnita

Antes de empezar

Los sistemas de ecuaciones lineales ya fueron resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área o volumen, sin que tuviera relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos
longitud + anchura = 10 manos

En nuestra notación el sistema es:

Anchura: x
Longitud: y
Manos: t

$$x+4y=28t$$
$$x+y=10t$$

Restando la primera de la segunda se obtiene: $3y=18t$

Luego: $y = 6t$
$x = 4t$

1. Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación lineal con dos incógnitas

Una ecuación de primer grado se denomina **ecuación lineal**.

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una igualdad algebraica del tipo: **ax+by=c**, donde **x** e **y** son las incógnitas, y **a**, **b** y **c** son números conocidos

Una **solución de una ecuación lineal** con dos incógnitas es un par de valores (x_i,y_i) que hacen cierta la igualdad.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y si las representamos forman una recta

$$3x + y = 12$$

Coeficiente de x= 3, Coeficiente de y= 1

Término independiente =12

Una solución de la ecuación es:

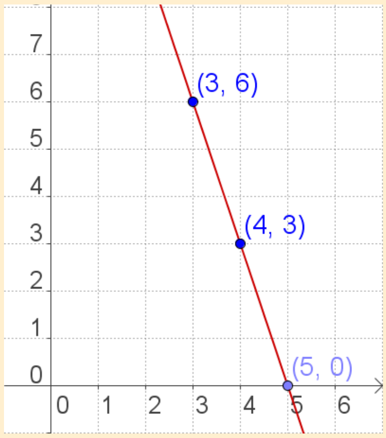
$x=1 \quad y=9$

Observa que $3\cdot(1)+9=12$

Para obtener más soluciones se da a x el valor que queramos y se calcula la y

$$x = 0 \rightarrow y = 12 - 3\cdot 0 = 12$$
$$x = 1 \rightarrow y = 12 - 3\cdot 1 = 9$$
$$x = 2 \rightarrow y = 12 - 3\cdot 2 = 6$$
$$x = 3 \rightarrow y = 12 - 3\cdot 3 = 3$$

Si representamos los puntos en un sistema de ejes coordenados forman una recta:



Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** está formado por dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 son números reales

Dos sistemas con la misma solución se dicen **equivalentes**

Una **solución de un sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas es un par de valores (x_i,y_i) que verifican las dos ecuaciones a la vez. **Resolver el sistema** es encontrar una solución.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x + 4y = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

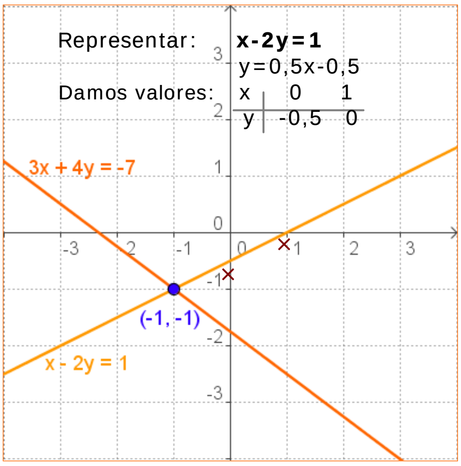
Es una solución del sistema anterior

$$\begin{cases} 2(1) + 3(4) = 2 + 12 = 14 \\ 3(1) + 4(4) = 3 + 16 = 19 \end{cases}$$

Clasificación de sistemas

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación representa una recta en el plano. Discutir un sistema es estudiar la situación de estas rectas en el plano, que pueden ser:

- Secantes, el sistema tiene solución única, se llama **Compatible Determinado**.
- Coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones, es **Compatible Indeterminado**
- Paralelas, el sistema no tiene solución, se llama **Incompatible.**



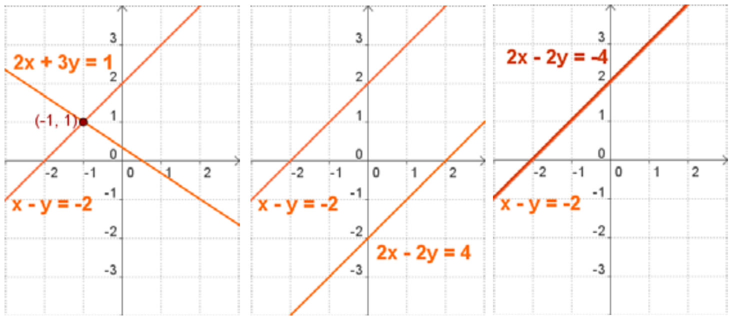
Recuerda cómo se representan las rectas en el plano.

Observa cómo son los coeficientes de las dos ecuaciones en cada caso:

Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ las rectas son paralelas

y son coincidentes si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

COMPATIBLE DETERMINADO | INCOMPATIBLE | COMPATIBLE INDETERMINADO



2. Resolver sistemas

Para resolver un sistema de ecuaciones utilizamos cualquiera de los tres métodos siguientes:

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, se llega así a una ecuación de primer grado con una sola incógnita; hallada ésta se calcula la otra.

Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas. De nuevo obtenemos una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

Método de reducción

Consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplica una de las ecuaciones o ambas por un número de modo que los coeficientes de x o de y sean iguales y de signo contrario.

Resolver: $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Por **SUSTITUCIÓN**

Despejamos x en la 2ª ecuación y sustituimos en la 1ª: $x=1+2y$

$3(1+2y)+4y=-7$

$3+6y+4y=-7 \Rightarrow 10y=-10$

$y=-1$

$x=1+2\cdot(-1)=-1$

Por **IGUALACIÓN**

Despejamos x en ambas ecuaciones e igualamos: $\frac{-4y-7}{3} = 1+2y$

$-4y-7=3(1+2y)$

$-4y-6y=3+7 \Rightarrow -10y=10$

$y=-1$

$x=-1$

Por **REDUCCIÓN**

$$\begin{array}{lrl} & 3x+4y & =-7 \\ \text{Multiplicamos por 2} \rightarrow & 2x-4y & =2 \\ \hline \text{Sumando:} & 5x & =-5 \\ \text{Luego:} & x & =-1 \\ \text{Y sustituyendo:} & y & =-1 \end{array}$$

EJERCICIOS resueltos

1. Dado el sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$, razona si los siguientes pares son solución.

a) x=3 , y=4 Sol: Si es solución $\begin{cases} 3(3) + 2(4) = 9 + 8 = 17 \\ 5(3) - (4) = 15 - 4 = 11 \end{cases}$

b) x=5 , y=1 Sol: No es solución $\begin{cases} 3(5) + 2(1) = 15 + 2 = 17 \\ 5(5) - (1) = 25 - 1 = 24 \# 11 \end{cases}$

c) x=3 , y=1 Sol: Si es solución $\begin{cases} 3(3) + 2(1) = 9 + 2 = 11 \# 17 \\ 5(3) - (1) = 15 - 1 = 14 \# 11 \end{cases}$

2. Escribe un sistema de dos ecuaciones cuya solución sea:

a) x=1 , y=2 Sol: $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

b) x=3 , y=1 Sol: $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

c) x=2 , y=3 Sol: $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ x - 4y = -10 \end{cases}$

3. Haz una tabla de valores y da la solución del sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

Sol: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$3x + 2y = 8 \rightarrow$

x	−2	−1	0	1	2
y	7	11 / 2	4	5 / 2	1

$5x - y = 9 \rightarrow$

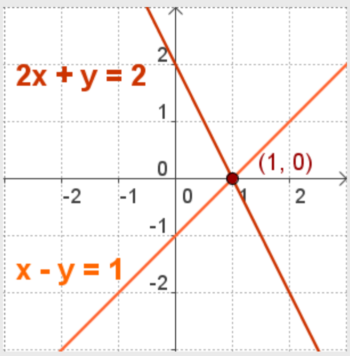
x	−2	−1	0	1	2
y	−19	−14	−9	−4	1

4. Escribe una ecuación para completar con la x – y = 1, un sistema que sea:

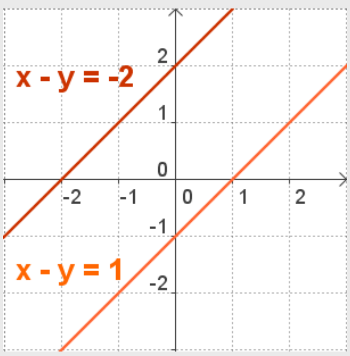
a) Compatible determinado

b) Incompatible

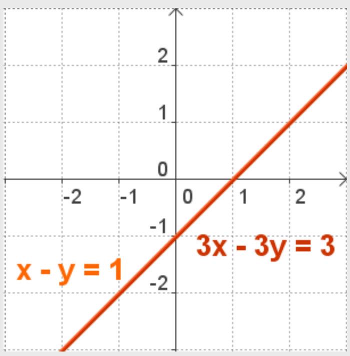
c) Compatible indeterminado



a) Por ejemplo 2x + y = 2



b) Por ejemplo, 2x – 2y = -3



c) Por ejemplo, 3x – 3y = 3

cidead

EJERCICIOS resueltos

5. Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} x + 4y = -25 \\ -10x - 5y = 5 \end{cases}$

Despejamos x en la 1ª ecuación

x=-25-4y   sustituimos en la 2ª

-10(-25-4y)-5y=5 ⇒ 250+40y-5y=5

35y=-245 ⇒ y=-7

x=-25-4·(-7)=3

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ -4x - y = -43 \end{cases}$

Despejamos y en la 2ª ecuación

y=-4x+43   sustituimos en la 1ª

3x+5(-4x+43)=45 ⇒ 3x-20x+215=45

-17x=-170 ⇒ x=10

y=-4·10+43=3

6. Resuelve por igualación:

a) $\begin{cases} -4x + y = 20 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases}$ $y = 20 + 4x$, $y = 6x / 9$

$20 + 4x = \frac{6x}{9}$ ⇒ 180+36x=6x

30x=-180 ⇒ x=-6

y=-36/9=-4

b) $\begin{cases} -3x - 4y = 31 \\ 5x - 9y = 11 \end{cases}$ $x = (31 + 4y) / -3$, $x = (11 + 9y) / 5$

$\frac{31 + 4y}{-3} = \frac{11 + 9y}{5}$ ⇒ 5(31+4y)=-3(11+9y)

155+20y=-33-27y ⇒ 47y=-188 ⇒ y=-4

x=(11-36)/5=-5

7. Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} 5x - 10y = 25 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$

5x −10y=25

Se multiplica por 5 → 40x+10y=20

Sumando: 45x =45

x=1   y=-2

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 7x + 8y = 37 \end{cases}$

Se multiplica por -7 → -35x-21y=-147

Se multiplica por 5 → 35x+40y= 185

Sumando: 19y= 38

y=2   x=3

8. Resuelve: $\begin{cases} 3(x + 3) = y + 10 \\ x + 2(y + 1) = 7 \end{cases}$

Se quitan paréntesis y se reorganiza cada ecuación, quedando el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

que resolvemos por sustitución: x+2(3x-1)=5   x+6x-2 =5   7x = 7   x=1 y=2

9. Resuelve $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = \frac{22}{15} \\ 7x - 7y = 28 \end{cases}$

quitando denominadores y simplificando la 2ª ecuación, el sistema se convierte en uno equivalente.

$$\boxed{\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ x - y = 4 \end{cases}}$$

Por REDUCCIÓN:

$$\begin{array}{rl} 5x - 3y &= 22 \\ -3x + 3y &= -12 \\ \hline 2x \quad &= 10 \end{array} \Rightarrow x=5 \;\; y=1$$

3. Aplicaciones prácticas

Resolución de problemas

Para resolver un problema mediante un sistema, hay que traducir al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resolver el sistema planteado.

Comienza por leer detenidamente el enunciado hasta asegurarte de que comprendes bien lo que se ha de calcular y los datos que te dan.

Una vez resuelta el sistema no te olvides de dar la solución al problema.

Recuerda los pasos:

- Comprender el enunciado
- Identificar las incógnitas
- Traducir a lenguaje algebraico
- Plantear las ecuaciones
- Resolver el sistema
- Comprobar la solución

✓ *María y su hija Sara tienen en la actualidad 56 años entre las dos. Si dentro de 18 años Sara tendrá 5 años más que la mitad de la edad de su madre, ¿qué edad tiene actualmente cada una?.*

SOLUCIÓN

Llamamos **x** a la edad de María.
y a la edad de Sara

La suma de las edades es 56: $x+y=56$

Dentro de 18 años tendrán $x+18$, $y+18$

Y entonces la edad de Sara será $y+18=5+(x+18)/2$

El sistema es:

$$\begin{cases} x+y=56 \\ y+18=5+\dfrac{x+18}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=56 \\ -x+2y=-8 \end{cases}$$

Por Reducción: $3y = 48$ $\quad y=16$

$x= 56 - 16 = 40$

Solución: María tiene 40 años
Sara tiene 16 años

Comprobación: $40+16=56$
Dentro de 18 años tendrán 58 y 34, $34=5+58/2$

✓ *Una parcela rectangular tiene un perímetro de 240 m, si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?.*

SOLUCIÓN

Llamamos **x** al ancho de la parcela
y al largo de la parcela

El largo es el triple del ancho: $y=3x$

El perímetro es: $2x+2y=240$

El sistema es: $\begin{cases} y=3x \\ x+y=120 \end{cases}$

Por sustitución: $x+3x=120$ $\quad 4x=120$ $\quad x=30$ m

$y=90$

Solución: Ancho = 30 m
Largo = 90 m

Comprobación: $90=3\cdot 30$
$2\cdot 90+2\cdot 30=240$

EJERCICIOS resueltos

10. Jorge tiene en su cartera billetes de 10€ y 20€, en total tiene 20 billetes y 440€ ¿Cuántos billetes tiene de cada tipo?

$$\begin{matrix} x: \text{Billetes de } 50\,€ \\ y: \text{Billetes de } 10\,€ \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 50x + 10y = 440 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x \\ 5x + y = 44 \rightarrow y = 44 - 5x \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 20 - x = 44 - 5x \rightarrow 4x = 24 \rightarrow x = 6 \\ y = 20 - x = 20 - 6 = 14 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 14 \end{cases}$$

Tiene 6 billetes de 50 € y 14 billetes de 10 €

11. En un examen de 100 preguntas Ana ha dejado sin contestar 9 y ha obtenido 574 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta se restan 2 puntos, ¿cuántas ha contestado bien y cuántas mal?.

x: nº de respuestas correctas, y: nº de respuestas incorrectas,
en total responde 100-9=91 preguntas.

$$\begin{cases} x + y = 91 \\ 10x - 2y = 574 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x + 2y = 182 \\ 10x - 2y = 574 \\ 12x \quad = 756 \end{matrix} \rightarrow x=63 \text{ preguntas bien} \quad y=91-63=28 \text{ mal}$$

12. En una curso hay 70 alumnos matriculados. En el último examen de Matemáticas han aprobado 39 alumnos, el 70% de las chicas y el 50% de los chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el curso? (50 y 20)

x: chicas y: chicos en total hay 70: x+y=70
aprueban 39: 0,7x+0,5y=39

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 7x + 5y = 390 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -5x - 5y = -350 \\ 7x + 5y = 390 \\ 2x \quad =40 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=20 \text{ chicas} \\ y=50 \text{ chicos} \end{matrix}$$

13. Al dividir un número entre otro el cociente es 2 y el resto es dos. Si la diferencia entre el dividendo y el divisor es 54, ¿de qué números se trata?.

Dividendo: x Divisor: y x − y = 54
Dividendo=divisor · cociente + resto x = 2y+2

$$\begin{cases} x - y = 54 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2y + 2 - y = 54 \rightarrow y = 52 \\ x = 2 \cdot 52 + 2 = 106 \end{matrix}$$

3. Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Resolución

Un sistema de inecuaciones con una incógnita está formado por dos o más inecuaciones con una incógnita.

Para resolver un sistema de inecuaciones con una incógnita se resuelve cada inecuación por separado y se busca la intersección de todas las soluciones.

La solución será un intervalo, una semirrecta o puede ocurrir que no haya solución.

$x \le a$
$x < b$
Sol: $[a, b)$


$x > a$
$x > b$
Sol: $(b, +\infty)$


$x > a$
$x \le b$
Sin solución


$$\begin{cases} 3x - 12 > -3x \\ 3x + 15 \ge 8x \end{cases}$$

Cada inecuación por separado:

$3x - 12 > -3x$	$3x + 15 \ge 8x$
$3x + 3x > 12$	$3x - 8x \ge -15$
$6x > 12$	$-5x \ge -15$
$x > 2$	$x \le 3$

Solución:

(2, 3]

EJERCICIOS resueltos

14. Resuelve: $\begin{cases} 16x - 9 < 19x \\ 15x + 20 \ge 5x \end{cases}$

$16x - 9 < 19x \rightarrow 16x - 19x < 9 \rightarrow -3x < 9 \rightarrow x > -3$
$15x + 20 \ge 5x \rightarrow 15x - 5x \ge -20 \rightarrow 10x \ge -20 \rightarrow x \ge -2$

Sol: $[-2, +\infty)$

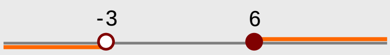

15. Resuelve: $\begin{cases} -11x < 3x - 28 \\ 14x + 42 \ge 16x \end{cases}$

$-11x < 3x - 28 \rightarrow -11x - 3x < -28 \rightarrow -14x < -28 \rightarrow x > 2$
$14x + 12 \ge 16x \rightarrow 14x - 16x \ge -12 \rightarrow -2x \ge -12 \rightarrow x \le 6$

Sol: $(2, 6]$


16. Resuelve: $\begin{cases} 3(2x + 5) < x \\ 13x \le 16x - 18 \end{cases}$

$3(2x + 5) < x \rightarrow 6x + 15 < x \rightarrow 5x < -15 \rightarrow x < -3$
$13x \le 16x - 18 \rightarrow 13x - 16x \le -18 \rightarrow -3x \le -18 \rightarrow x \ge 6$

Sin solución


Para practicar

1. Calcula el valor de c para qué la solución de la ecuación, $x + 7y = c$ sea:

a) $x = 1$, $y = 2$

b) $x = 3$, $y = -3$

c) $x = 5$, $y = 0$

d) $x = -2$, $y = 3$

2. Halla una solución (x,y) de la ecuación $-4x + y = 17$ sabiendo que:

a) $x = 1$

b) $y = -7$

3. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución:

a) $x = 4$, $y = -3$

b) $x = 1$, $y = -2$

c) $x = 0$, $y = 5$

d) $x = 1$, $y = 1$

4. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que:

a) tenga infinitas soluciones

b) tenga una sola solución

c) no tenga solución

5. Razona si el punto (x,y) es solución del sistema:

a) $x = 3$, $y = 4 \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}$

b) $x = 1$, $y = 2 \rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

6. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$

7. Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} 2x + y = 15 \\ x - 2y = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -7x + 6y = -29 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

8. Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} x - 12y = 1 \\ -4x - 9y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 6y = 3 \\ -9x + 2y = -83 \end{cases}$

9. Resuelve por igualación:

a) $\begin{cases} x - 2y = 17 \\ 7x - 6y = 47 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4y = 32 \\ x - 3y = -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$

10. Resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más adecuado:

a) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = -\frac{3}{5} \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{8} = \frac{-3}{8} \\ 8x + 5y = 33 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \\ 7x + 3y = 34 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{y}{2} = \frac{4}{9} \\ 5x - 7y = 20 \end{cases}$

11. Hallar dos números sabiendo que el mayor más seis veces el menor es igual a 62 y el menor más cinco veces el mayor es igual a 78.

12. Dos números suman 241 y su diferencia es 99. ¿Qué números son?

13. Pedro tiene 335 € en billetes de 5€ y de 10€; si en total tiene 52 billetes, ¿cuántos tiene de cada clase?.

14. En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?.

15. Se desea mezclar vino de 1 €/litro con vino de 3 €/litro para obtener una mezcla de 1,2 €/litro. ¿Cuántos litros deberemos poner de cada precio para obtener 2000 litros de mezcla?.

16. En un almacén hay dos tipos de lámparas, las de tipo A que utilizan 2 bombillas y las de tipo B que utilizan 7 bombillas. Si en total en el almacén hay 25 lámparas y 160 bombillas, ¿cuántas lámparas hay de cada tipo?.

17. En un parque de atracciones subir a la noria cuesta 1 € y subir a la montaña rusa 4 €. Ana sube un total de 13 veces y gasta 16 €, ¿cuántas veces subió a cada atracción?.

18. En un corral hay ovejas y gallinas en número de 77 y si contamos las patas obtenemos 274 en total. ¿Cuántas ovejas y cuántas gallinas hay?

19. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es 7 y la diferencia entre el número y el que resulta al intercambiarlas es 27.

20. La suma de las edades de Luisa y de Miguel es 32 años. Dentro de 8 años la edad de Miguel será dos veces la edad de Luisa. ¿Qué edades tienen ambos?

21. María ha comprado un pantalón y un jersey. Los precios de estas prendas suman 77€, pero le han hecho un descuento del 10% en el pantalón y un 20% en el jersey, pagando en total 63'6€.¿Cuál es el precio sin rebajar de cada prenda

22. Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4, la suma de los cocientes es 15, mientras si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma de los productos es 188.

23. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} -3x < 2(-6x+8) \\ -16x - 31 \le -5x \end{cases}$ b) $\begin{cases} -9x \ge 12x - 28 \\ 6(x+5) < 2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ 2x - 56 < 11x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 16x - 39 < 5x \\ -4x \ge 12x - 15 \\ 6(2x+7) \le 2x \end{cases}$

24. Rosa quiere comprar globos y serpentinas para adornar la fiesta de fin de curso. Quiere comprar doble número de paquetes de globos que de serpentinas y no quiere comprar menos de 30 paquetes de globos. Si el paquete de serpentinas vale 4€ y el de globos 3€, y además no quiere gastar más de 248€. ¿Cuántos paquetes de serpentinas puede comprar?.

25. La piscina del edificio A es un cuadrado y la del edificio B un rectángulo, uno de cuyos lados mide lo mismo que el del cuadrado y otro 6 m. Para qué medidas del lado del cuadrado el perímetro de la piscina del edificio A es mayor que el de la piscina del edificio B.

26. Pedro tiene 87 € para comprar todos los discos de su cantante preferido. Si cada disco costase 23 € no tendría suficiente dinero, pero si costase 15 € entonces le sobraría. ¿Cuántos discos tiene el cantante?.

Para saber más

Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Un sistema de inecuaciones con dos incógnitas, esta formado por dos ó más inecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y < c_1 \\ a_2x + b_2y < c_2 \end{cases}$$

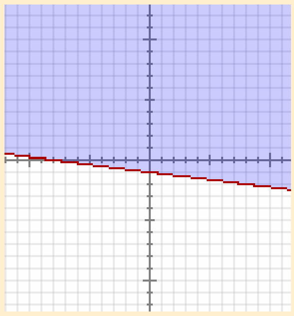
Se resuelve gráficamente.

Para representar gráficamente la solución de un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se representa el semiplano solución de cada inecuación y se toma la intersección de todos los semiplanos representados

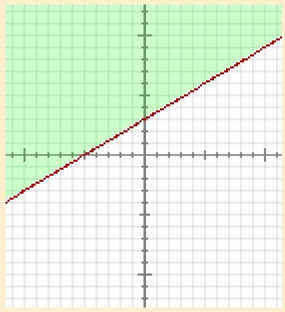
$$\begin{cases} x + 8y > -8 \\ -3x + 15y > 15 \end{cases}$$

Se resuelve por separado cada inecuación:

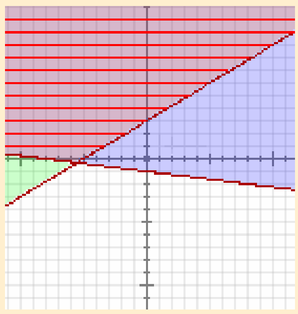
x+8y>-8



-3x+5y>15



La solución es la zona común a las dos soluciones, la zona rayada en rojo



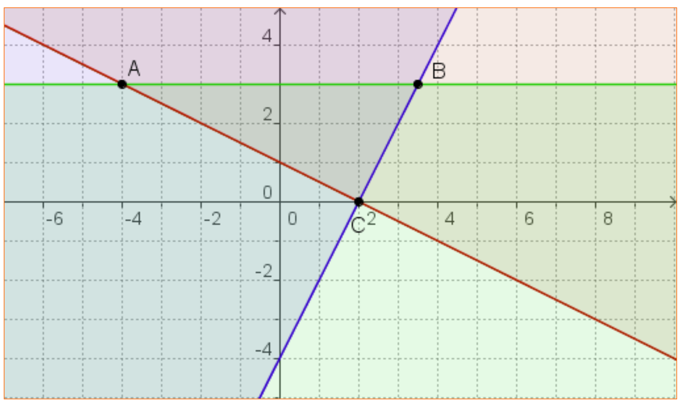
OTRO EJEMPLO

$x + 2y - 2 \geq 0$

$2x - y - 4 \leq 0$

$y - 3 \leq 0$

La solución es el triángulo de vértices ABC, común a las tres zonas



Recuerda lo más importante

Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Viene dado por la expresión:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

a, **b**, **p** ,**q** son los coeficientes
c y **r** son los términos independientes

Métodos de solución

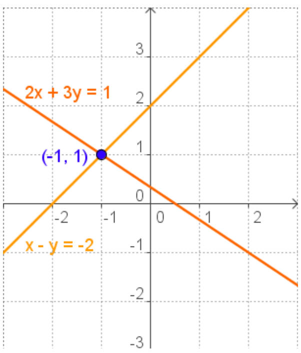
- Reducción
- Sustitución
- Igualación

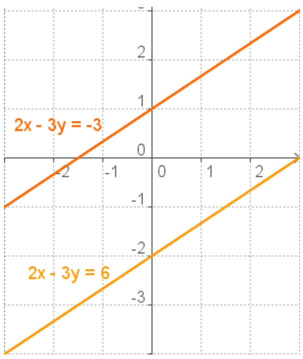
Clasificación

- **Sistema Compatible Determinado**
El que tiene una única solución

- **Sistema Compatible Indeterminado**
El que tiene infinitas soluciones

- **Sistema Incompatible**
El que no tiene solución





Sistemas de inecuaciones con una incógnita

La solución de una inecuación es un conjunto de puntos de R. Será de alguna de estas formas:

$$x > a \rightarrow (-\infty, a)$$
$$x \leq a \rightarrow (-\infty, a]$$
$$x > \rightarrow (a, +\infty)$$
$$x \geq \rightarrow [a, -\infty)$$

Dos ó más inecuaciones lineales con una incógnita forman un **sistema de inecuaciones lineales**.

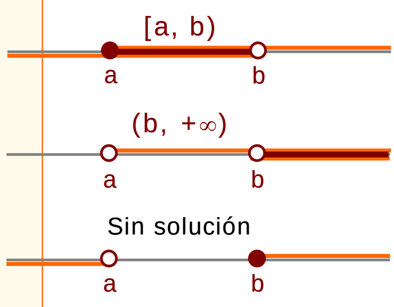
Para **resolver** un sistema de inecuaciones con una incógnita se resuelve cada una por separado.

La solución del sistema es la **intersección** de todas las soluciones.

$x \leq a$
$x < b$

$x > a$
$x > b$

$x > a$
$x \leq b$



Para resolver problemas

- ✓ Comprender el enunciado.
- ✓ Identificar las incógnitas.
- ✓ Traducir al lenguaje algebraico.
- ✓ Resolver el sistema.
- ✓ Comprobar las soluciones.

Autoevaluación

1. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya única solución sea: x=5 , y=-9

2. Halla el valor de a para qué el sistema siguiente sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} ax - 6y = 3 \\ -12x - 24y = -12 \end{cases}$$

3. Resuelve el sistema: $\begin{cases} 11x - 4 \leq 12x \\ -2x + 14 \geq 5x \end{cases}$

4. Escribe una solución de la ecuación: $-x + 2y = 4$

5. Resuelve por reducción: $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

6. Resuelve por sustitución: $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$

7. Resuelve por igualación: $\begin{cases} x + 4y = 23 \\ x + 5y = 28 \end{cases}$

8. Halla dos números cuya diferencia sea 18 y su media aritmética sea 124

9. Indica qué tipo de sistema es: $\begin{cases} 2x + 10y = 56 \\ x + 5y = 28 \end{cases}$

10. Halla las dimensiones de un rectángulo de perímetro 692 cm si la base mide 40 cm menos que la altura.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 15 b) -18
c) 5 d) 19

2. a) $x = 1 \ y = 21$
b) $x = -6 \ y = -7$

3. a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

5. a) no b) si

6. a) Hay infinitas soluciones
b) $x = 5 \ y = 3$

7. a) $x = 3 \ y = 9$
b) $x = 5 \ y = 1$

8. a) $x = -3 \ y = -1/3$
b) $x = 9 \ y = -1$

9. a) $x = -1 \ y = -9$
b) $x = 4 \ y = 7$

10. a) x=7 y=8 b) x=1 y=5
c) x=4 y=2 d) x=4 y=0

11. 14 y 8

12. 170, 71

13. 80 y 320

14. 15 de 10€ y 37 de 5€

15. 25 dobles y 42 sencillas

16. 1800 litros de 1€ y 200 litros de 3€

17. 3 de tipo A y 22 de tipo B

18. 12 veces a la noria y 1 a la montaña

19. 17 gallinas y 60 ovejas

20. El nº 52

21. El pantalón 20€ y el jersey 57€

22. Luisa tiene 8 y Miguel 24 años

23. a) [31/11, 16/9) b) (-∞, -15/2]
c) [0, 3] d) (-∞, -21/5]

24. entre 15 y 24

25. x>6

26. entre 4 y 5 discos

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $\begin{cases} x + y = -4 \\ x - y = 14 \end{cases}$

2. a=-3

3. [-4,2]

4. x=0 y=2

5. x=4 y=1

6. x=2 y=3

7. x=3 y=5

8. 133 y 115

9. SCI

10. base=153 altura=193

7

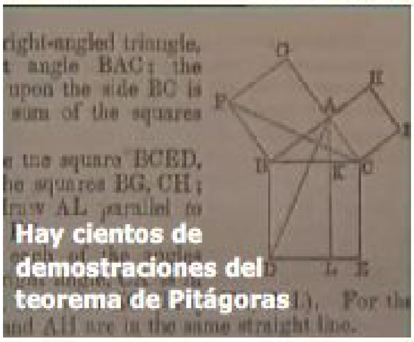
Semejanza y trigonometría

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer triángulos semejantes.
- Calcular distancias inaccesibles, aplicando la semejanza de triángulos.
- Nociones básicas de trigonometría.
- Calcular la medida de todos los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo a partir de dos datos.

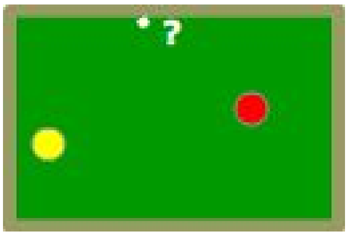
Antes de empezar



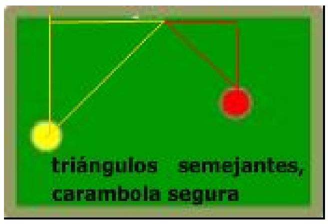
Investiga jugando

¿Cómo hacer carambola a una banda?

Si has jugado al billar, sabrás que hacer carambola a una banda significa que la bola lanzada debe dar una vez en el marco de la mesa antes de hacer carambola. Basta aplicar la semejanza para conseguirlo, ¿Cómo?



¿Hacia donde debemos dirigir la bola amarilla para que después de rebotar en la banda vaya a la bola roja?



1. Semejanza

Teorema de Tales

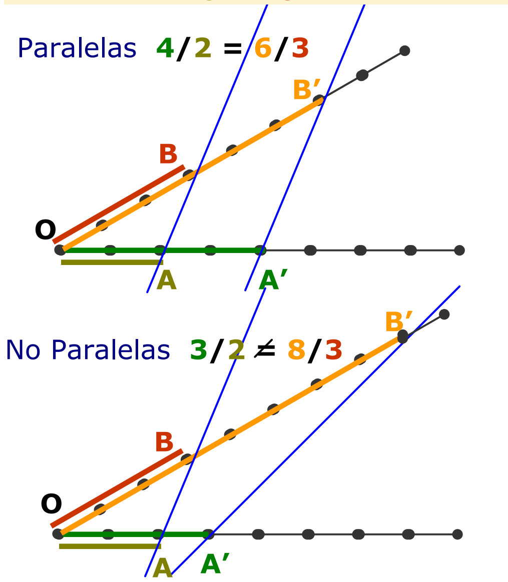
El teorema de Tales se puede ver en la derecha, afirma que cuando se cortan dos semirrectas con dos rectas paralelas, los segmentos que se obtienen en cada semirrecta guardan la misma proporción.

Este teorema nos indica que si dos triángulos tienen los ángulos iguales, los lados son proporcionales.

El recíproco también es cierto, por lo que se pueden deducir los criterios de semejanza de triángulos.

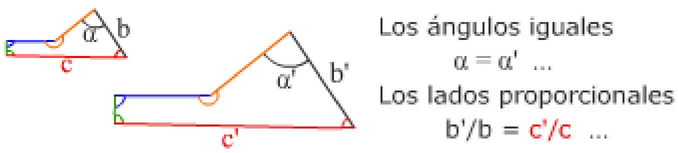
Solo cuando las rectas azules son paralelas, se obtienen segmentos proporcionales

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$$

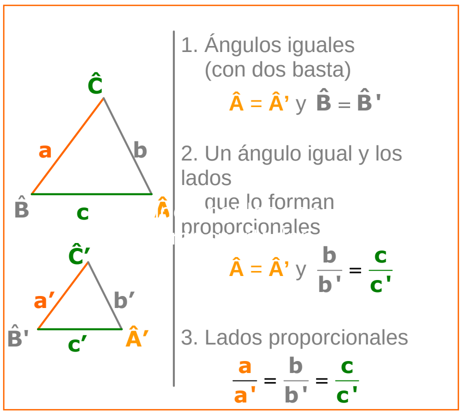


Triángulos semejantes

Dos figuras son semejantes si por homotecias y movimientos coinciden. En polígonos significa que los **lados** han de ser **proporcionales** y los **ángulos iguales**.



Por el teorema de Tales para que dos **triángulos** sean **semejantes** basta con que se cumpla alguno de los tres **criterios** de la derecha

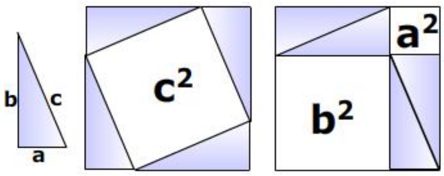


Teorema de Pitágoras

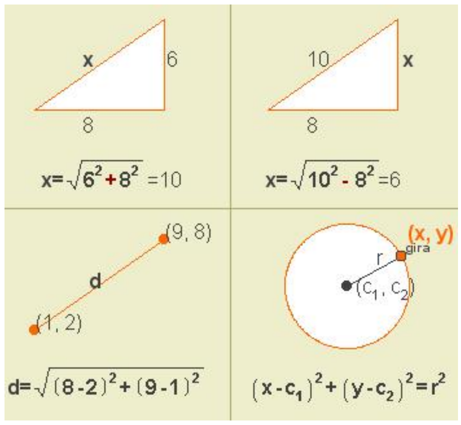
El teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo, de catetos a y b, y de hipotenusa c, se cumple que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

La imagen es una demostración gráfica del teorema.

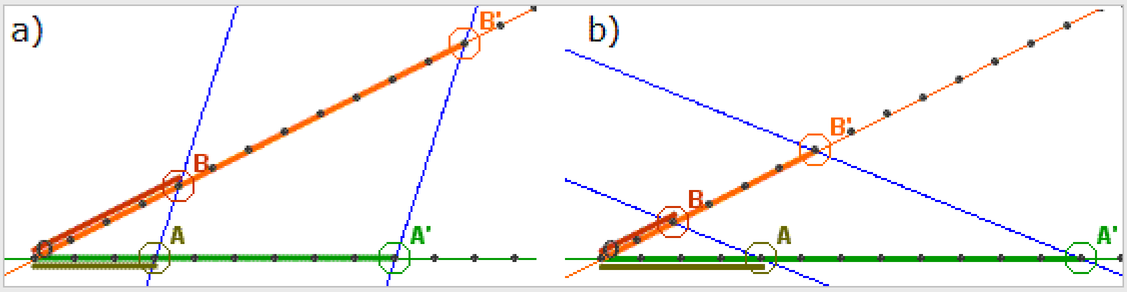


En la derecha vemos algunas aplicaciones de este teorema, utilizado calcular hipotenusas, catetos, distancias entre puntos y ecuaciones de circunferencias.



EJERCICIOS resueltos

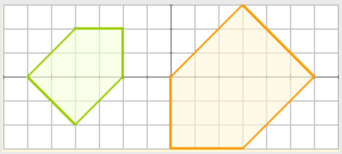
1. Halla en los casos a) y b) las proprociones $\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}$ y $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$



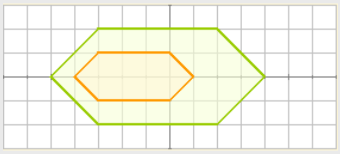
Soluciones: a) $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ y $\frac{9}{3}=\frac{12}{4}$ b) $\frac{4}{2}=\frac{12}{6}$ y $\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$

2. Contesta razonadamente:

a) ¿Son semejantes?



Sí, puesto que los lados están en proporción 2/3 y los ángulos son iguales.



No, los ángulos son iguales pero los lados no son proporcionales.

No, los ángulos no son iguales.

b) Un triángulo con un ángulo de 30º y otro de 40º ¿es forzosamente semejante a un triángulo con un ángulo de 30º y otro de 110º?

Sí, pues como los ángulos de un triángulo suman 180º, se concluye que los ángulos de los dos triángulos son iguales y por el criterio 1, son semejantes.

c) Un triángulo de lados 3, 6 y 7 cm, ¿es semejante a otro cuyos lados miden 9, 36 y 49 cm?

No, pues los lados no son proporcionales.

d) Un cuadrilátero de lados 3, 4, 5 y 6 cm ¿es necesariamente semejante a otro de lados 6, 8, 10 y 12 cm?

No, pues aunque los lados son proporcionales, en polígonos de más de tres lados esto no basta para que ocurra la semejanza, han de ser además los ángulos iguales.

e) Dos triángulos que tienen un ángulo de 20º y los lados que los forman en uno miden 6 y 15 cm, en otro, 4 y 10 cm ¿Son semejantes?

Sí, por el segundo criterio, ya que la proporción entre los lados que forman el ángulo igual es en ambos casos 2/5.

EJERCICIOS resueltos (continuación)

f) Dos polígonos regulares con el mismo número de lados, ¿son semejantes?

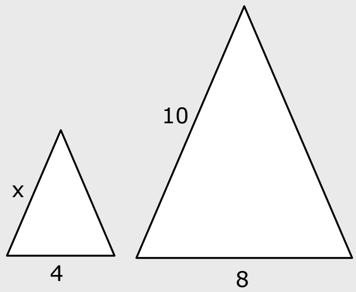
Sí, los ángulos son iguales, (nº de lados-2)180º/nº de lados, y los lados, proporcionales.

g) Los lados de dos triángulos miden 3, 6 y 7cm, en uno, y $\sqrt{18}$, $\frac{12}{\sqrt{2}}$ y $7\sqrt{2}$ en otro. ¿Son semejantes?

Sí, pues los lados son proporcionales: $\sqrt{18} = 3\cdot\sqrt{2}$; $\frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{6\cdot\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

y en triángulos basta con esta condición (criterio 3)

3. Los triángulos de la figura son semejantes, halla la medida del lado x

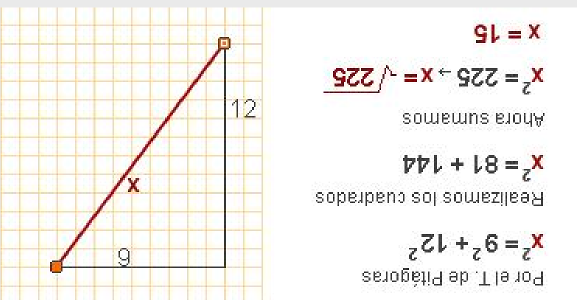


$$\frac{x}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 5$$

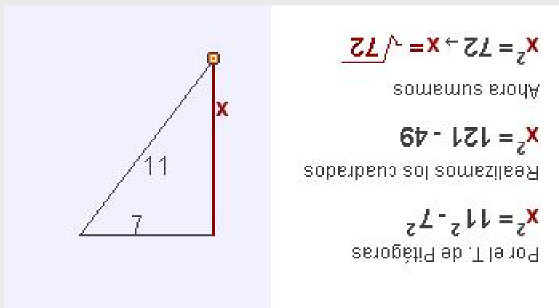
4. Halla la altura del árbol

$$\frac{x}{2{,}16} = \frac{1{,}4}{0{,}84} \quad\Rightarrow\quad x = 2{,}16\cdot\frac{1{,}4}{0{,}84} = 3{,}6$$

5. Calcula la hipotenusa en el triángulo de la figura (la solución se ve dando la vuelta a la hoja)

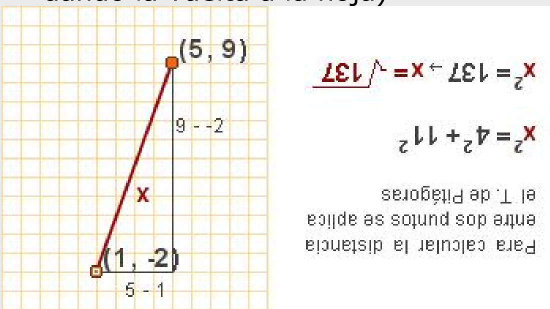


6. Calcula el cateto en el triángulo de la figura (la solución se ve dando la vuelta a la hoja)

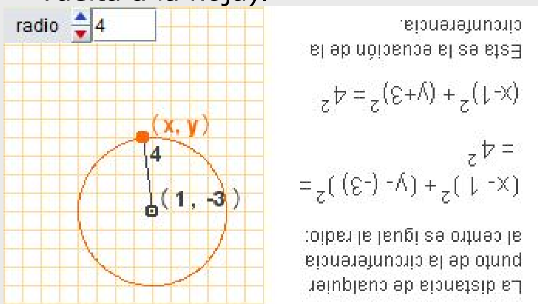


EJERCICIOS resueltos (continuación)

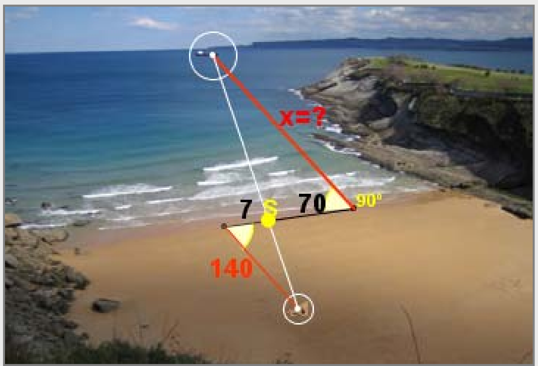
7. Calcula la distancia entre los dos puntos de la figura (la solución se ve dando la vuelta a la hoja)



8. Calcula la ecuación de la circunferencia de la figura (la solución se ve dando la vuelta a la hoja).

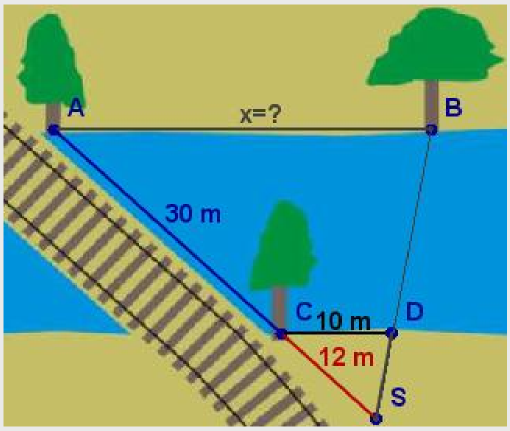


9. Para calcular la distancia desde la playa a un barco se han tomado las medidas de la figura. Calcula la distancia al barco.



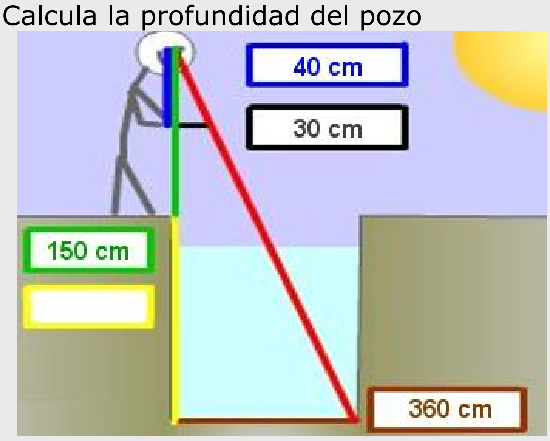
$$\frac{x}{140}=\frac{70}{7}\Rightarrow x=\frac{70\cdot 140}{7}=1400\,m$$

10. Calcula la distancia entre los árboles A y B.



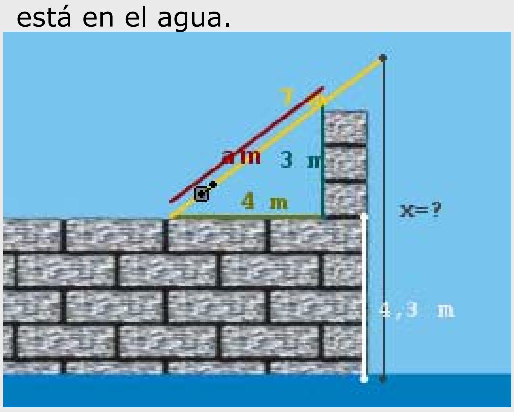
$$\frac{x}{30\,m+12\,m}=\frac{10\,m}{12\,m}\Rightarrow x=\frac{420}{12}m=35\,m$$

11. Calcula la profundidad del pozo



$$\frac{x+150}{360}=\frac{40}{30}\Rightarrow x+150=\frac{360\cdot 40}{30}\Rightarrow x=330$$

12. Halla la longitud x del sedal que no está en el agua.



Por el T. De Pitágoras a=5 y por T. de Tales

$$\frac{x-4{,}3m}{7m}=\frac{3m}{5m}\Rightarrow x-4{,}3m=\frac{21}{5}m\Rightarrow x=8{,}5m$$

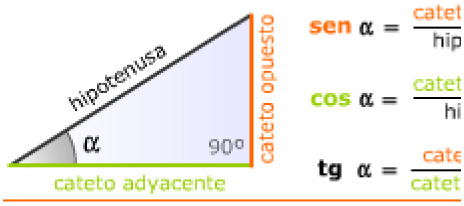
2.Razones trigonométricas

Definición

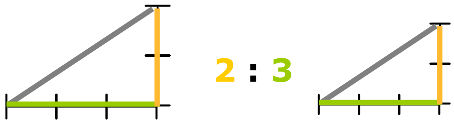
La razón o cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo determina su forma.

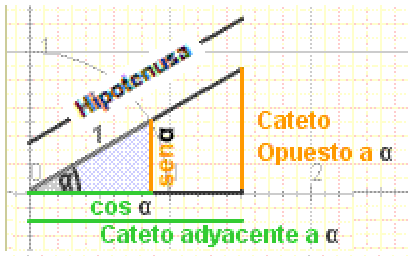
Estas razones, denominadas razones trigonométricas, se resumen en la tabla siguiente,

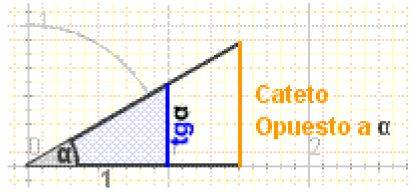
Razones trigonométricas	seno	coseno	tangente
Abreviaturas	**sen**	**cos**	**tg**



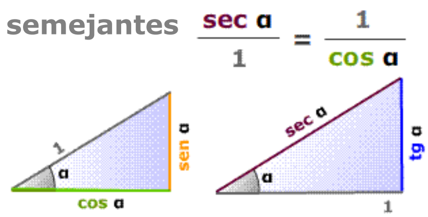
Triángulos semejantes,
misma razón=misma forma







Son importantes también las razones inversas así la razón de la hipotenusa entre el cateto adyacente se llama secante, memoriza los triángulos de la derecha que serán muy útiles para resolver triángulos más adelante

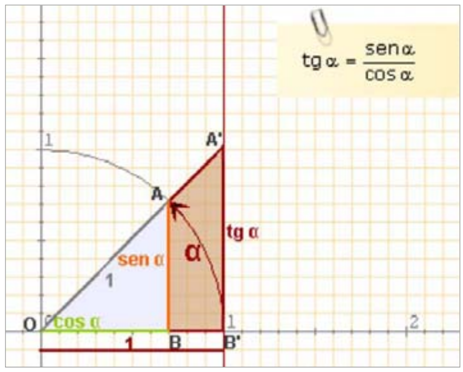


Relaciones fundamentales

Si se aplican la semejanza y el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos "básicos", es decir, con hipotenusa=1 o con cateto adyacente=1, se obtienen las relaciones fundamentales de la trigonometría:

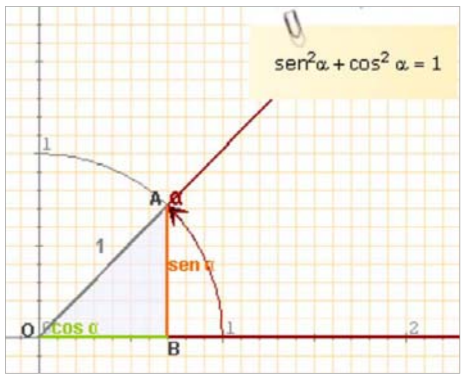
Los triángulos OBA y OB'A' son semejantes:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{tg}\alpha}{1} \quad \text{luego} \quad \boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$$



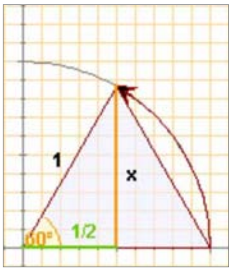
Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo OBA de la figura obtenemos:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$



En un triángulo equilátero los ángulos miden **60º**
Con el Teorema de Pitágoras se calcula la altura

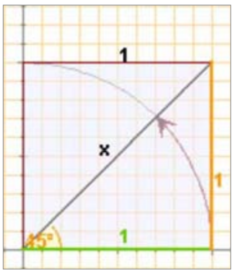
$$x=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



En un cuadrado de lado **1**

con el Teorema de Pitágoras se calcula la diagonal

$$\text{diag}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$



Razones de 30º, 45º y 60º

Los ángulos de 30º, 45º y 60º aparecen con bastante frecuencia, fíjate cómo se calculan sus razones a partir de la definición si buscamos los triángulos adecuados.

	30º	45º	60º
sen	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$

Memorizar esta tabla es fácil si observas el orden que guardan. Una vez aprendidos los senos con las raíces consecutivas, los cosenos salen en orden inverso.

Con la calculadora

- Dado un ángulo α obtener sus razones trigonométricas.

  Por ejemplo el sen 28º 30´

  Pon la calculadora en modo $\boxed{\text{DEG}}$

  Teclea 28 $\boxed{{}^{\circ}\ '\ ''}$ 30 $\boxed{{}^{\circ}\ '\ ''}$ $\boxed{\text{sin}}$

  Obtenemos: $\boxed{0{,}477158760}$

  En algunas calculadoras hay que pulsar la tecla $\boxed{\text{sin}}$ antes de introducir el ángulo, comprueba cómo funciona la tuya.

  Si queremos obtener el cosα ó la tgα procederemos de la misma forma pero pulsando las teclas $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$ respectivamente.

- Dada una razón obtener el ángulo α correspondiente.

  Con el mismo valor que tienes en la pantalla : $\boxed{0{,}477158760}$

  Comprueba que la calculadora sigue en modo $\boxed{\text{DEG}}$

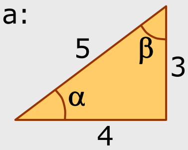
  Teclea $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sin}}$

  Obtenemos : $\boxed{28{,}5}$ en grados, si queremos grados, minutos y segundos, pulsamos $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{{}^{\circ}\ '\ ''}$ obteniendo $\boxed{28º\ 30'}$

EJERCICIOS resueltos

13. En el triángulo de la figura calcula:

a) sen α d) sen β
b) cos α e) cos β
c) tg α f) tg β



a) $\text{sen}\,\alpha=\frac{3}{5}=0{,}6$ d) $\text{sen}\,\beta=\frac{4}{5}=0{,}8$

b) $\cos\alpha=\frac{4}{5}=0{,}8$ e) $\cos\beta=\frac{3}{5}=0{,}6$

c) $\text{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}=0{,}75$ f) $\text{tg}\ \ \beta=\frac{4}{3}=1{,}\hat{3}$

14. Obtén con la calculadora:

a) sen 30º = 0,5
b) cos 60º = 0,5
c) tg 45º = 1

15. Obtén con la calculadora los ángulos α y β del ejercicio 5.

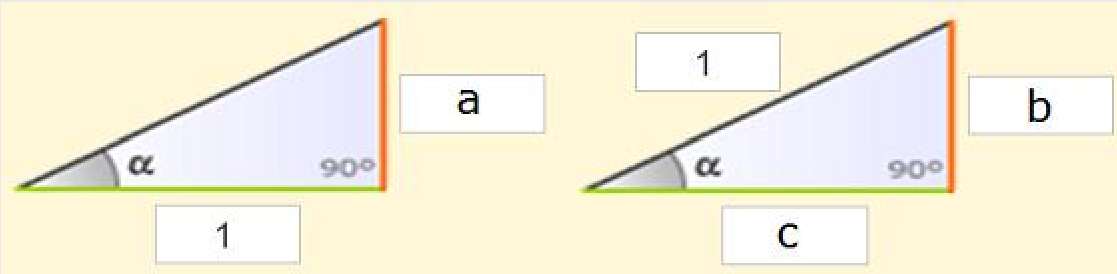
α: Tecleamos 0 $\boxed{.}$ 6 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\to$ 36,87º

β: Tecleamos 0 $\boxed{.}$ 8 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\to$ 53,13º

Observa que en efecto suman 90º.

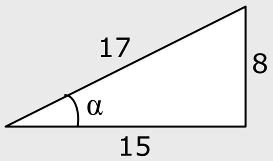
EJERCICIOS resueltos

16. Decide qué razones del ángulo α corresponden a los lados a, b y c



Solucion a=tg α b=sen α c=cos α

17. En el siguiente triángulo calcula el sen α , cos α y tg α

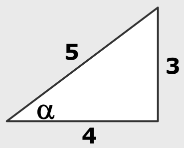


$\operatorname{sen} \alpha = 8/17$

$\cos \alpha = 15/17$

$\operatorname{tg} \alpha = 8/15$

18. Comprueba en el ángulo α del triángulo de la figura que se cumplen las relaciones fundamentales



$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1 \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \operatorname{tg}\alpha$$

19. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α tal que sen α=0,3

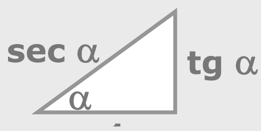
$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}3^2 = 1 - 0{,}09 = 0{,}81 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$$

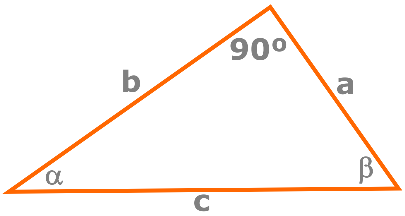
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$$

20. Comprueba que se cumple la relación: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

Recuerda el triángulo:



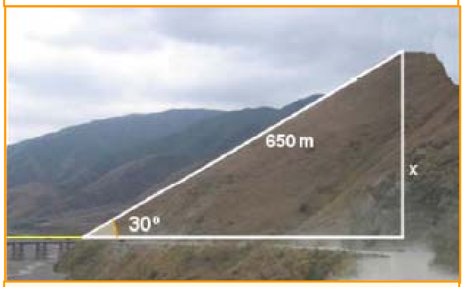


3. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es calcular los datos desconocidos, lados o ángulos, a partir de los conocidos.

Veamos los casos que se pueden presentar.

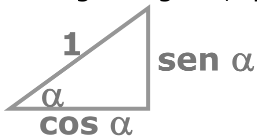
Calcular la altura del monte.



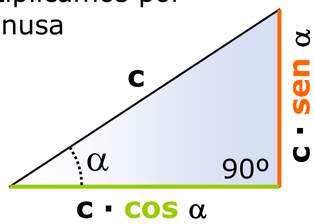
x = 650·sen 30º = 650·0,5=325

a) Conocidos un ángulo y la hipotenusa

Para hallar los catetos de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas de la **hipotenusa** y de un ángulo agudo, pensaremos en el triángulo:



que multiplicamos por la hipotenusa

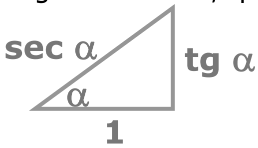


Calcular la altura de la torre.

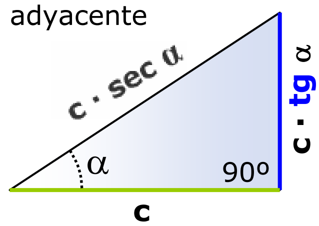
x = 20·tg 45º = 20·1=20m

b) Conocidos un ángulo y un cateto

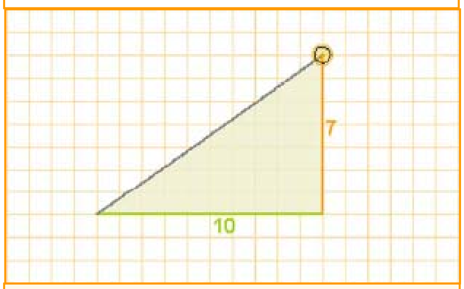
Para hallar los lados de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas un **cateto** y de un ángulo no recto, pensaremos en el triángulo:



que multiplicamos por el cateto adyacente



Resolver el triángulo.



hipotenusa = $\sqrt{7^2+10^2} = \sqrt{149}$
Con la calculadora: atan(0,7)=35º
Y el otro ángulo: 90º-35º=55º

c) Conocidos dos lados

Para hallar el otro lado del triángulo se aplicará el teorema de Pitágoras, el ángulo se determinará como

el arco cuya tangente es $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

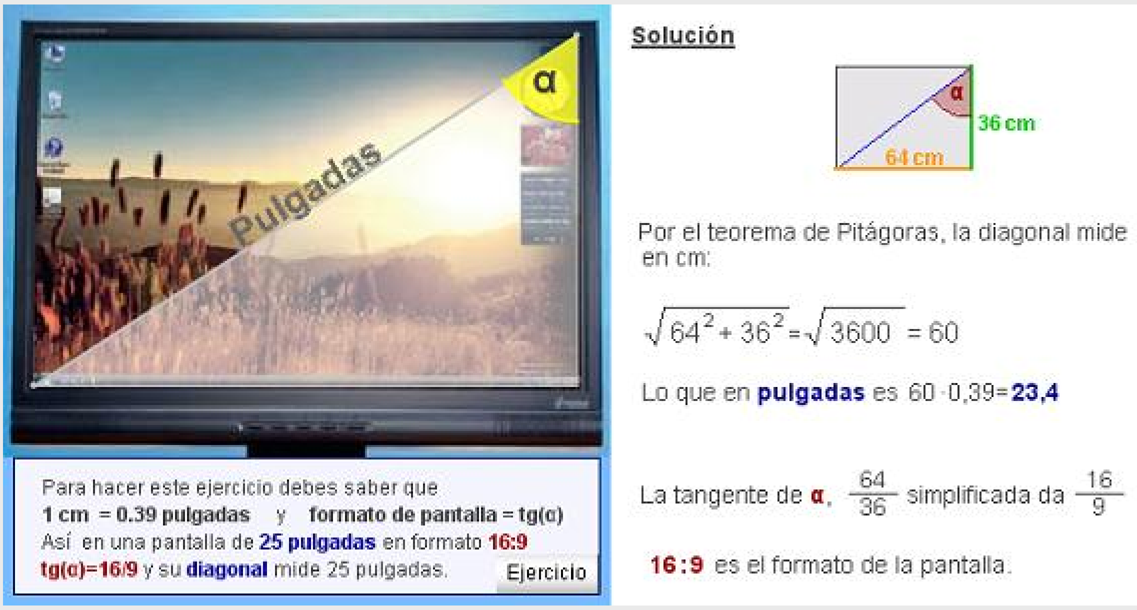
o bien como el arco cuyo seno es $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

dependiendo de los datos iniciales.

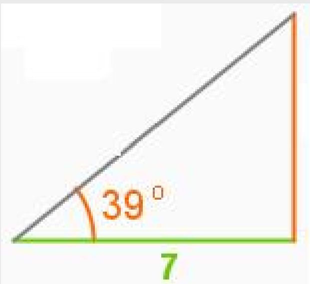
Para calcular el otro ángulo basta restar de 90º.

EJERCICIOS resueltos

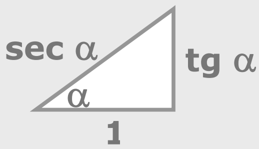
21. Calcula las pulgadas y el formato de una pantalla cuya base mide 64 cm y su altura 36 cm

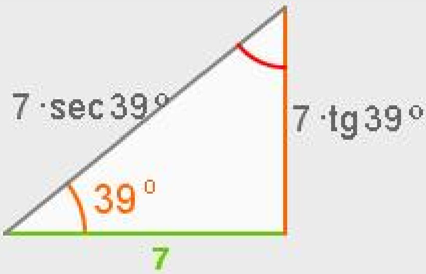


22. En el siguiente triángulo rectángulo calcula la medida de sus lados y de sus ángulos.

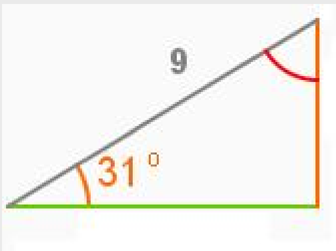


Solución: el otro ángulo es de 90º-39º=51º.
Utilizamos el triángulo básico de la tangente para calcular los otros lados

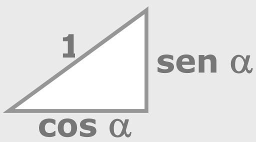


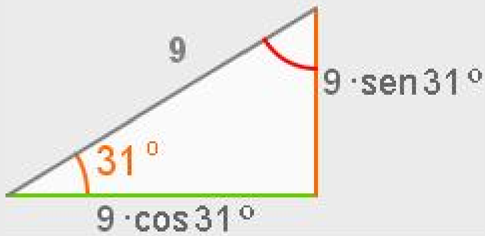


23. Resuelve el triángulo de la figura.



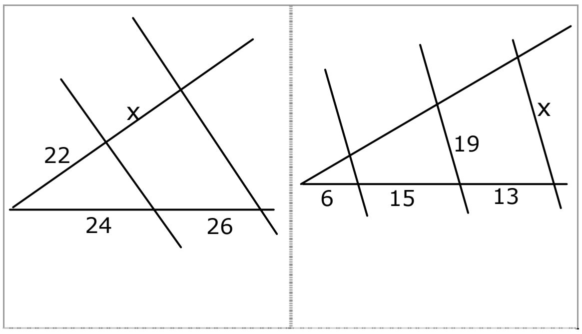
Solución: el otro ángulo es de 90º-31º=59º.
Utilizamos el triángulo básico del seno para calcular los otros lados





Para practicar

1. Halla x en cada caso



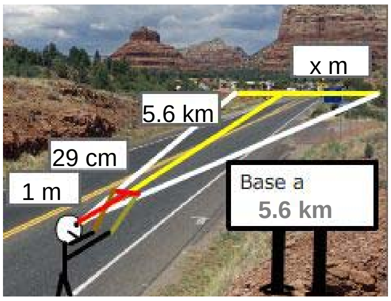
2. Las medidas de tres lados homólogos de dos cuadriláteros semejantes son:

4 cm	x cm	7 cm
20 cm	10 cm	y cm

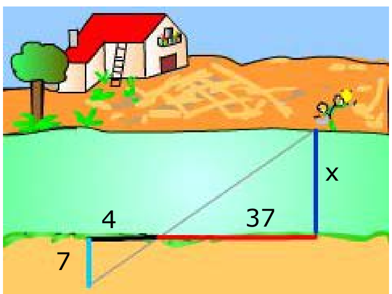
Halla x e y

3. La base de un monte se observa a una distancia de 5,6 km. Se mueve una regleta de 29 cm hasta cubrir con ella visualmente la base y en ese momento la distancia de la regleta al ojo del observador es de 1 m.

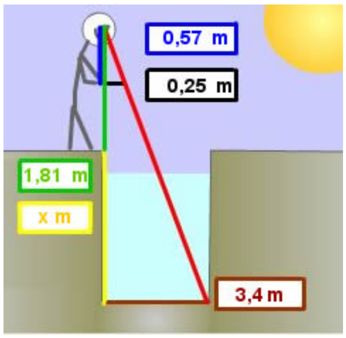
Calcula la anchura de la base del monte.



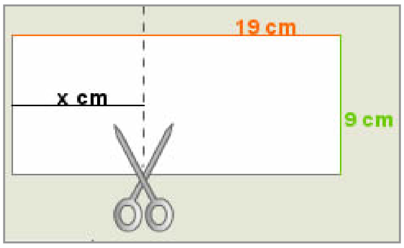
4. Calcula la anchura del río.



5. Calcula la profundidad del pozo.



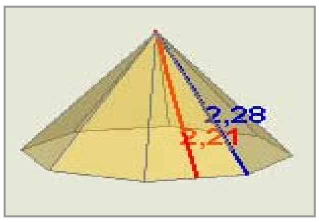
6. ¿Por dónde se ha de cortar la hoja para que el trozo de la izquierda sea semejante a la hoja entera?.



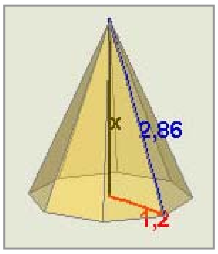
7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 69º y uno de los lados que lo forman de 9 cm. ¿Son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

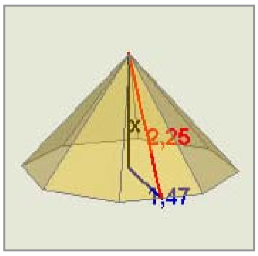
8. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 56º y el cociente de los lados que lo forman igual a 3. ¿Son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

9. Calcula el lado de la base de la pirámide.



10. Calcula la altura de la pirámide en cada caso.





11. Halla la distancia entre los puntos (-3, 4) y (5, -2).

12. Ecuación de la circunferencia de centro (0,-1) y radio 3.

13. Halla con la calculadora las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 30º b) cos 67º c) tg 45º

14. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 47º y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.

15. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo 66º. Calcula los catetos.

16. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 44º y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.

17. El cos de un ángulo agudo es 3/4, calcula el seno del ángulo.

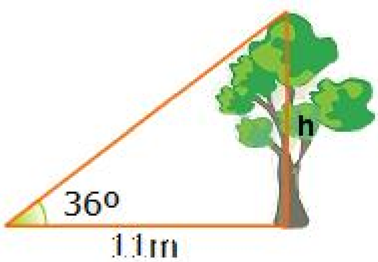
18. La tangente de un ángulo agudo es 12/5 calcula el seno.

19. El sen α = 3/5 y α es un ángulo agudo, calcula la tg α.

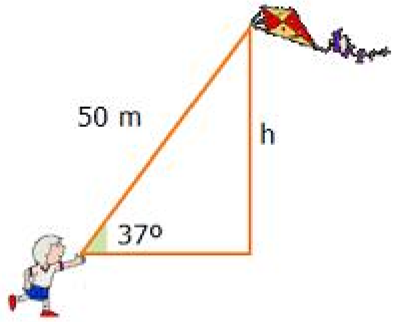
20. La apotema de un polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula el lado.

21. El lado de un exágono regular mide 30 cm, calcula la apotema.

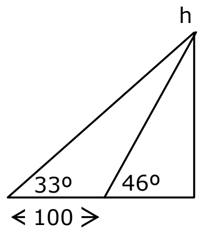
22. La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 36º, mide 11m. ¿Cuál es la altura del árbol?.



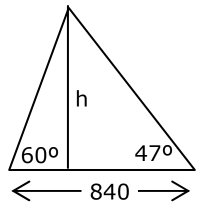
23. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37º, ¿a qué altura vuela la cometa?.



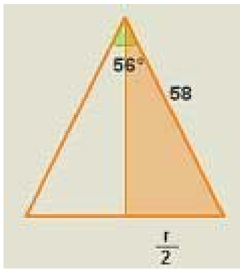
24. Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100m. ¿cuál es la altura si los ángulos son 33º y 46º?.



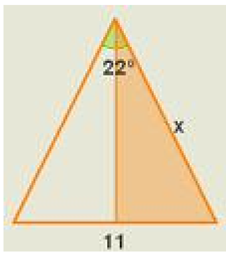
25. Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de 60º y 47º, ¿a qué altura vuela el avión?.



26. Con un compás cuyos brazos miden 58 cm, trazamos una circunferencia. Si el ángulo que forman sus brazos es 56º. Cuál es el radio de la circunferencia?

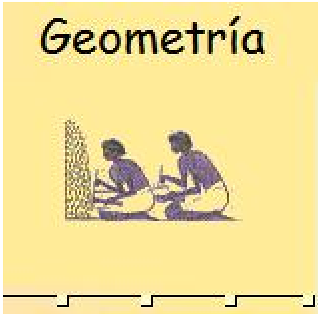


27. Con un compás trazamos una circunferencia de 11 cm de radio. Si el ángulo que forman sus brazos es de 22º. Cuál es la longitud de los brazos del compás?



Para saber más

Geometría griega



La tradición atribuye a Thales (600 años antes de nuestra era) la introducción en Grecia de la geometría egipcia.

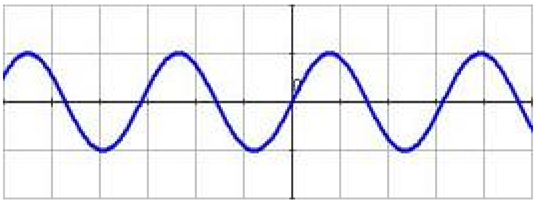
Thales fue un precursor sobre todo preocupado de problemas prácticos (cálculo de alturas de monumentos con ayuda de un bastón y de la proporcionalidad de las sombras).

La geometría griega que fue un éxito asombroso de la ciencia humana dando pruebas de un ingenio excepcional, estuvo marcada por dos Escuelas: la de Pitágoras y la de Euclides.

Ver más en:
http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/h_geom.htm

Los sonidos

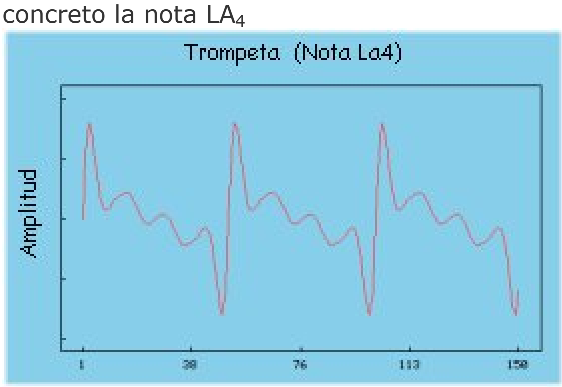
Si has utilizado algún programa de sonido probablemente habrás visto que este se representa por ondas. Las ondas son funciones treigonométricas, que representan puntos de la forma (x, senx):



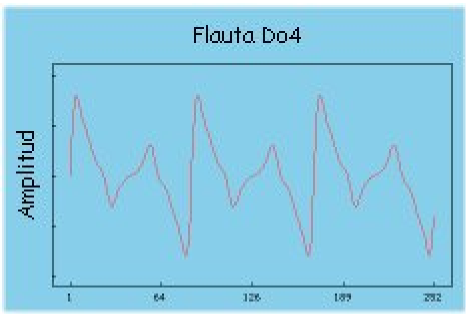
En la página interactiva "para saber más" a la que corresponde este texto puedes construir con una gráficadora diversas ondas. En esa misma página puedes encontrar un programa con el que producir distintos sonidos con una misma nota y ver su gráfica.

La forma de onda es la característica que nos permitirá distinguir una nota de la misma frecuencia e intensidad producida por instrumentos diferentes. La forma de onda viene determinada por los armónicos.

Forma de onda (o timbre) de la trompeta, en concreto la nota LA_4



Forma de onda (o timbre) de una flauta, la nota DO4

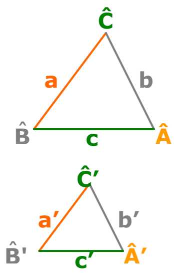


Se recomienda visitar la página http://www.xtec.es/centres/a8019411/caixa/ondas.htm

Recuerda
Lo más importante

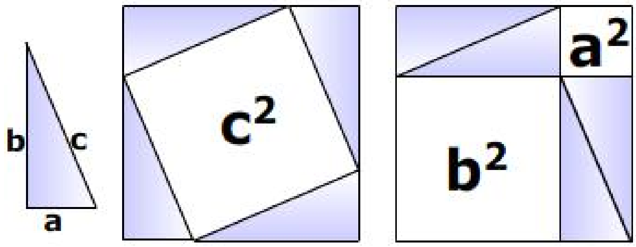
Polígonos semejantes
Si tienen y los lados proporcionales y los ángulos iguales.

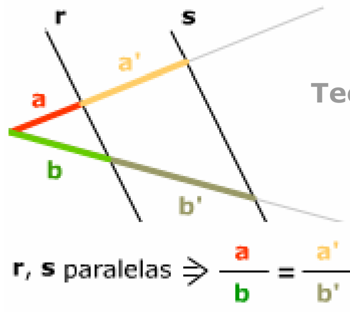
Triángulos semejantes
En el caso de los triángulos basta que se cumpla uno de los tres criterios:

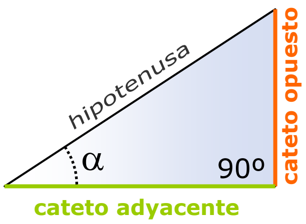


1. Ángulos iguales (con dos basta)
$\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales
$\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Lados proporcionales
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$





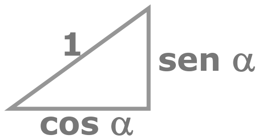


- ✓ El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- ✓ El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- ✓ La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

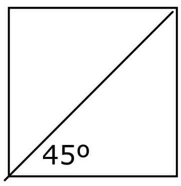
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

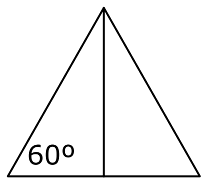
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

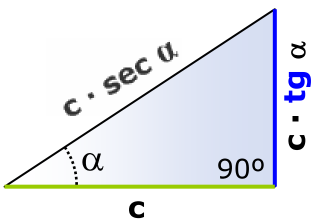
Relaciones fundamentales

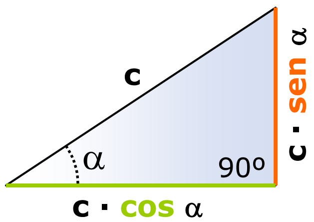


	30º	45º	60º
seno	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
coseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$



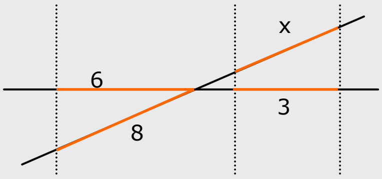




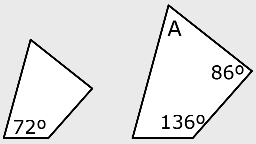


Resolver un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus seis elementos: tres lados y dos ángulos (el tercero es 90º), conocidos un lado y un ángulo o dos lados.

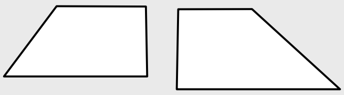
Autoevaluación



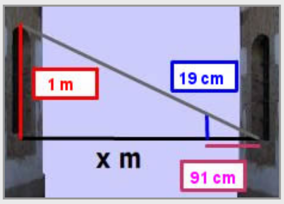
1. Aplica la semejanza para calcular el valor de x.



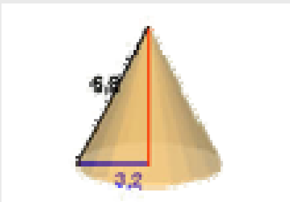
2. Sabiendo que los ángulos de un cuadrilátero suman 360º, calcula el ángulo A.



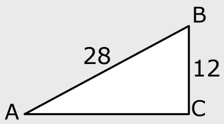
3. Los polígonos de la figura, ¿son semejantes?.



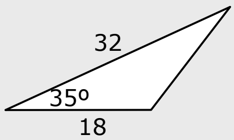
4. Como la ventana de la casa de enfrente es igual que la mía puedo saber su altura, y con la visual de una varilla calcular la anchura de la calle. Calcúlala.



5. La generatriz de un cono recto mide 6,8 cm y el radio de la base 3,2 cm. Halla la altura de un cono semejante a éste realizado a escala 1:2.

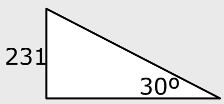


6. Calcula el valor de tg A en el triángulo ABC de la figura.



7. Calcula el área del triángulo de la figura.

8. Si $\text{sen}\ \alpha = 0,8$, y α es un ángulo agudo, calcula la tg α.

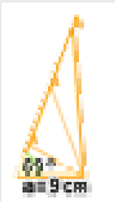


9. La altura de Torre España es de 231 m, ¿cuánto mide su sombra cuando la inclinación de los rayos del sol es de 30º?

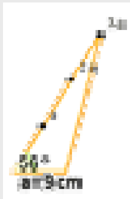
10. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 4cm.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 143/6 b) 646/21
2. x=2 y=35
3. 1624 m
4. 64,75
5. 5,94 m
6. 4,26 cm



Prob. 7



Prob.8

7. No tienen porqué ser semejantes
8. Son semejantes
9. 1,12
10. 1,70
11. 97,98 m
12. $x^2 + (y-1)^2 = 9$
13. a) 0,5 b) 0,39 c) 1
14. 10,94cm
15. 23,75 cm y 10,58 cm
16. 15,45 cm
17. 0,66
18. 12/13
19. 3/4
20. 1º,92 cm
21. 25,98 cm
22. 7,99 m
23. 30,09 m
24. 174,16 m
25. 556,34 m
26. 54,46 cm
27. 22,82 cm

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 4
2. 66º
3. No son semejantes
4. 91/19 m = 4,78 m
5. 3 cm
6. 0,47
7. 165,19 u^2
8. 4/3
9. 400,10 m
10. 6,93 cm^2

8

Problemas geométricos

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Aplicar las razones trigonométricas para estudiar las relaciones que existen entre los ángulos y los lados de las figuras planas.
- Calcular el perímetro y el área de las figuras planas aplicando las fórmulas conocidas y las razones trigonométricas cuando sea necesario.
- Aplicar las razones trigonométricas para estudiar las relaciones que existen entre las aristas y los ángulos de los cuerpos geométricos. un cono.
- Calcular el área lateral, el área total y el volumen de los cuerpos geométricos aplicando las fórmulas conocidas y las razones trigonométricas cuando sea necesario.

Antes de empezar

Para resolver las actividades de esta unidad, se necesita utilizar la calculadora. Muchas de las operaciones que se van a realizar son raíces y razones trigonométricas.

Al realizar una raíz cuadrada o al calcular una razón trigonométrica, salvo en algunos casos, se va a obtener u número irracional.

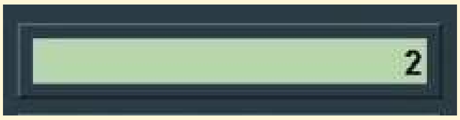
Todos los resultados están expresados con dos cifras decimales, pero si se tiene que volver a utilizar un dato, es conveniente utilizarlo con todas sus cifras decimales y no sólo con las dos con las que se ha expresado.

Observa algunos errores que se comenten al no trabajar con todas las cifras decimales.

Calcula el valor de $\sqrt{2}$

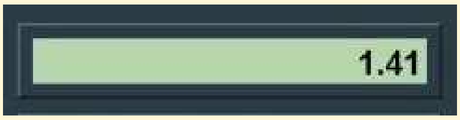
La pantalla de la calculadora se llena de cifras decimales. Es un número irracional (con infinitas cifras decimales), aunque sólo veamos unas pocas. Sin embargo la calculadora almacena el valor exacto en su memoria.

Eleva al cuadrado el resultado



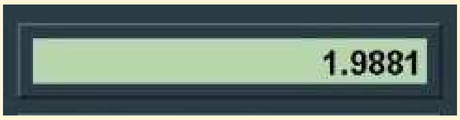
Con una de las teclas de tu calculadora puedes elevar al cuadrado el número que tienes en la pantalla. Búscala y realiza la operación. Observa que se obtiene como resultado 2, como era lógico esperar

¿Qué sucede si se redondea la raíz a dos cifras decimales?



Eleva ahora al cuadrado el número 1,41. ¿Qué se obtiene?

¡No se obtiene 2!



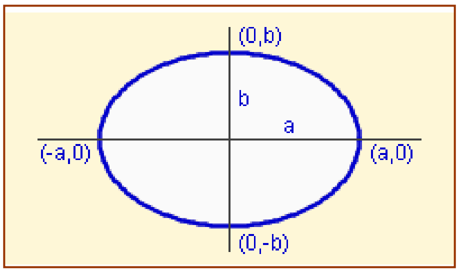
Resulta un número con cuatro cifras decimales, próximo a 2, pero distinto. Si se redondea a dos cifras decimales, se pierde exactitud en los resultados.

Prueba a realizar los mismos cálculos utilizando más cifras decimales. ¿Se obtienen resultados exactos o aproximados?

Realiza ahora cálculos similares utilizando las razones trigonométricas

Investiga: Áreas de otras figuras

¿Se puede calcular el área de figuras planas distintas a las estudiadas en este tema, por ejemplo, una elipse?



1. Figuras planas

Triángulos

La suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{\circ}$$

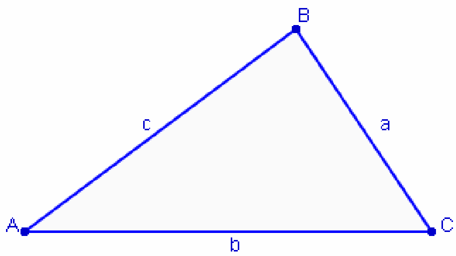


Figura 1. Triángulo.
Los vértices de un triángulo se representan con letras mayúsculas. Los lados con letras minúsculas. Un lado y un vértice opuesto llevan la misma letra.

El **perímetro** de un triángulo es la suma de las longitudes de los tres lados.

$$P=a+b+c$$

El **área** o la superficie de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$S=\frac{a\cdot h_A}{2} \qquad S=\frac{b\cdot h_B}{2} \qquad S=\frac{c\cdot h_C}{2}$$

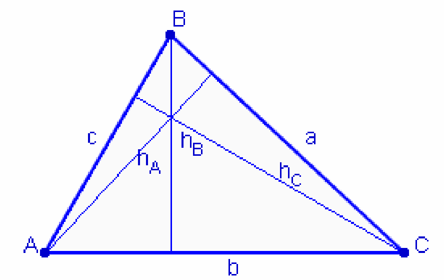


Figura 2. Alturas de un triángulo.
La altura es la línea perpendicular a cada uno de los lados que pasa por el vértice opuesto. Para el cálculo del área, la altura es la distancia de cada vértice al lado opuesto.

Si en un triángulo cualquiera se traza una altura, se forman dos triángulos rectángulos. En ellos se puede aplicar el Teorema de Pitágoras y la definición de las razones trigonométricas.

En la figura 3, en el triángulo ADB se verifica:

$$\operatorname{sen}A=\frac{h_B}{c} \Rightarrow h_B=c\cdot\operatorname{sen}A \Rightarrow S=\frac{b\cdot h_B}{2}=\frac{b\cdot c\cdot\operatorname{sen}A}{2}$$

De la misma forma, con los otros vértices, se obtiene:

$$S=\frac{a\cdot b\cdot \operatorname{sen}C}{2} \qquad S=\frac{a\cdot c\cdot \operatorname{sen}B}{2} \qquad S=\frac{b\cdot c\cdot \operatorname{sen}A}{2}$$

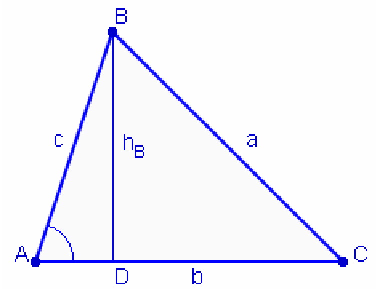


Figura 3. Altura sobre el vértice B.

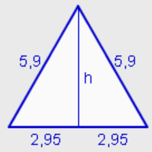
Otro método para el cálculo del área es la **fórmula de Herón**.

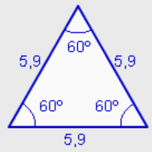
Sea $p=\frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetro del triángulo. Entonces:

$$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

EJERCICIOS resueltos

1. Calcula el área de un triángulo equilátero de 5,9 centímetros de lado.





Se aplica el Teorema de Pitágoras para calcular la altura

$$h=\sqrt{5,9^2-2,95^2}=\sqrt{26,1075}=5,11\text{ cm}$$

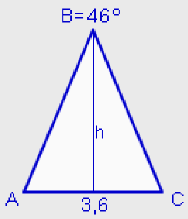
$$S=\frac{5,9\cdot 5,11}{2}=15,07\ \text{cm}^2$$

Otro método: $S=\dfrac{5,9\cdot 5,9\cdot \text{sen}\,60º}{2}=15,07\ \text{cm}^2$

Con la fórmula de Herón: $p=\dfrac{5,9+5,9+5,9}{2}=8,85$

$$S=\sqrt{8,85\cdot(8,85-5,9)\cdot(8,85-5,9)\cdot(8,85-5,9)}=15,07\ \text{cm}^2$$

2. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 3,6 cm y el ángulo distinto mide 46º. Calcula el perímetro y el área.



$$A+B+C=180º \rightarrow A+C=134º \rightarrow A=C=67º$$

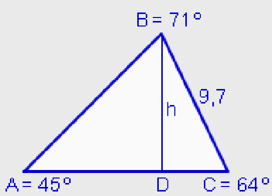
$$\cos 67º=\frac{1,8}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB}=\frac{1,8}{\cos 67º}=4,61\text{ cm}$$

$$\text{tg}\,67º=\frac{h}{1,8} \rightarrow h=1,8\cdot\text{tg}67º=4,24\text{ cm}$$

Perímetro: $P=4,61+4,61+3,6=12,81$ cm

Área: $S=\dfrac{3,6\cdot 4,24}{2}=7,63\ \text{cm}^2$

3. Los ángulos de un triángulo escaleno miden 45º, 64º y 71º y el lado menor mide 9,7 cm. Calcula el perímetro.



$$\text{sen}\,64º=\frac{h}{9,7} \rightarrow h=9,7\cdot\text{sen}\,64º=8,72\text{ cm}$$

$$\cos 64º=\frac{\overline{DC}}{9,7} \rightarrow \overline{DC}=9,7\cdot\cos 64º=4,25\text{ cm}$$

$$\text{sen}\,45º=\frac{8,72}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB}=\frac{8,72}{\text{sen}\,45º}=12,33\text{ cm}$$

$$\cos 45º=\frac{\overline{AD}}{12,33} \rightarrow \overline{AD}=12,33\cdot\cos 45º=8,72\text{ cm}$$

Perímetro: $P=9,7+12,33+4,25+8,72=35$ cm

1. Figuras planas

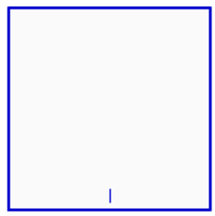
Paralelogramos

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene los lados opuestos paralelos. La suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es igual a 360º.

Hay cuatro paralelogramos: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.

El perímetro de un paralelogramo es la suma de las longitudes de los cuatro lados.

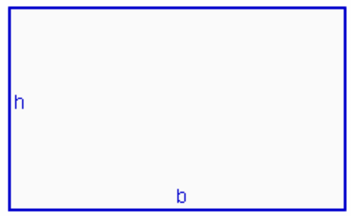
El área de cada uno de los paralelogramos es:



Cuadrado.

Cuadrado.

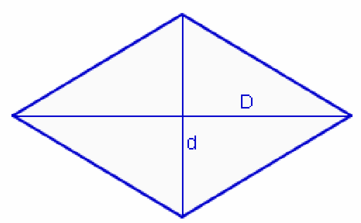
$$S = \text{lado}^2$$



Rectángulo.

Rectángulo.

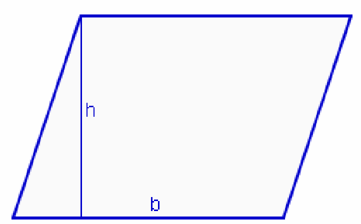
$$S = \text{base} \times \text{altura}$$



Rombo. Las diagonales dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales.

Rombo.

$$S = \frac{\text{Diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$



Romboide. Al trazar la altura se forma un triángulo rectángulo.

Romboide.

$$S = \text{base} \times \text{altura}$$

EJERCICIOS resueltos

4. a) Calcula el área de un cuadrado de 17,2 cm de lado.

b) Calcula el perímetro de un cuadrado de 5975,29 cm^2 de área.

a) $S=17{,}2^2=295{,}84\ cm^2$

b) $l=\sqrt{5975{,}29}=77{,}3\ cm \rightarrow P=4\cdot 77{,}3=309{,}2\ cm.$

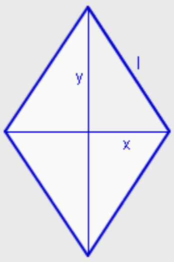
5. a) Calcula el área de un rectángulo de 45,6 cm de base y 32,5 cm de altura.

b) Calcula la base de un rectángulo de de 364,5 cm^2 de área y 24,3 cm de altura.

a) $S=45{,}6\cdot 32{,}5=1482\ cm^2$

b) $b=\frac{364{,}5}{24{,}3}=15\ cm$

6. Calcula el lado y los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12,7 y 19,6 cm.

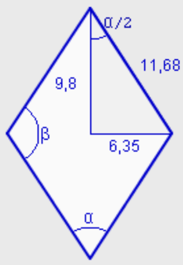


$$x=\frac{12{,}7}{2}=6{,}35\ cm \qquad y=\frac{19{,}6}{2}=9{,}8\ cm$$

$$l^2=6{,}35^2+9{,}8^2 \rightarrow l=\sqrt{136{,}36}=11{,}68\ cm$$

$$sen\frac{\alpha}{2}=\frac{6{,}35}{11{,}68}=0{,}5438 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}5749\ rad$$

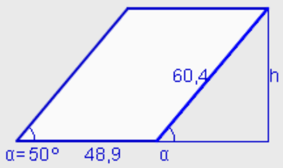
$$\alpha = 1{,}1499\ rad = 65º\ 52'\ 59{,}45''$$



$$2\alpha + 2\beta = 360º \rightarrow \beta = 180 - \alpha$$

$$\beta = 114º\ 7'\ 0{,}55''$$

7. Calcula el área del romboide de la figura sabiendo que los lados miden 60,4 y 48,9 cm y el ángulo menor que forman sus lados mide 50º.



$$sen\,\alpha=\frac{h}{60{,}4} \rightarrow h=60{,}4\cdot sen\,50º=46{,}27\ cm$$

Área: $S=48{,}9\cdot 46{,}27=2262{,}56\ cm^2$

1. Figuras planas

Trapecios

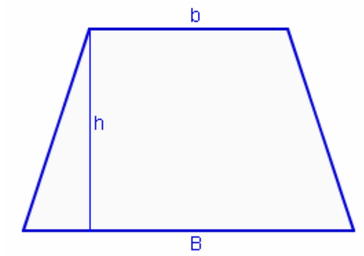
Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. La suma de los ángulos interiores de un trapecio es igual a 360º.

El perímetro de un trapecio es la suma de las longitudes de los cuatro lados.

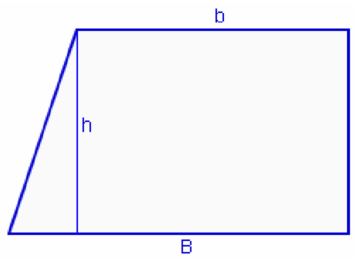
El área de un trapecio es:

$$S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

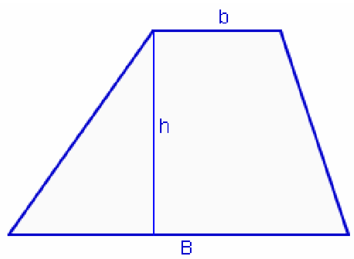
Si en un trapecio se traza la altura por cualquiera de los vértices de la base menor se forma un triángulo rectángulo. En este triángulo se puede aplicar el Teorema de Pitágoras y la definición de las razones trigonométricas.



Trapecio isósceles.



Trapecio rectángulo.



Trapecio escaleno.

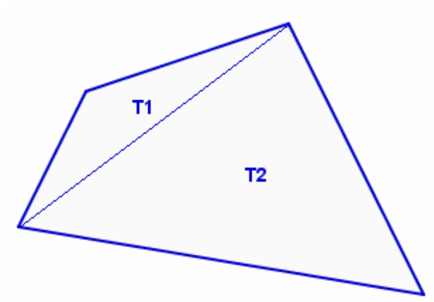
Trapezoides

Un **trapezoide** es un cuadrilátero que no tiene lados paralelos. La suma de los ángulos interiores de un trapezoide es igual a 360º.

El perímetro de un trapezoide es la suma de las longitudes de los cuatro lados.

No hay fórmula para calcular el área o la superficie de un trapezoide. Para calcular el área se traza una diagonal y se divide la figura en dos triángulos. El área es la suma de las áreas de los triángulos.

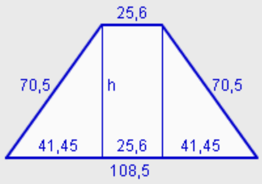
$$S = T_1 + T_2$$



Trapezoide descompuesto en dos triángulos.

EJERCICIOS resueltos

8. Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 25,6 y 108,5 y los lados no paralelos 70,5 cm.



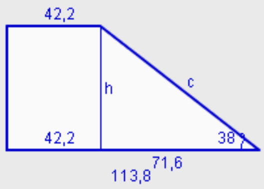
Perímetro: P=108,5+25,6+70,5+70,5=275,1 cm

$$\frac{108,5-25,6}{2}=41,45$$

$$h^2+45,41^2=70,5^2 \rightarrow h=\sqrt{3252,15}=57,03\text{ cm}$$

Área: $S=\frac{(108,5+25,6)\cdot 57,03}{2}=3823,7\text{ cm}^2$

9. Calcula el perímetro y el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 42,2 y 113,8 y el ángulo que forma el lado oblicuo con la base mayor mide 38º.



113,8-42,2=71,6 cm

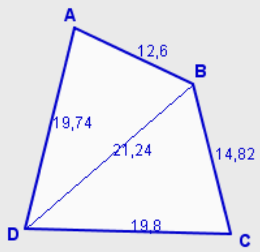
$$\text{tg}\,38º=\frac{h}{71,6} \rightarrow h=71,6\cdot\text{tg}\,38º=55,94\text{ cm}$$

$$\cos 38º=\frac{71,6}{c} \rightarrow c=\frac{71,6}{\cos 38º}=90,86\text{ cm}$$

Perímetro: P=113,8+42,2+55,94+90,86=302.8 cm

Área: $S=\frac{(113,8+42,2)\cdot 55,94}{2}=4363,32\text{ cm}^2$

10. Calcula el perímetro y el área del trapezoide con los datos que se indican: AB=12,6 cm. BC=14,82 cm. CD=19,8 cm. DA=19,74 cm. DB=21,24 cm.



Perímetro: P=12,6+14,82+19,8+19,74=66,96 cm

Área = Área del triángulo ABD + Área del triángulo BCD.

Área del triángulo ABD:

Fómula de Herón: $p=\frac{12,6+21,24+19,74}{2}=26,79$

$$S=\sqrt{26,79\cdot(26,79-12,6)\cdot(26,79-21,24)\cdot(26,79-19,74)}=121,96\ \text{cm}^2$$

Área del triángulo ABD:

Fómula de Herón: $p=\frac{14,82+19,8+21,24}{2}=27,93$

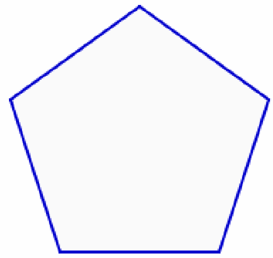
$$S=\sqrt{27,93\cdot(27,93-14,82)\cdot(27,93-19,8)\cdot(27,93-21,24)}=141,12\ \text{cm}^2$$

Área del trapezoide = 121,96+141,12=263,08 cm^2

1. Figuras planas

Polígonos regulares

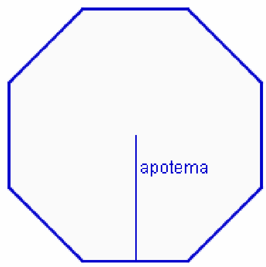
Un **polígono regular** es una figura que tiene todos los lados y todos los ángulos interiores iguales. Con tres lados sería un triángulo equilátero, con cuatro lados un cuadrado, con cinco lados un pentágono, con seis un hexágono...



Pentágono regular

El perímetro de un polígono regular es la suma de las longitudes de sus lados.

La **apotema** de un polígono regular es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cada lado.

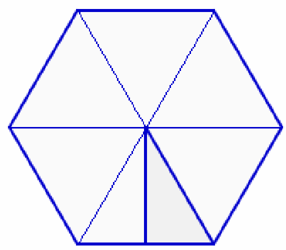


Octógono regular. Apotema

El área se obtiene como la mitad del producto del perímetro por la apotema.

$$S = \frac{P \times a}{2}$$

Un polígono regular se puede dividir en triángulos isósceles. La apotema divide a estos triángulos en dos triángulos rectángulos. La apotema coincide con la altura del triángulo.



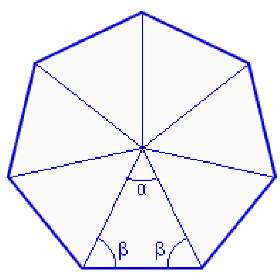
Hexágono regular

El ángulo distinto de estos triángulos isósceles se calcula dividiendo 360º entre el número de triángulos.

$$\alpha =$$

Los dos ángulos iguales se calculan sabiendo que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º.

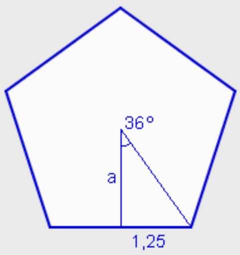
$$\alpha + 2\beta = 180^{\circ} \rightarrow \beta = \frac{180 - \alpha}{2}$$



Heptágono regular

EJERCICIOS resueltos

11. Calcula el perímetro y el área de un pentágono regular de 2,5 cm de lado.



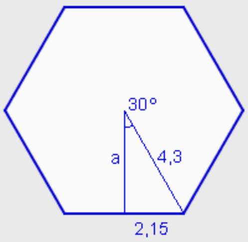
Perímetro: P=5·2,5=12,5 cm

$$\frac{360º}{5}=72º \qquad \frac{72º}{2}=36º$$

$$tg\,36º=\frac{1,25}{a} \quad \to \quad a=\frac{1,25}{tg\,36º}=1,72\,cm$$

$$\text{Área: } S=\frac{5\cdot 2,5\cdot 1,72}{2}=10,75\ cm^2$$

12. Calcula el perímetro y el área de un hexágono regular de 4,3 cm de lado.



Perímetro: P=6·4,3=25,8 cm

$$\frac{360º}{6}=60º \qquad \frac{60º}{2}=30º$$

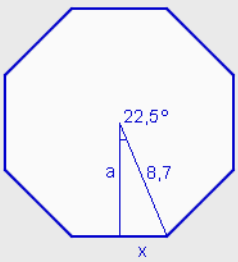
$$tg\,30º=\frac{2,15}{a} \quad \to \quad a=\frac{2,15}{tg\,30º}=3,72\,cm$$

$$\text{Área: } S=\frac{6\cdot 4,3\cdot 3,72}{2}=48,04\ cm^2$$

En el hexágono, el lado coincide con el radio de la circunferencia circunscrita. Se puede calcular la apotema utilizando el Teorema de Pitágoras.

$$a^2+2,15^2=4,3^2 \quad \to \quad a=\sqrt{13,87}=3,72\,cm$$

13. Calcula el perímetro y el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia 8,3 cm de radio.



$$\frac{360º}{8}=45º \qquad \frac{45º}{2}=22,5º$$

$$sen\,22,5º=\frac{x}{8,7} \quad \to \quad x=8,7\cdot sen\,22,5º=3,33\ cm$$

$$cos\,22,5º=\frac{a}{8,7} \quad \to \quad a=8,7\cdot cos\,22,5º=8,04\ cm$$

Lado=2·3,33=6,66 cm   Perímetro: P=8·6,66=53,27 cm

$$\text{Área: } S=\frac{8\cdot 6,66\cdot 8,04}{2}=214,08\ cm^2$$

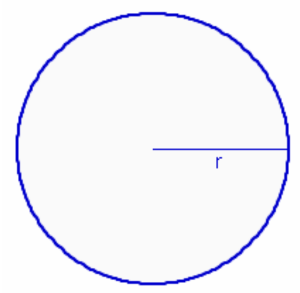
1. Figuras planas

Círculos, sectores y segmentos circulares

La longitud de la circunferencia y el área del círculo se calculan con las fórmulas:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$S = \pi \cdot r^2$$



Círculo de radio r

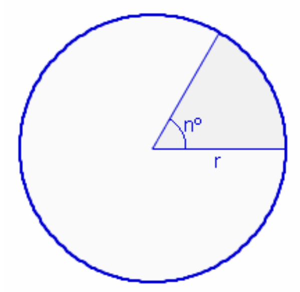
Un **sector circular** es la región del círculo limitada por dos radios. Al dividir una circunferencia en 360 partes iguales se obtienen sectores circulares de amplitud 1º. La longitud del arco y el área de un sector se obtienen dividiendo la longitud y el área total por 360 y multiplicando por el número de grados.

Longitud del arco:

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n^{o}}{360}$$

Área:

$$L = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n^{o}}{360}$$

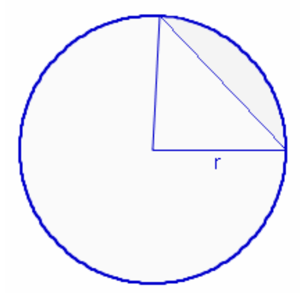


Sector circular

Un **segmento circular** es la región del círculo limitada por una cuerda. Al unir los extremos de la cuerda con el centro se obtiene un sector circular.

El perímetro de un segmento circular es igual a la suma de la longitud del arco y la longitud de la cuerda que lo determinan.

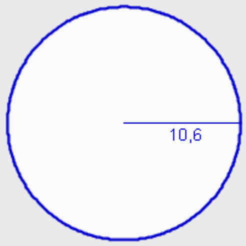
El área de un segmento circular es igual a la diferencia del área del sector circular y el área del triángulo que lo determinan.



Segmento circular

EJERCICIOS resueltos

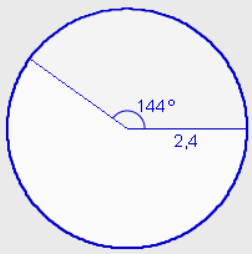
14. Calcula la longitud y el área de un círculo 10,6 cm de radio.



Longitud: $L=2\cdot\pi\cdot r=2\cdot\pi\cdot 10{,}6=66{,}6$ cm

Área: $S=\pi\cdot r^2=\pi\cdot 10{,}6^2=352{,}99$ cm^2

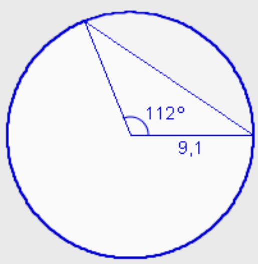
15. Calcula la longitud de arco y el área de un sector circular de 144º comprendido en un círculo de 2,4 cm de radio.

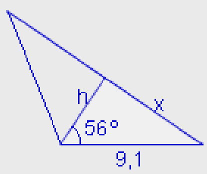


Longitud: $L=\dfrac{2\cdot\pi\cdot 2{,}4\cdot 144}{360}=6{,}03$ cm

Área: $S=\dfrac{\pi\cdot 2{,}4^2\cdot 144}{360}=7{,}24$ cm^2

16. Calcula el área de un segmento circular de un círculo de 9,1 cm, sabiendo que el ángulo que forman los radios que pasan por sus extremos mide 112º.





Área del sector: $S_1=\dfrac{\pi\cdot 9{,}1^2\cdot 112}{360}=80{,}94$ cm^2

$\text{sen}\,56º=\dfrac{x}{9{,}1}\ \rightarrow\ x=9{,}1\cdot\text{sen}\,56º=7{,}54$ cm

$\cos 56º=\dfrac{h}{9{,}1}\ \rightarrow\ h=9{,}1\cdot\cos 56º=5{,}09$ cm

Lado$=2\cdot 7{,}54=15{,}096$ cm

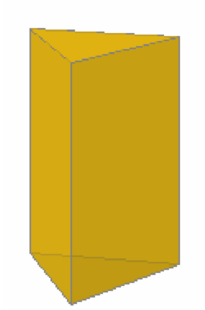
Área del triángulo: $S_2=\dfrac{15{,}09\cdot 5{,}09}{2}=38{,}39$ cm^2

Área del segmento circular: $S = 80{,}94-38{,}39=42{,}55$ cm^2

2. Cuerpos geométricos

Prismas

Un prisma es un poliedro formado por dos bases paralelas, que son dos polígonos iguales y tantas caras laterales, que son rectángulos, como lados tengan las bases.

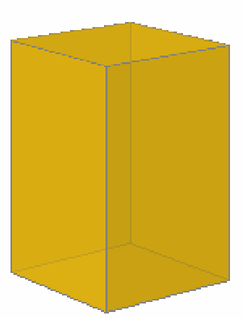


Prisma triangular

El **área** de un prisma o de cualquier poliedro, es la suma de las áreas de cada una de sus caras.

Área lateral: Suma de las áreas de las caras laterales. En el prisma las caras laterales son rectángulos.

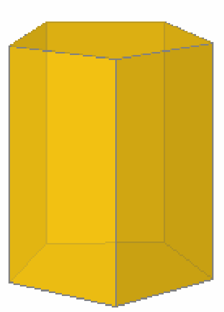
$$\mathbf{AL = n^{o}\,caras \times A_c}$$



Prisma cuadrangular

Área total: Es la suma del área lateral y el área de las dos bases. Las bases son dos polígonos iguales.

$$\mathbf{AT = AL + 2 \cdot A_b}$$

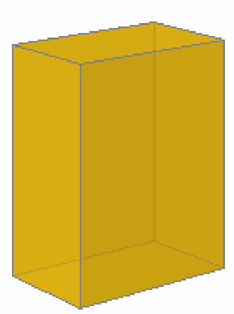


Prisma pentagonal

El **volumen** de un prisma es igual al área de la base por la altura.

$$\mathbf{V = A_b \times h}$$

Un **ortoedro** es un prisma rectangular recto, es decir un prisma cuyas dos bases son rectángulos. El volumen de un ortoedro se calcula multiplicando las tres aristas distintas.



Ortoedro

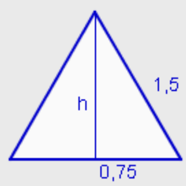
EJERCICIOS resueltos

17. Calcula el área total y el volumen de un ortoedro de 4,8 cm de alto, 2,5 cm de ancho y 7,6 cm de largo.

Área total: $AT=2\cdot4,8\cdot2,5+2\cdot4,8\cdot7,6+2\cdot2,5\cdot7,6=134,96\ cm^2$

Volumen: $V=4,8\cdot2,5\cdot7,6=91,2\ cm^3$

18. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma triangular de 7,9 cm de alto y 1,5 cm de arista de la base.



Área lateral: $AL=3\cdot1,5\cdot7,9=35,55\ cm^2$

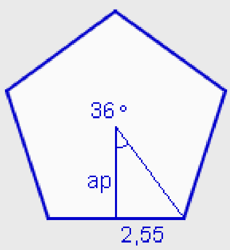
$h^2+0,75^2=1,5^2 \rightarrow h=\sqrt{1,6875}=1,3\ cm$

Área de la base: $A_b=\dfrac{1,5\cdot1,3}{2}=0,97\ cm^2$

Área total: $AT=35,55+2\cdot0,97=37,5\ cm^2$

Volumen: $V=0,97\cdot7,9=7,7\ cm^3$

19. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma pentagonal de 4,3 cm de alto y 5,1 cm de arista de la base.



Área lateral: $AL=5\cdot5,1\cdot4,3=109,65\ cm^2$

$tg\,36º=\dfrac{2,55}{ap} \rightarrow ap=\dfrac{2,55}{tg\,36º}=3,51\ cm$

Área de la base: $A_b=\dfrac{5\cdot5,1\cdot3,51}{2}=44,75\ cm^2$

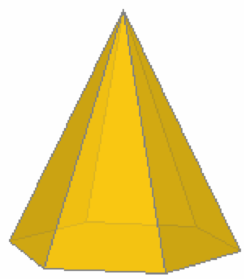
Área total: $AT=109,65+2\cdot44,75=199,15\ cm^2$

Volumen: $V=44,75\cdot4,3=192,42\ cm^3$

2. Cuerpos geométricos

Pirámides

Una pirámide es un poliedro formado por una base que es un polígono y tantas caras laterales, que son triángulos, como lados tenga la base.

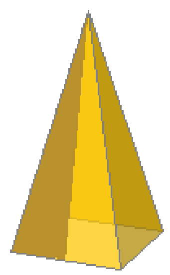


Pirámide hexagonal

El **área** de una pirámide es la suma de las áreas de cada una de sus caras.

Área lateral: Suma de las áreas de las caras laterales. En la pirámide las caras laterales son triángulos.

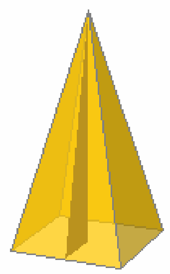
$$\mathbf{AL = n^o\,caras \times A_c}$$



El triángulo formado por una arista lateral, la altura de una cara y la mitad de la arista de la base, es un triángulo rectángulo.

Área total: Es la suma del área lateral y el área de la base. Las bases es un polígono regular o no.

$$\mathbf{AT = AL + A_b}$$

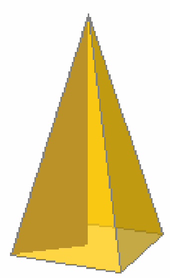


El triángulo formado por la altura de la pirámide, la altura de una cara y la apotema de la base, es un triángulo rectángulo.

El **volumen** de una pirámide es igual al área de la base por la altura dividido por tres.

$$\mathbf{V = \frac{A_b \times h}{3}}$$

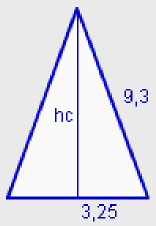
En las pirámides de la derecha se puede observar las relaciones que existen entre las aristas, la altura de una cara y la altura de la pirámide.

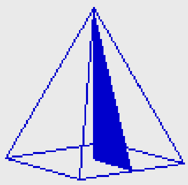


El triángulo formado por una arista lateral, la altura de la pirámide y la distancia del un vértice al centro de la base, es un triángulo rectángulo.

EJERCICIOS resueltos

20. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de una pirámide cuadrangular de 9,3 cm de arista lateral y 6,5 cm de arista de la base.





$$hc^2+3,25^2=9,3^2 \rightarrow hc=\sqrt{75,9275}=8,71 \text{ cm}$$

$$\text{Área de una cara: } A_c=\frac{6,5\cdot 8,71}{2}=28,32 \text{ cm}^2$$

Área lateral: $4\cdot 28,32=113,28 \text{ cm}^2$

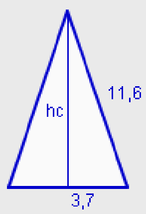
Área de la base: $A_b=6,5^2=42,25 \text{ cm}^2$

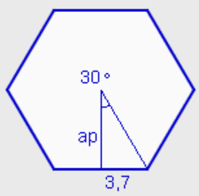
Área total: $AT=113,28+42,25=155,53 \text{ cm}^2$

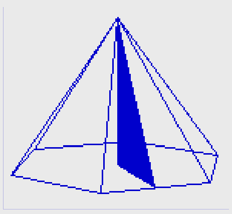
$$h^2+3,25^2=8,71^2 \rightarrow h=\sqrt{65,365}=8,08 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen: } V=\frac{42,25\cdot 8,08}{3}=113,86 \text{ cm}^3$$

21. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de una pirámide hexagonal de 11,6 cm de arista lateral y 7,4 cm de arista de la base.







$$hc^2+3,7^2=11,6^2 \rightarrow h=\sqrt{120,987}=10,99 \text{ cm}$$

$$\text{Área de una cara: } A_c=\frac{7,4\cdot 10,99}{2}=40,68 \text{ cm}^2$$

Área lateral: $6\cdot 40,68=244,07 \text{ cm}^2$

$$tg\,30º=\frac{3,7}{ap} \rightarrow ap=\frac{3,7}{tg\,30º}=6,41 \text{ cm}$$

$$\text{Área de la base: } A_b=\frac{6\cdot 7,4\cdot 6,41}{2}=142,27 \text{ cm}^2$$

Área total: $AT=244,07+142,27=386,34 \text{ cm}^2$

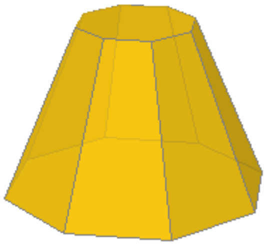
$$h^2+6,41^2=10,99^2 \rightarrow h=\sqrt{79,8}=8,93 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen: } V=\frac{142,27\cdot 8,93}{3}=423,64 \text{ cm}^3$$

2. Cuerpos geométricos

Troncos de pirámides

Al cortar una pirámide por un plano paralelo a su base se obtienen dos cuerpos geométricos. Uno es una pirámide más pequeña que la inicial. Al oro cuerpo geométrico se le conoce como **tronco de pirámide**.



Tronco de pirámide octogonal. Las caras laterales de un tronco de pirámide son trapecios isósceles.

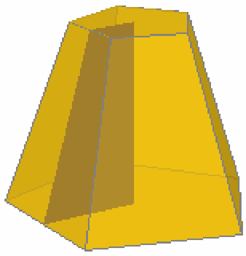
El **área** de un tronco de pirámide es la suma de las áreas de cada una de sus caras.

Área lateral: Suma de las áreas de las caras laterales. En el tronco de pirámide las caras laterales son trapecios.

$$AL = n^o \text{ caras} \times A_c$$

Área total: Es la suma del área lateral y el área de las bases. Las bases son dos polígonos regulares o no.

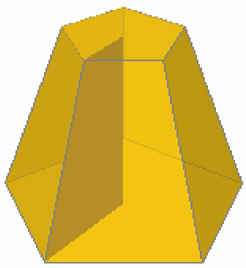
$$AT = AL + 2 \cdot A_b$$



La altura del tronco de pirámide, la altura de una cara y las apotemas de las dos bases forman un trapecio rectángulo.

El **volumen** de un tronco de pirámide se puede obtener como la diferencia entre el volumen de las dos pirámides de las que se obtiene. También se puede calcular con la fórmula:

$$V = \frac{h \cdot (Ab + AB + \sqrt{Ab \cdot AB})}{3}$$

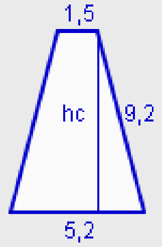


La altura del tronco de pirámide, la arista lateral y los segmentos que unen un vértice de cada base con su centro forman un trapecio rectángulo.

En los troncos de pirámides de la derecha se puede observar las figuras planas que se obtienen con los elementos de las bases y las caras laterales.

EJERCICIOS resueltos

22. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de pirámide decagonal de 1,5 cm de lado de la base menor, 5,2 cm de lado de la base mayor y 9,2 cm de arista lateral.

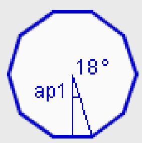


$$\frac{5,2-1,5}{2}=1,85$$

$$hc^2+1,85^2=9,2^2 \;\rightarrow\; hc=\sqrt{81,2175}=9,01 \text{ cm}$$

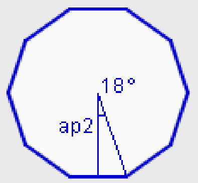
$$\text{Área de una cara: } A_c=\frac{(5,2+1,5)\cdot 9,01}{2}=30,19 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral: } 10\cdot 30,19=301,91 \text{ cm}^2$$



$$tg\,18^o=\frac{0,75}{ap1} \;\rightarrow\; ap1=\frac{0,75}{tg\,18^o}=2,31\text{ cm}$$

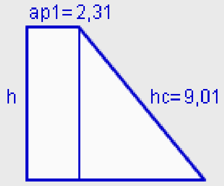
$$\text{Área de la base menor: } A_b=\frac{10\cdot 1,5\cdot 2,31}{2}=17,31 \text{ cm}^2$$



$$tg\,18^o=\frac{2,6}{ap2} \;\rightarrow\; ap2=\frac{2,6}{tg\,18^o}=8\text{ cm}$$

$$\text{Área de la base mayor: } A_B=\frac{10\cdot 5,2\cdot 8}{2}=208,05 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total: } AT=301,91+17,1+208,05=527,27 \text{ cm}^2$$



$$8-2,31=6,69$$

$$h^2+5,69^2=9,01^2 \;\rightarrow\; h=\sqrt{48,8}=6,99 \text{ cm}$$

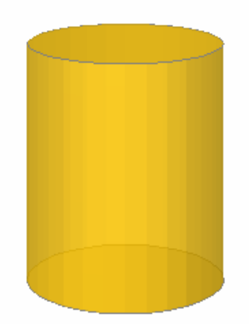
Volumen:

$$V=\frac{6,99\cdot(17,31+208,05+\sqrt{17,31\cdot 208,05})}{3}=664,52 \text{ cm}^3$$

2. Cuerpos geométricos

Cilindros

El desarrollo de un cilindro está formado por los dos círculos de las bases y un rectángulo de base, la longitud de la circunferencia y de altura, la altura del cilindro.



Cilindro

Área lateral: Área del rectángulo que se obtiene en su desarrollo.

$$AL = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Área total: Es la suma del área lateral y el área de las dos bases. Las bases son dos círculos iguales.

$$AT = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

El **volumen** de un cilindro es igual al área de la base por la altura.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

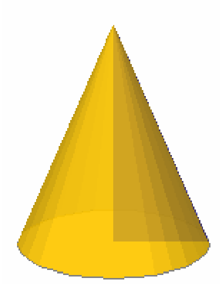
Conos

Cono

El desarrollo de un cono está formado por el círculo de la base y un sector circular cuya longitud de arco es igual a la longitud de la circunferencia y cuyo radio es igual a la generatriz del cono.

Área lateral: Área del sector circular que se obtiene en su desarrollo.

$$AL = \pi \cdot r \cdot g$$



La altura del cono, el radio de la base y la generatriz forman un triángulo rectángulo

Área total: Es la suma del área lateral y el área del círculo de la base.

$$AT = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

El **volumen** de un cono es igual al área de la base por la altura dividido por tres.

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

EJERCICIOS resueltos

23. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro de 8,1 cm de alto y 2,4 cm de radio de la base.

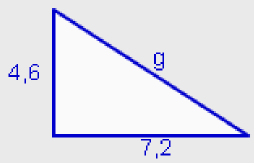
Área lateral: $AL=2\cdot\pi\cdot 2,4\cdot 8,1=122,15\ cm^2$

Área de la base: $Ab=\pi\cdot 2,4^2=18,1\ cm^2$

Área total: $AT=2\cdot\pi\cdot 2,4\cdot 8,1+2\cdot 18,1=158,34\ cm^2$

Volumen: $V=\pi\cdot 2,4^2\cdot 8,1=146,57\ cm^3$

24. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un cono de 4,6 cm de alto y 7,2 cm de radio de la base. Calcula el ángulo que forma la generatriz con el radio.



$$4,6^2+7,2^2=g^2 \rightarrow g=\sqrt{73}=8,54\ cm$$

Área lateral: $AL=\pi\cdot 7,2\cdot 8,54=193,26\ cm^2$

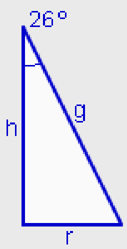
Área de la base: $Ab=\pi\cdot 7,2^2=162,86\ cm^2$

Área total: $AT=193,26+162,86=356,12\ cm^2$

Volumen: $V=\dfrac{\pi\cdot 7,2^2\cdot 4,6}{3}=249,72\ cm^3$

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{4,6}{7,2}=0,6389 \rightarrow \alpha=32^{\circ}\,34'\,26,61''$$

25. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un cono de 7,5 cm de generatriz sabiendo que el ángulo que forman la altura y la generatriz mide 26º.



$$\text{sen}\,26^{\circ}=\frac{r}{7,5} \rightarrow r=7,5\cdot\text{sen}\,26^{\circ}=3,29\ cm$$

$$\cos 26^{\circ}=\frac{h}{7,5} \rightarrow h=7,5\cdot\cos 26^{\circ}=6,74\ cm$$

Área lateral: $AL=\pi\cdot 3,29\cdot 7,5=77,47\ cm^2$

Área de la base: $Ab=\pi\cdot 3,29^2=33,96\ cm^2$

Área total: $AT=77,47+33,96=111,43\ cm^2$

Volumen: $V=\dfrac{\pi\cdot 3,29^2\cdot 6,74}{3}=76,31\ cm^3$

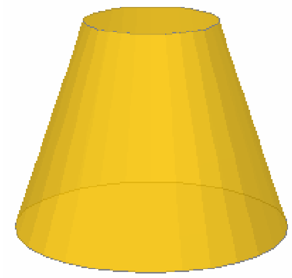
2. Cuerpos geométricos

Troncos de conos

El desarrollo de un tronco de cono está formado por los círculos de las bases y un trapecio circular.

Área lateral: Área del trapecio circular que se obtiene en su desarrollo.

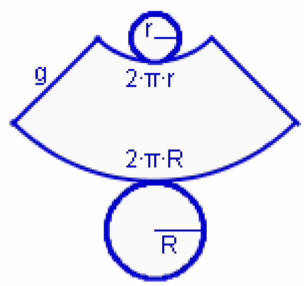
$$AL = \pi \cdot g \cdot (R + r)$$



Tronco de cono

Área total: Es la suma del área lateral y el área de los círculos de las bases.

$$AT = \pi \cdot g \cdot (R + r) + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$



Desarrollo de un tronco de cono

El **volumen** de un tronco de cono es:

$$V = \frac{\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$$

La altura del tronco de cono, la generatriz y el segmento que tiene como longitud la diferencia de los radios de las dos bases forman un triángulo rectángulo.

Esferas

Una esfera no se puede cortar y desarrollar en figuras planas.

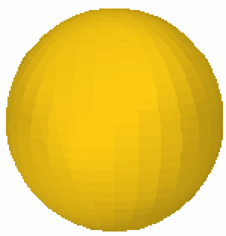
Las fórmulas para el cálculo del área y del volumen de la esfera son:

Área:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Volumen:

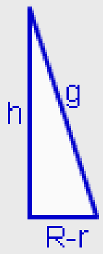
$$A = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



Esfera

EJERCICIOS resueltos

26. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de cono de 6,6 cm de altura, 2,2 cm de radio de la base menor y 4,3 cm de radio de la base mayor.



$$6,6^2+2,1^2=g^2 \quad \rightarrow \quad g=\sqrt{47,97}=6,93 \text{ cm}$$

Área lateral: $AL=\pi\cdot 6,93\cdot(2,2+4,3)=141,43 \text{ cm}^2$

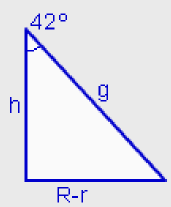
Área de la base menor: $Ab=\pi\cdot 2,2^2=15,21 \text{ cm}^2$

Área de la base mayor: $AB=\pi\cdot 4,3^2=58,09 \text{ cm}^2$

Área total: $AT=141,43+15,21+58,09=214,73 \text{ cm}^2$

Volumen: $V=\dfrac{\pi\cdot 6,93\cdot(2,2^2+4,3^2+2,2\cdot 4,3)}{3}=226,63 \text{ cm}^3$

27. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de cono de 6,4 cm de radio de la base menor y 12,6 cm de radio de la base mayor, sabiendo además que la generatriz y la altura forman un ángulo de 42º.



$$\text{tg}\, 42º=\frac{12,6-6,4}{h} \quad \rightarrow \quad h=\frac{6,2}{\text{tg}\, 42º}=6,89 \text{ cm}$$

$$\text{sen}\, 42º=\frac{12,6-6,4}{g} \quad \rightarrow \quad g=\frac{6,2}{\text{sen}\, 42º}=9,27 \text{ cm}$$

Área lateral: $AL=\pi\cdot 9,27\cdot(6,4+12,6)=553,08 \text{ cm}^2$

Área de la base menor: $Ab=\pi\cdot 6,4^2=128,68 \text{ cm}^2$

Área de la base mayor: $AB=\pi\cdot 12,6^2=498,76 \text{ cm}^2$

Área total: $AT=553,08+128,68+498,76=1180,51 \text{ cm}^2$

Volumen: $V=\dfrac{\pi\cdot 6,89\cdot(6,4^2+12,6^2+6,4\cdot 12,6)}{3}=2021,62 \text{ cm}^3$

28. Calcular el área y el volumen de una esfera de 5,6 cm de radio.

Área: $A=4\cdot\pi\cdot 5,6^2= 394,08 \text{ cm}^2$

Volumen: $V=\dfrac{4\cdot\pi\cdot 5,6^3}{3}=735,62 \text{ cm}^2$

29. Calcular el radio de una esfera cuyo volumen es de 3261,76 cm^3.

$$V=\frac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3}=3261,76 \quad \rightarrow \quad r^3=\frac{3\cdot 3261,76}{4\cdot\pi}=778,69 \quad \rightarrow \quad r=\sqrt[3]{778,69}=9,2 \text{ cm}$$

Para practicar

1. La señal de tráfico "STOP" tiene forma de octógono y una altura de 600 mm. Calcula el perímetro y el área.

2. ¿Qué polígonos regulares permiten recubrir el plano sin dejar huecos? Si todos ellos tienen perímetro 8,4 cm, ¿cuál de ellos tiene la mayor superficie?

3. Una cabra está atada a una esquina de una caseta cuadrada de 4,2 cm de lado con una cuerda de 7,7 m de longitud. Calcular el área de la región en la que puede moverse la cabra para pastar.

4. Un hotel tiene 64 habitaciones. Cada una de ellas tiene dos ventanas con forma de rombo. El lado mide 1,3 m y el ángulo superior mide 40º. Van a colocar vidrieras en cada ventana, que tendrán que cortar de placas rectangulares. ¿Qué cantidad de cristal se necesita comprar?

5. La entrada a una fortaleza tiene forma de trapecio isósceles. La base mayor mide 14,7, la base menor 10,3 m y los laterales 8 m. ¿Qué ángulo forman los laterales con la base inferior?

6. Las dimensiones de un tetrabrik son 16,3 cm de alto, 9,6 cm de largo y 6,3 cm de ancho. ¿Cuál es su capacidad? ¿Qué cantidad de material se necesita para su construcción?

7. Una lata de conservas cilíndrica tiene 8,3 cm de altura y 6,5cm de radio de la base. ¿Cuál es su capacidad? ¿Qué cantidad de material se necesita para su construcción? ¿Qué cantidad de papel se necesita para la etiqueta?

8. Un lápiz tiene forma de prisma hexagonal y tiene en su interior una mina de forma cilíndrica. Si el lápiz tiene 18 mm de largo y 4 mm de lado de la base y la mina tiene 3 mm de ancho, ¿cuál es el volumen de la parte del lápiz que no está ocupado por la mina?

9. El tetraedro es un poliedro regular formado por cuatro triángulos equiláteros. Es también una pirámide triangular. Calcula el área total y el volumen de un tetraedro de 1 cm de arista.

10. Las farolas de una ciudad tienen la forma de la imagen. Los cristales de la parte superior tienen 26,7 cm de arista superior, 30,7 cm de arista inferior y 15,4 cm de arista lateral. Los cristales de la parte inferior tienen 30,7 cm de arista superior, 21 cm de arista inferior y 37,2 cm de arista lateral. ¿Qué cantidad de cristal tiene cada farola?

11. Una cofradía tiene que fabricar caperuzas para su desfile de Semana Santa, de 103 cm de alto y 11,2 cm de radio de la circunferencia. ¿Qué cantidad de cartón necesita para cada uno?

12. En una heladería, una tarrina de helado de 7,5 cm de diámetro superior, 6,5 cm de diámetro inferior y 3,6 cm de altura se vende por 1,9 euros. ¿Cuál será el precio de otra tarrina de 9,5 cm de diámetro superior, 8,1 cm de diámetro inferior y 4,8 cm de altura?

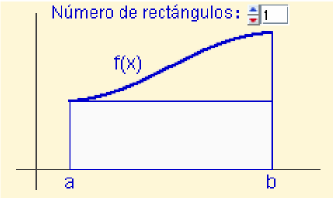
13. Sabiendo que el radio de la Tierra es de 6370 km, calcula la superficie y el volumen de nuestro planeta utilizando distintas aproximaciones del número π.

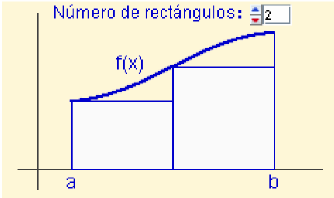
    a) 3 b) 3,14 c) 3,1416 d) π

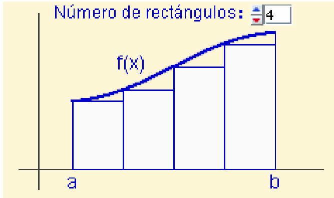
Para saber más

Área encerrada por una curva.

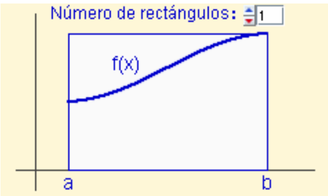
Para calcular el área encerrada por una curva se puede aproximar el área por una sucesión de rectángulos más pequeños.

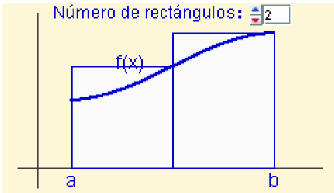


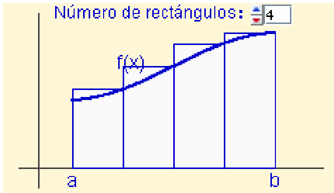




También se puede aproximar el área por una sucesión de rectángulos más grandes







El área obtenida por ambas sucesiones coincide y se llama **integral definida** de la función f(x) entre a y b. Se representa por: $\int_a^b f(x)dx$.

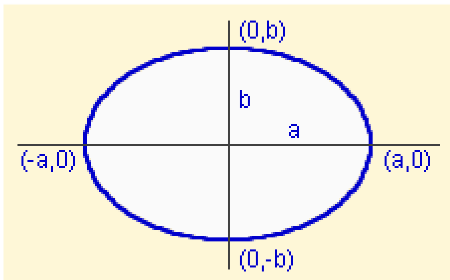
Área y perímetro de la elipse.

Aplicando el procedimiento anterior, se puede deducir la fórmula del área de la elipse, muy similar a la del círculo:

$$\mathbf{A = \pi \cdot a \cdot b}$$

Sin embargo, no hay fórmula para la longitud de la elipse, sólo distintas aproximaciones. Una de ellas es:

$$L \approx \pi \cdot \left[3(a+b) - \sqrt{(a+3b)\cdot(3a+b)}\right]$$

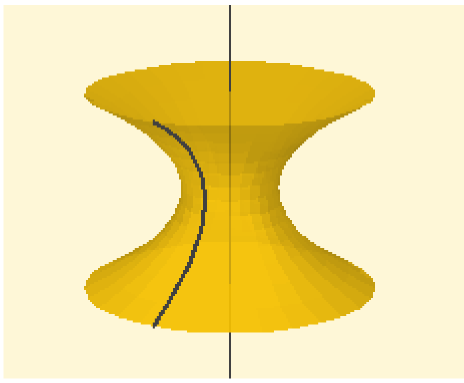


Área y perímetro de la elipse.

Al girar una curva plana alrededor de un eje contenido en un mismo plano, se obtiene una **superficie de revolución**.

Si se gira una superficie plana alrededor de un eje contenido en un mismo plano, se obtiene un **cuerpo de revolución**.

Para calcular la superficie o el volumen de superficies y cuerpos de revolución también se aplican procedimientos de integración, que se estudian en cursos superiores.



Recuerda lo más importante

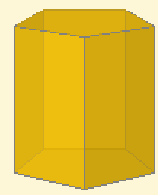
ÁREAS DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Área lateral: suma de las áreas de todas las caras laterales de un cuerpo geométrico.

Área total: suma del área lateral y del área de las bases de un cuerpo geométrico.

Volumen: es la medida del espacio que ocupa un cuerpo geométrico.

PRISMA

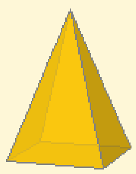


Al = nº caras · área del rectángulo

At = Al + 2 · área del polígono regular

V=área de la base · altura

PIRÁMIDE

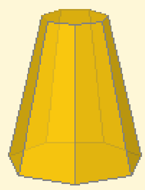


Al = nº caras · área del triángulo

At = Al + área del polígono regular

$$V = \frac{A\ base \cdot altura}{3}$$

TRONCO DE PIRÁMIDE

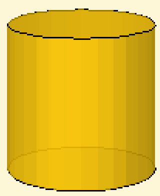


Al = nº caras · área del trapecio

At = Al + área de polígonos regulares

$$V = \frac{h\cdot(Ab + AB + \sqrt{Ab\cdot AB})}{3}$$

CILINDRO

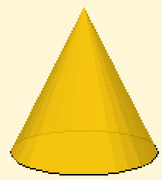


$$Al = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$$

$$At = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h + 2\cdot\pi\cdot r^2$$

$$V = \pi\cdot r^2\cdot h$$

CONO



$$Al = \pi\cdot r\cdot g$$

$$At = \pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2$$

$$V = \frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3}$$

TRONCO DE CONO

$$Al = \pi\cdot g\cdot(R+r)$$

$$At = \pi\cdot g\cdot(R+r) + \pi\cdot R^2 + \pi\cdot r^2$$

$$V = \frac{\pi\cdot h\cdot(R^2 + r^2 + R\cdot r)}{3}$$

ESFERA

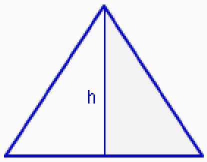
$$A = 4\cdot\pi\cdot r^2$$

$$V = \frac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3}$$

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE FIGURAS PLANAS Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

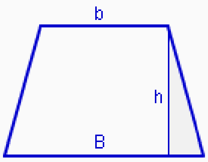
Para calcular lados, ángulos, alturas y aristas de figuras y cuerpos se necesita buscar triángulos rectángulos, en los que se pueda aplicar el teorema de Pitágoras y la definición de las razones trigonométricas.

TRIÁNGULO ISÓSCELES



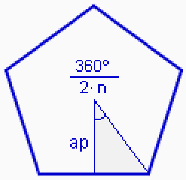
Al dividir un triángulo equilátero o isósceles por la altura se forman dos triángulos rectángulos.

TRAPECIO



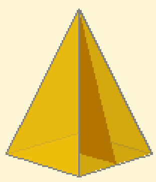
La altura, el lado oblicuo y su proyección sobre la base mayor forman un triángulo rectángulo.

POLÍGONO REGULAR



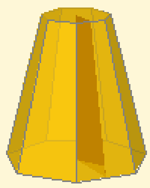
La altura, la mitad del lado y el segmento que une el centro y un vértice forman un triángulo rectángulo.

PIRÁMIDE



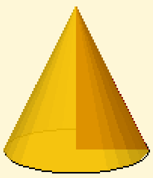
La altura de la pirámide, la altura de una cara y la apotema de la base forman un triángulo rectángulo.

TRONCO DE PIRÁMIDE



La altura del tronco de pirámide, la altura de una cara y las apotemas de las bases forman un trapecio rectángulo.

CONO



La altura del cono, la generatriz y el radio de la base forman un triángulo rectángulo.

TRONCO DE CONO

La altura del tronco de cono, la generatriz y los radios de las bases forman un trapecio rectángulo.

Autoevaluación

1. Calcula el área de un triángulo equilátero de 4 metros de lado.

2. Calcula el área de un rombo de 3,8 metros de lado sabiendo que el menor de los ángulos que forman sus lados mide 74º.

3. Calcula el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 7,9 metros de lado.

4. Calcula el volumen de un prisma pentagonal de 3 metros de altura y 4,2 metros de arista de la base.

5. Calcula el área total de una pirámide hexagonal de 6,9 metros de arista lateral y 4,9 metros de arista de la base.

6. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide cuadrangular sabiendo que las aristas de las bases miden respectivamente 8,8 y 13,3 metros y la arista lateral 8 metros.

7. Calcula el área total de un cilindro de 2,5 metros de altura y 6,7 metros de radio de la base.

8. Calcula el volumen de un cono sabiendo que la generatriz mide 1,8 metros y el ángulo que forma la generatriz con la altura mide 28º.

9. Calcula el área lateral de un tronco de cono cuya altura mide 7,2 metros y los radios de las bases miden respectivamente 3,1 y 7,1 metros.

10. Una esfera de 10,3 metros de radio se introduce en un cubo de 20,9 metros de arista. Calcula el volumen del espacio que queda libre en el cubo.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. P=1988,23 mm
   S=298233 mm^2
2. Triángulos, cuadrados y hexágonos. El hexágono tiene mayor área 5,09 cm^2
3. A=158,94 m^2
4. 278,1 m^2
5. α=74º 2' 16,75''
6. V=985,82 cm^3
   AT=639,3 cm^2
7. V=1101,68 cm^3
   AT=604,44 cm^2
   AL=338,98 cm^2
8. V=621,01 mm^3
9. AT=1,73 cm^2
   V=0,12 cm^3
10. 5566,6 cm^2
11. A=3645,5 cm^2
12. 4,01 euros
13. a) 486922800 km^2
    b) 509645864 km^2
    c) 509905556,16 km^2
    d) 509904363,78 km^2

    a) 1033899412000 km^3
    b) 1082148051226,71 km^3
    c) 1082699464246,4 km^3
    d) 1082696932430 km^3

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 6,93 m^2
2. 13,88 m^2
3. 176,52 m^2
4. 91,05 m^3
5. 157,2 m^2
6. 339,33 m^2
7. 387,3 m^2
8. 1,19 m^3
9. 263,93 m^2
10. 4552,12 m^3

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

9 Funciones y gráficas

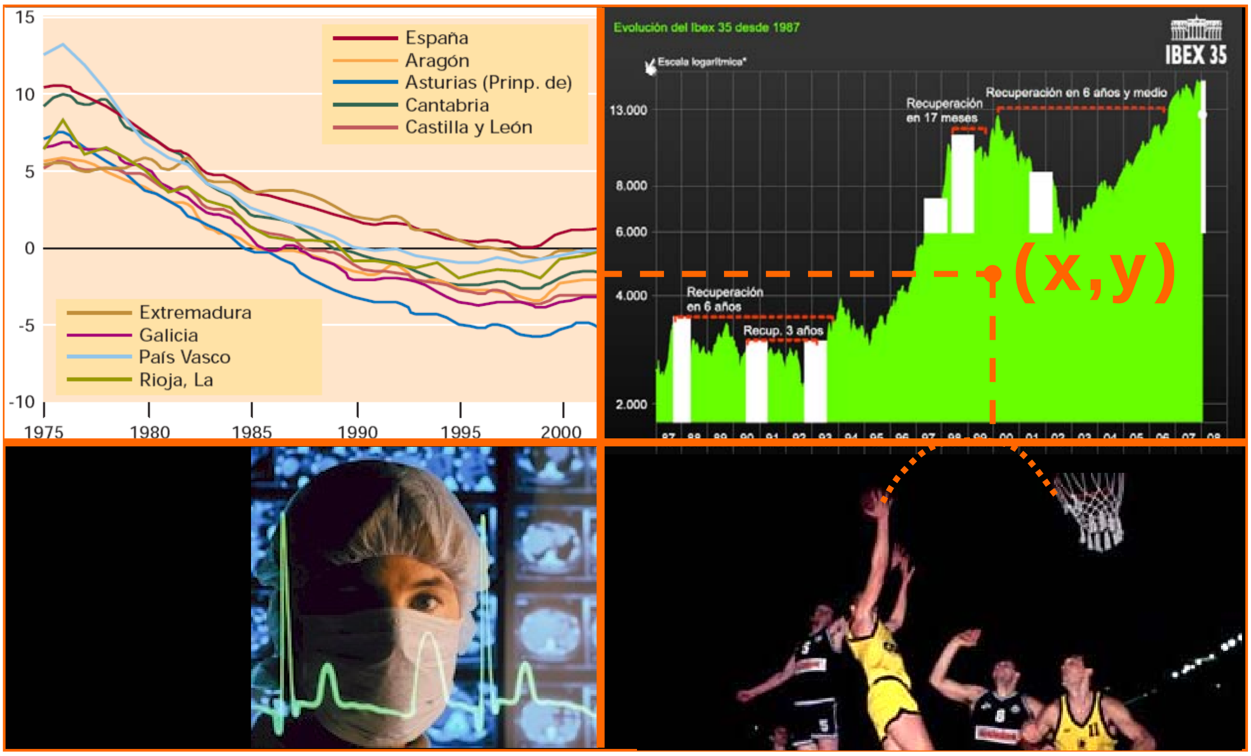
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer e interpretar las funciones y las distintas formas de presentarlas.
- Reconocer el dominio y el recorrido de una función.
- Determinar si una función es continua o discontinua.
- Hallar la tasa de variación media de una función en un intervalo.
- Determinar el crecimiento o decrecimiento de una función y hallar sus máximos y mínimos.
- Investigar el comportamiento a largo plazo de una función.
- Comprobar la simetría de algunas funciones respecto al origen y al eje OY.
- Reconocer si una función es periódica.

Antes de empezar

El lenguaje de las gráficas



De las distintas formas en que puede presentarse una función, mediante un enunciado, una tabla, una expresión algebraica o una gráfica, esta última es la que nos permite ver de un sólo vistazo su comportamiento global, de ahí su importancia. En este tema aprenderás a reconocer e interpretar sus características principales.

Investiga

Imagina que montas en una noria cuyo radio mide 30 m y para subir hay que ascender 5 m desde el suelo.

La noria comienza a girar, ¿cómo es la gráfica de la función que da la altura a la que te encuentras según el ángulo de giro?.

Tú vas en la cabina naranja y unos amigos en la verde, ¿cómo será su gráfica?

1. Funciones

Concepto de función

Una función es una **correspondencia** entre dos conjuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde **un elemento y sólo uno** del conjunto final, la imagen.

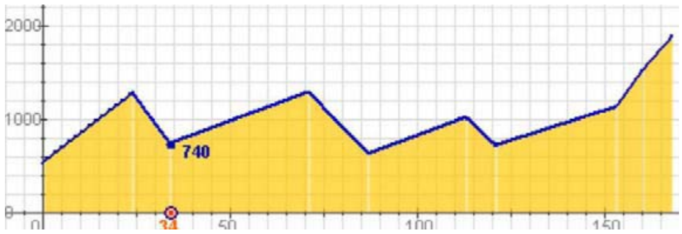
Se relacionan así dos variables numéricas que suelen llamarse **x** e **y**,

f: x → y=f(x)

x es la variable **independiente**

y es la variable **dependiente**

El grafico describe el recorrido de la 9ª Etapa de la Vuelta Ciclista 2007, indicando los km totales y la altitud en los puntos principales del trayecto.



A la izquierda aparece la gráfica anterior trazada sobre unos ejes cartesianos, para simplificarla se han unido los puntos principales mediante segmentos. Se trata de una función que da la altitud según los km recorridos, observa la tabla de valores.

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

Gráfica de una función

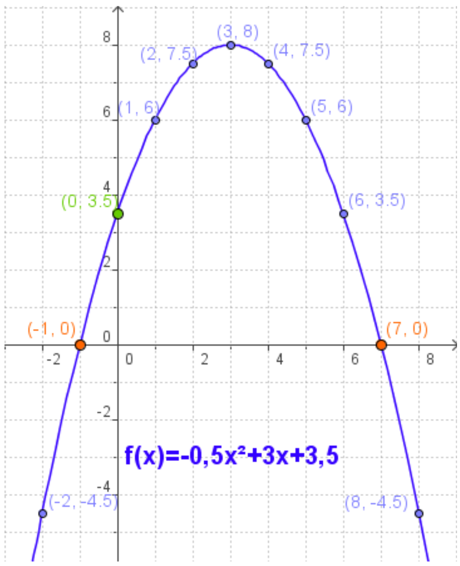
Para ver el comportamiento de una función, **f: x → y**, recurrimos a su **representación gráfica** sobre los ejes cartesianos, en el eje de abscisas (OX) la variable independiente y en el de ordenadas (OY) la independiente; siendo las coordenadas de cada punto de la gráfica: **(x, f(x))**.

En la figura está representada la función:

$$f(x) = 0,5x_2+3x+3,5$$

Haciendo una tabla de valores, se representan los puntos obtenidos, x en el eje de abscisas (OX), f(x) en el de ordenadas (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5



Hay unos puntos que tienen especial interés, los que la gráfica corta a los ejes coordenados.
Para calcularlos:

- Corte con el eje OY:
  Los puntos del eje de ordenadas tienen abscisa 0, basta hacer **x=0** en la fórmula de la función.
- Cortes con el eje OX:
  Los puntos del eje de abscisas tienen y=0. Se resuelve la ecuación **f(x)=0.**

Cortes con los ejes

EJE OY: f(0)=3,5   Punto (0, 3,5)

EJE OX: Resolviendo la ecuación:
$0,5x^2+3x+3,5=0$

Resulta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

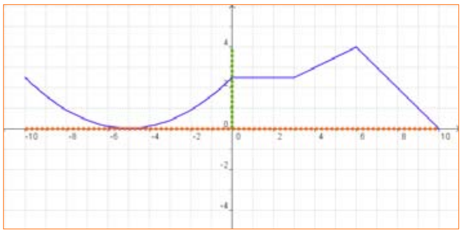
Puntos (7, 0) (-1, 0)

Dominio y recorrido

Dada una función y=f(x)

- Se llama **dominio** de f al conjunto de valores que toma la variable independiente, **x**. Se indica como **Dom f.** El dominio está formado, por tanto, por los valores de x para los que existe la función, es decir, para los que hay un f(x).

- El **recorrido** es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, **y**, esto es el conjunto de las imágenes. Se representa como **Im f.**



Dom f=[-10, 10]

Calcular Dominios

- Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio son todos los números reales.

  $f(x)=-x^4+4x^2+1$

  Dom f = $\mathbb{R}$
  Im f = $(-\infty, 5]$

- Si la expresión analítica de la función es un cociente, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

  $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$

  Dom f = $\mathbb{R}-\{1\}$
  Im f = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

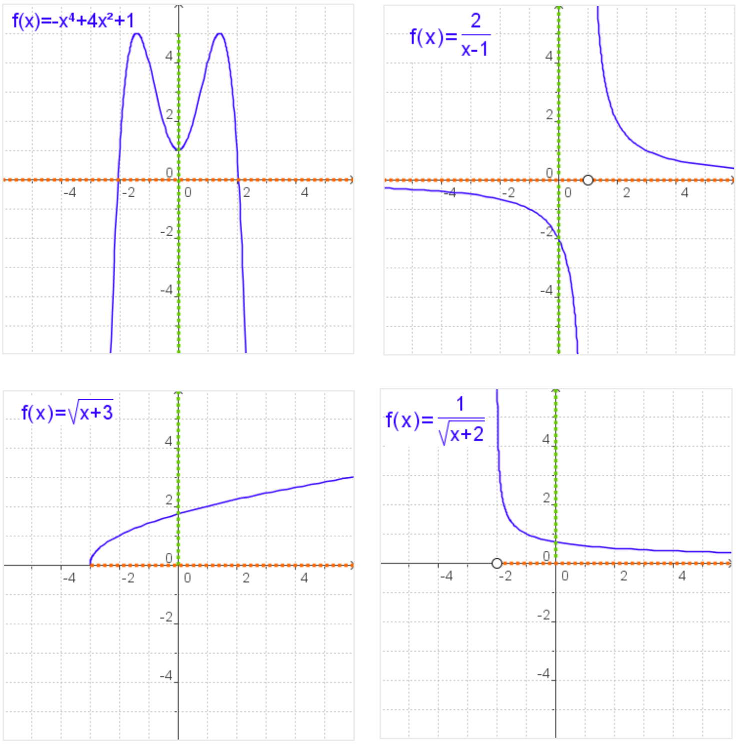
- Si la expresión analítica de la función es una raíz cuadrada, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es positivo o cero.

  $f(x)=\sqrt{x+3}$

  Dom f = $[-3,+\infty)$
  Im f = $[0,+\infty)$

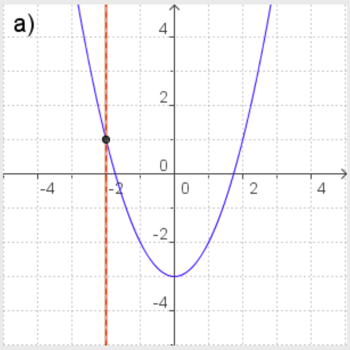
  $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

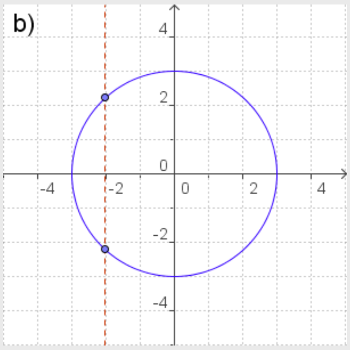
  Dom f = $(-2,+\infty)$
  Im f = $(0,+\infty)$

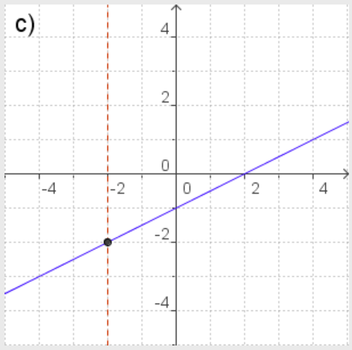


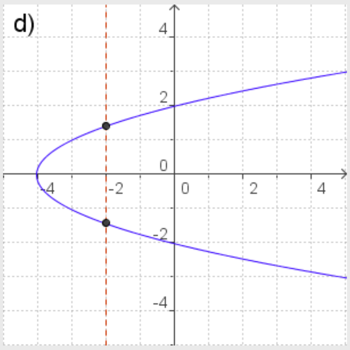
EJERCICIOS resueltos

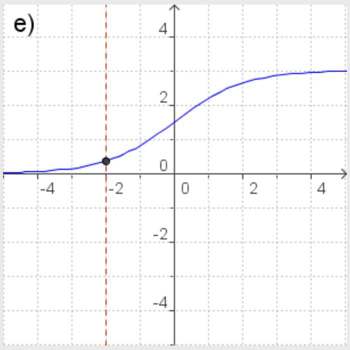
1. De las siguientes gráficas indica las que corresponden a una función y las que no.









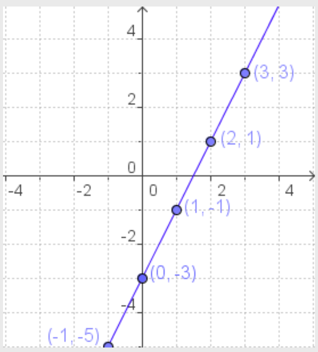


- Son gráficas de una función a), c) y e), ya que a cada x del dominio le corresponde un único valor de y.
- No son gráficas de una función b) y d)

2. Haz una tabla de valores, dibuja los puntos obtenidos y representa la función.

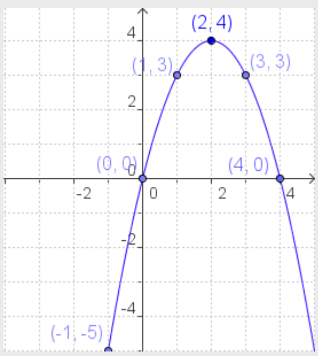
a) $f(x)=2x-3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



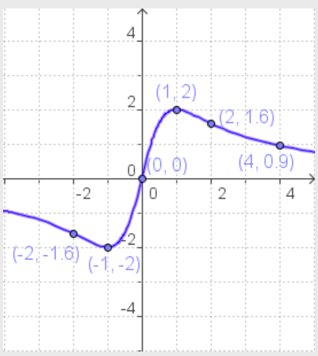
b) $f(x)=-x^2+4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



- RECUERDA

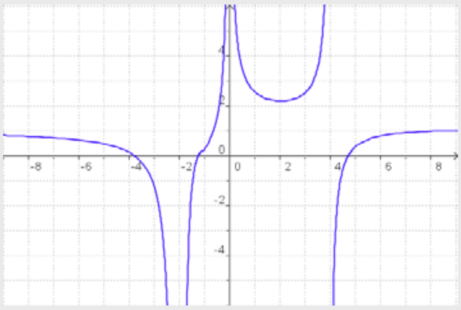
  Para hacer una tabla de valores, a partir de la expresión de una función, sustituye en la fórmula la x por los valores que desees, opera y calcula los correspondientes de y=f(x). En general procura alternar valores positivos y negativos.

  Dibuja los puntos (x,y) así obtenidos, y únelos.

EJERCICIOS resueltos

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a)



Dom f = $\mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$

En estos puntos, no se puede encontrar f(x) en la gráfica.

b)

Dom f = $\mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$

En los puntos indicados, no se puede encontrar f(x) en la gráfica.

c) $f(x) = x^3-2x^2+5x$ — Dom f = $\mathbb{R}$ ya que es un polinomio

d) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ — Dom f = $\mathbb{R} - \{2\}$

No se puede calcular f(2) porque el denominador se hace 0.

e) $f(x) = \sqrt{x-5}$ — $x-5 \geq 0$, $x \geq 5$ $\Rightarrow$ Dom f = $[5, +\infty)$

f) $f(x) = \sqrt{5-x}$ — $5-x \geq 0$, $5 \geq x$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-\infty, 5]$

g) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4}}$ — $x+4>0$, $x>-4$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-4, +\infty)$

-4 no es del Dominio porque anula el denominador.

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ — $2-x>0$, $2>x$ $\Rightarrow$ Dom f = $(-\infty, 2)$

2 no es del Dominio porque anula el denominador.

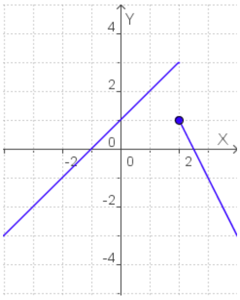
2. Propiedades de las funciones

Continuidad

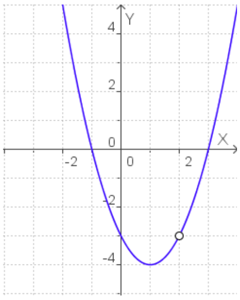
La primera idea de función **continua** es la que puede ser representada de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

Cuando una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad**.

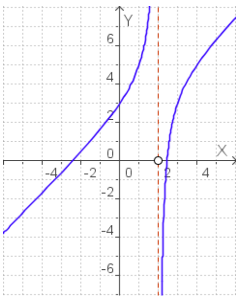
Las tres funciones dibujadas debajo son discontinuas en x=2, pero tienen distintos tipos de discontinuidad.



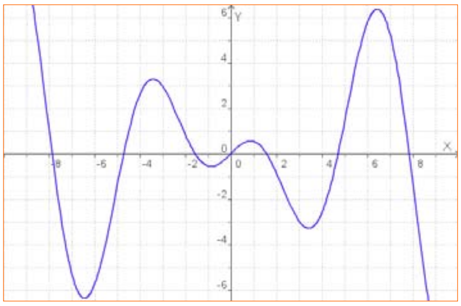
Salto finito



Discontinuidad evitable



Salto infinito



Una función y=f(x) es continua en x=a si:

- La función está definida en **x=a**, existe **f(a)=b**.
- Las imágenes de los valores próximos a **a** tienden a **b**.

Hay varias razones por las que una función puede no ser continua en un punto:

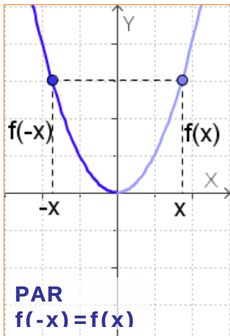
- Presenta un salto.
- La función no está definida en ese punto, o si lo está queda separado, hay un "agujero" en la gráfica.
- La función no está definida y su valor crece (o decrece) de forma indefinida cuando nos acercamos al punto.

Simetrías

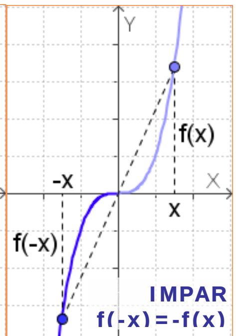
La gráfica de algunas funciones puede presentar algún tipo de simetría que si se estudia previamente, facilita su dibujo.

- Una función es **simétrica** respecto al **eje OY**, si **f(-x)=f(x)**. En este caso la función se dice **PAR**.
- Una función es **simétrica** respecto al **origen de coordenadas** cuando **f(-x)=-f(x)**. En este caso la función se dice **IMPAR**.

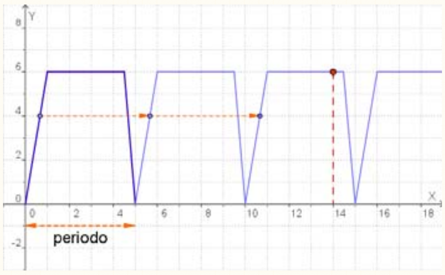
Observa los gráficos para reconocerlas.



Cuando se dobla la gráfica por el eje de ordenadas las dos ramas coinciden.



Cuando se dobla la gráfica por ambos ejes las dos ramas coinciden.



Una cisterna se llena y vacía automáticamente expulsando 6 litros de agua cada 5 minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica. Cuando el depósito está vacío comienza el llenado, que cuesta 1 minuto, permanece lleno 3,5 minutos y se vacía en 0,5 minutos. Este proceso se repite periódicamente.

Para conocer el volumen de agua en el depósito en cada instante basta conocer lo que ocurre en estos primeros 5 minutos.

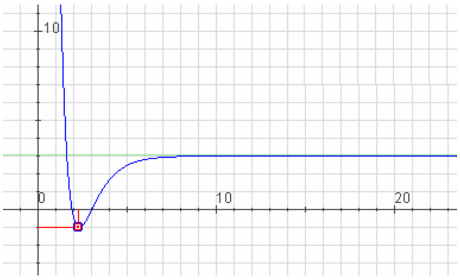
Así a los 14 minutos, la cantidad de agua es:

$$f(14)=f(4+2\cdot5)=f(4)=6$$

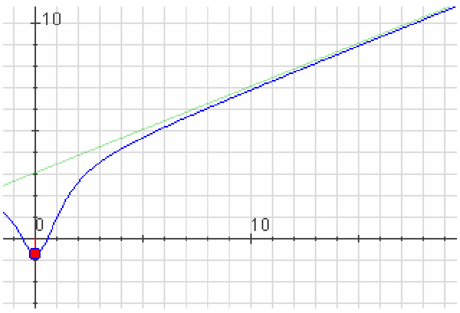
Al dividir 14:5, cociente=2 resto=5

En general, si el periodo es 5:

$$\mathbf{f(x+5\cdot n)=f(x)}$$



Función con asíntota horizontal



Función con tendencia lineal

Funciones periódicas

En la naturaleza y en tu entorno habitual hay fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como el caso de las mareas, los péndulos y resortes, el sonido...

Las funciones que describen este tipo de fenómenos se dicen **periódicas**

Una **función** es **periódica** cuando su valor se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. El valor de este intervalo se llama **periodo**.

$$\mathbf{f(x+periodo)=f(x)}$$

Tendencia de una función

En ocasiones la parte que nos interesa de una función es su ***comportamiento a largo plazo***, es decir, los valores que toma la función cuando la x se hace cada vez más grande. Cuando ese comportamiento es claramente definido decimos que la función tiene una determinada **tendencia**.

En el apartado anterior hemos visto que algunas funciones presentan un comportamiento periódico: repiten sus valores a intervalos regulares. Aquí vamos a ver otros tipos de tendencias.

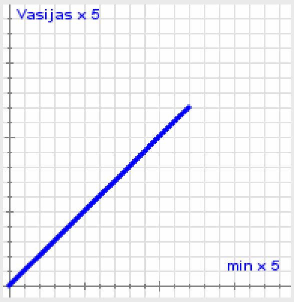
1. Una función tiene una **asíntota horizontal** si a medida que la variable independiente va tomando valores más y más grandes, la variable dependiente se va estabilizando entorno a un valor concreto, k. La asíntota es una línea recta de ecuación y=k.

2. Una función tiene **tendencia lineal** si a medida que la variable independiente va tomando valores más y más grandes su gráfica se parece cada vez más a la de una línea recta, a la que llamaremos ***asíntota oblicua***.

3. Una función tiene **tendencia cuadrática** si a medida que la variable independiente va tomando valores más y más grandes, su gráfica se parece cada vez más a una curva que estudiaremos en el próximo capítulo que se denomina ***parábola*** y cuya ecuación viene dada por un polinomio de segundo grado.

EJERCICIOS resueltos

4. La imagen adjunta representa el reloj de agua del Museo de los Niños en Indianápolis (Estados Unidos). Su funcionamiento es como sigue: en la columna de la derecha hay 60 vasijas que se van llenando de agua poco a poco. Cuando se llena la que hace el piso 60 se vacía de golpe toda la columna y se llena una de las bolas de la columna de la izquierda que tiene 12 bolas. Como puedes suponer la columna de la izquierda indica las horas y la columna de la derecha los minutos. Indica si la función que relaciona la altura del agua en la columna de la derecha con el tiempo transcurrido es continua y haz un esbozo de su gráfica.

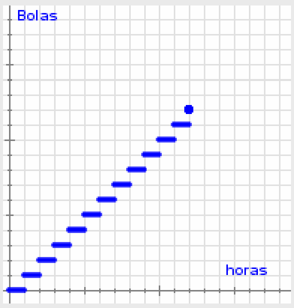


A lo largo de una hora la columna de la derecha se llena de forma casi constante, por lo que **su gráfica es continua** y tiene el aspecto que se indica al lado.

Si llamamos **x** al tiempo en minutos y llamamos **y** al número de vasijas (lo que equivale a la altura), la expresión algebraica de esta función es $y = x$.

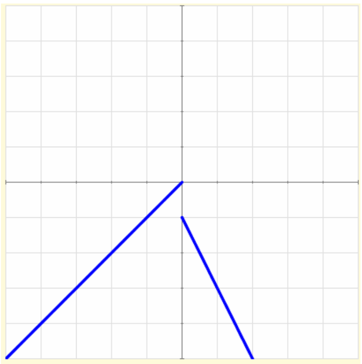
5. Indica si la función que relaciona la altura del agua en la columna de la izquierda con el tiempo transcurrido es continua y haz un esbozo de su gráfica.

Cuando cae el agua de la columna derecha se llena una bola de la columna izquierda de forma casi instantánea, y durante una hora la altura de la columna izquierda no cambia. Estas variaciones súbitas de la altura nos indican **que la función no es continua**.



Si llamamos **x** a las horas transcurridas e **y** al número de vasijas de la izquierda llenas la expresión algebraica de esta función es $y = \mathrm{ent}(x)$ (*La parte entera de x*)

6. Indica si las gráficas adjuntas son continuas o discontinuas.



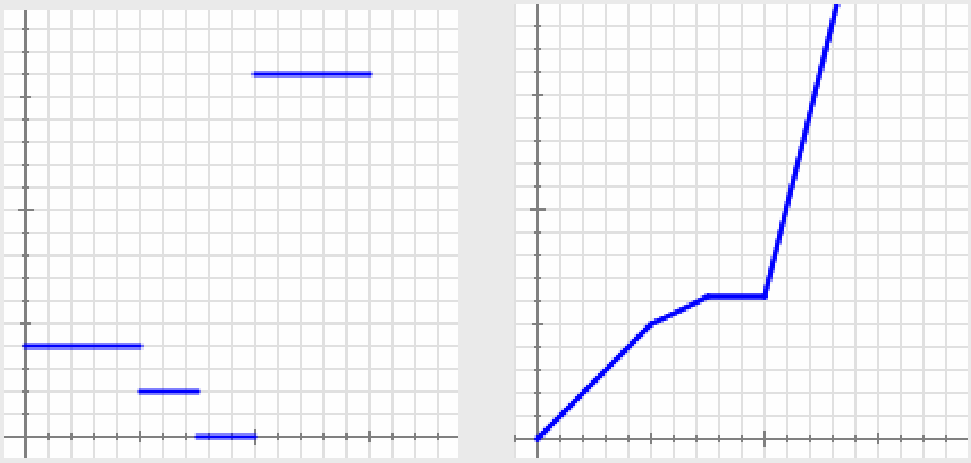
La primera es discontinua porque para dibujarla hay que levantar el lápiz del papel, en cambio, la segunda es continua.

EJERCICIOS resueltos

7. Juan tiene hoy una excursión en el colegio. Como vive lejos suele ir en bicicleta. Nada más llegar al colegio salen todos los alumnos andando hacia la estación de trenes y allí esperan un rato a que llegue el tren. Suben al tren y por fin llegan a su destino.

Abajo puedes ver dos gráficas: una representa la distancia que va recorriendo Juan con respecto al tiempo transcurrido y la otra representa la velocidad a la que se desplaza, también con respecto al tiempo transcurrido.

Indica de forma razonada qué gráfica corresponde a cada una de las dos situaciones e indica en cada caso si la función representada es continua o no.



La primera gráfica representa las velocidades:

Al principio va en bicicleta pero siempre a la misma velocidad (por eso la gráfica es horizontal). En cuanto llega al colegio empieza a andar (sigue siendo horizontal, pero está más baja, lo que significa que andando va más despacio que en bicicleta). Llega a la estación y se queda parado un rato (la velocidad es cero). Sube al tren (la velocidad es constante pero la gráfica más alta indica que van mucho más deprisa).

La gráfica es **discontinua** y los saltos se producen al cambiar el método de locomoción.

La segunda gráfica representa las distancias a su casa.

Al principio la distancia va aumentando de manera constante (viaje en bici), luego sigue aumentando pero la gráfica está menos inclinada (eso significa que la velocidad es menor: va andando). Durante un rato, la distancia no aumenta (la gráfica es horizontal, está parado). Por último vuelve a aumentar muy deprisa (la mayor inclinación indica mayor velocidad: viaje en tren).

En este caso no hay saltos en la gráfica (por lo tanto es **continua**), pero sí hay cambios bruscos de velocidad que quedan reflejados en los cambios de inclinación de la gráfica.

3. Monotonía

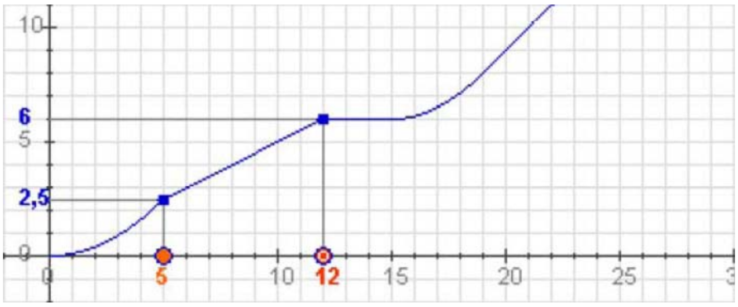
Tasa de variación de una función

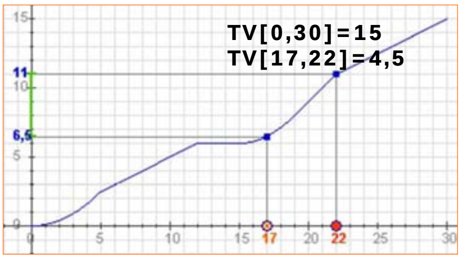
La **tasa de variación** o **incremento** de una función es el aumento o disminución que experimenta una función al pasar la variable independiente de un valor a otro.

$$TV[x_1,x_2]=f(x_1)-f(x_2)$$

De más utilidad resulta calcular la llamada **tasa de variación media**, que los indica la variación relativa de la función respecto a la variable independiente:

$$TVM[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

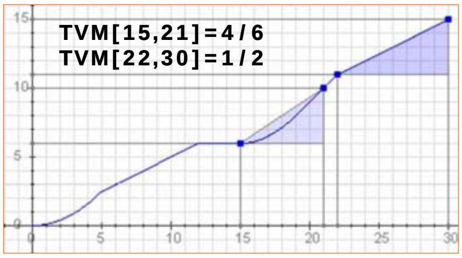




La gráfica representa la distancia en km recorrida de un ciclista en función del tiempo, en minutos, empleado.

La TV corresponde a la distancia recorrida en un intervalo de tiempo.

La TVM es la velocidad media en un intervalo de tiempo determinado.



Crecimiento y decrecimiento

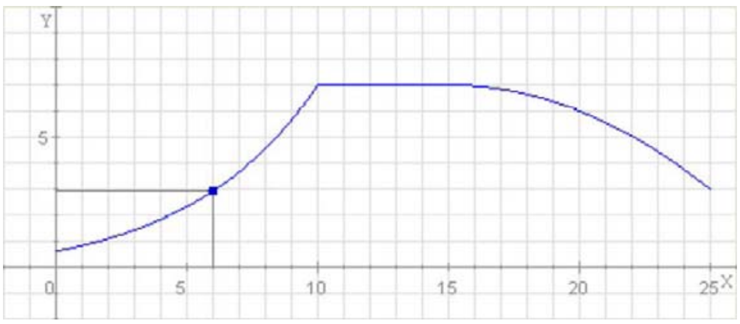
Una característica de las funciones que se puede visualizar fácilmente en las gráficas es la monotonía. Cuando al aumentar el valor de x aumenta el valor de y=f(x), la gráfica "asciende" y se dice que la función es **creciente**. Si por el contrario al aumentar x disminuye y, la gráfica "desciende", y la función **decrece**. Precisando un poco más:

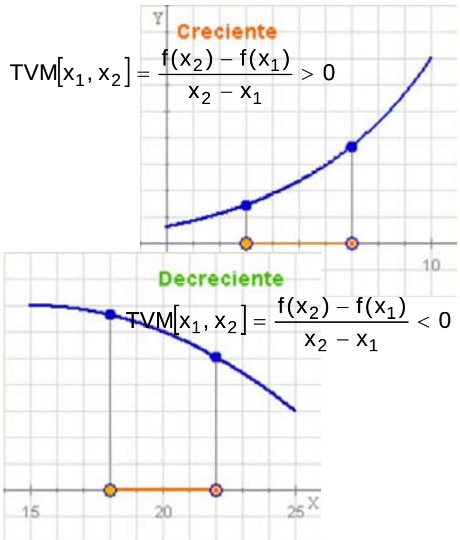
Una **función** es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo

- Si **x1<x2** entonces **f(x1)<f(x2)**

Y será **decreciente**:

- Si **x1<x2** entonces **f(x1)>f(x2)**

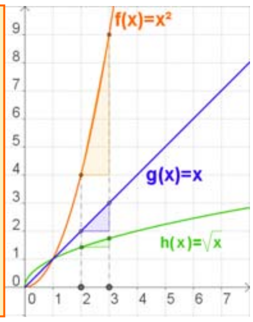




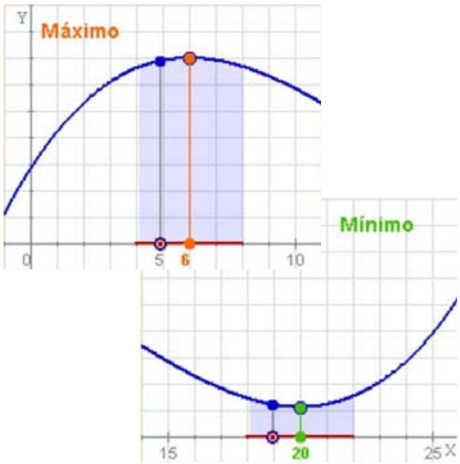
$$TVM[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

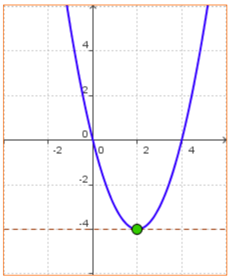
$$TVM[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$$

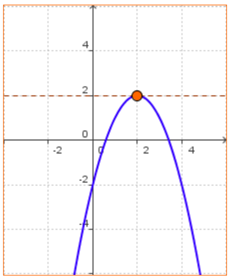
Todas las funciones no crecen o decrecen, de la misma manera.
$f(x)=x^2$ es la que crece más deprisa,
$g(x)=x$ tiene un crecimiento lineal,
$h(x)=\sqrt{x}$ crece más lentamente.



Máximos y mínimos







Dada una función continua en un punto x=a, se dice que presenta un **máximo relativo**, si a la izquierda de dicho punto la función es creciente y la derecha la función es decreciente.

Si, por el contrario, la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha hay un **mínimo relativo**.

Si se verifica que f(a)>f(x) para cualquier valor x del dominio, y no sólo para los valores de "alrededor", se habla de **máximo absoluto** en x=a.

Y análogamente se dice que en a hay un **mínimo absoluto** si f(a)<(f(x) para cualquier x del dominio.

EJERCICIOS resueltos

8. Calcula la tasa de variación media de las funciones siguientes entre los puntos indicados. Comprueba en la figura que en las funciones cuyo gráfico es una recta la TVM es constante.

a) y=2x+3

$$TVM[1,3]=\frac{9-5}{3-1}=\frac{4}{2}=2$$

$$TVM[-5,-2]=\frac{-1+7}{-2+5}=\frac{6}{3}=2$$

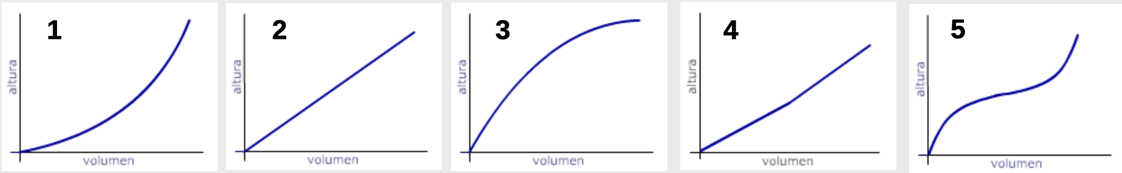
b) y=0,5x+3

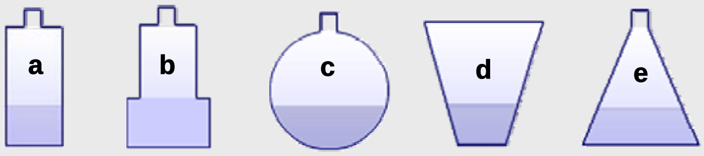
$$TVM[1,3]==\frac{4,5-3,5}{2}=0,5$$

$$TVM[-3,0]=\frac{3-1,5}{3}=0,5$$

EJERCICIOS resueltos

9. Las gráficas representan el llenado de los distintos recipientes, ¿qué gráfica corresponde a cada uno?





a → 2
b → 4
c → 5
d → 3
e → 1

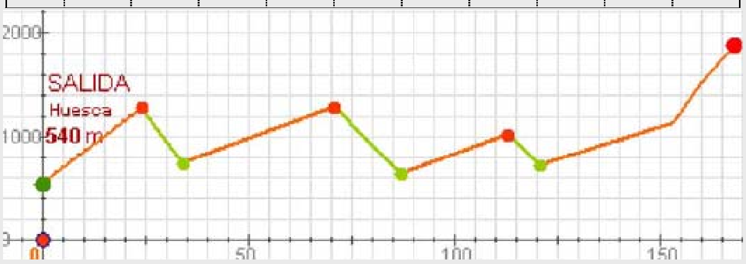
10. Recuerda la función que daba el "perfil" de una etapa de la Vuelta, que viste en el primer capítulo.

a) Escribe los intervalos de crecimiento o decrecimiento.

b) ¿En qué punto kilométrico se alcanzan los máximos relativos? ¿Qué valor toman? ¿Y los mínimos?

c) ¿Hay máximo ó mínimo absoluto?

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882



a) Creciente: (0,24)U(34,71)U(87,113)U(121,168)
Decreciente: (24,34)U(71,87)U(113,121)

b) MÁX: x=24, y=1280; x=71, y=1290; x=113, y=1020;
MÍN: x=34, y=740; x=87, y=630; x=121, y=720

c) En este caso la función tiene máximo y mínimo absolutos, que se alcanzan ambos en los extremos del dominio, mín en x=0 de valor 540 m, máx en x=168 de valor 1882 m.

Para practicar

1. Considera la función que a cada nº le asigna su cuadrado menos 1. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -1 , 1 y 2. Calcula también los cortes con los ejes.

2. Considera la función que a cada nº le asigna su mitad más 3. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -1, 1 y 3. Calcula también los cortes con los ejes.

3. Considera la función que a cada nº le asigna su doble menos 5. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -2, -1 y 1. Calcula también los cortes con los ejes.

4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

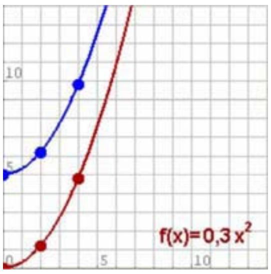
a) $f(x)= -2x^2+5x-6$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{2x-4}$

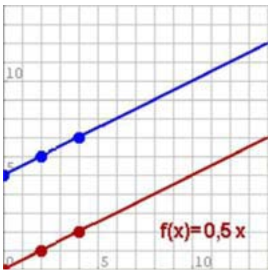
c) $f(x)=\sqrt{x+5}$

5. Calcula las TVM de las funciones de las gráficas siguientes en los intervalos [0,4] y [2,4]:

a)

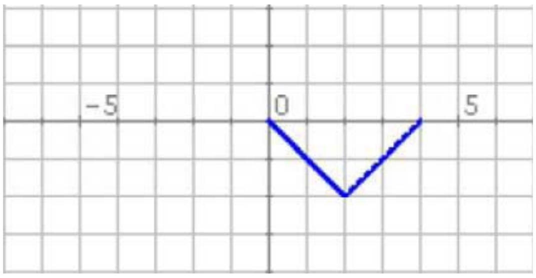


b)

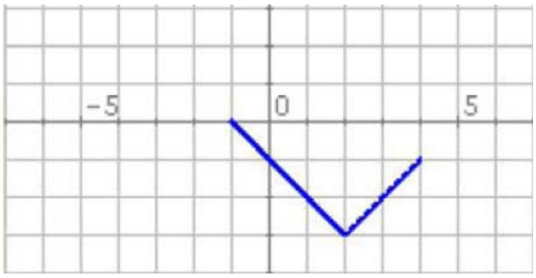


6. En cada caso la gráfica representa un tramo o periodo de una función periódica, representa otros tramos, indica el periodo y calcula la imagen del punto de abscisa que se indica:

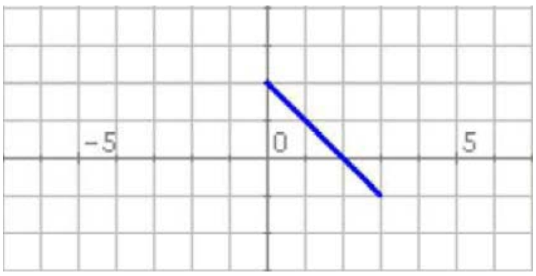
a) f(-2)



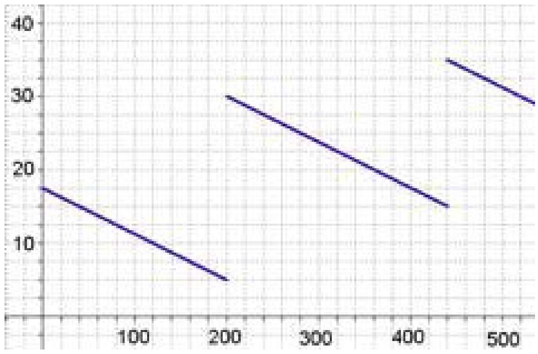
b) f(-3)



c) f(-1)

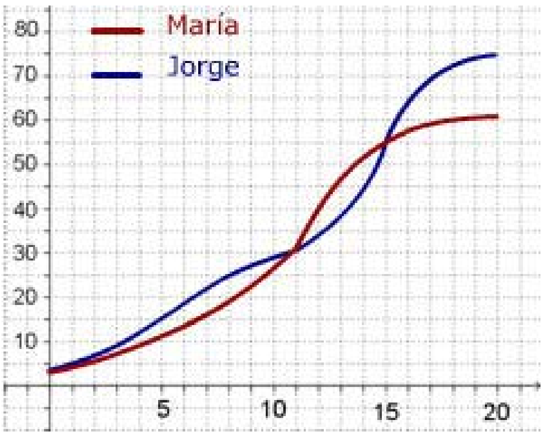


7. El gráfico muestra cómo varía la gasolina que hay en mi coche durante un viaje de 520 km por una autovía.



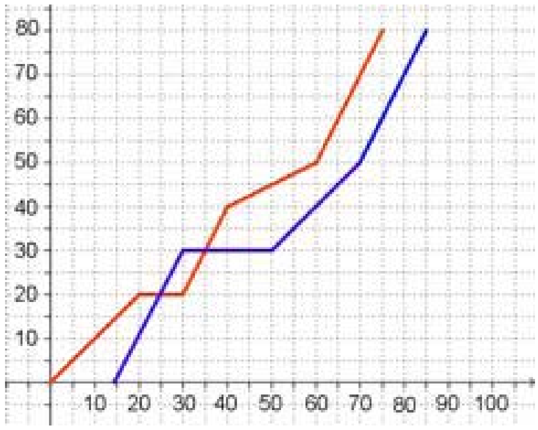
a) ¿Cuánta gasolina había al cabo de 240 km?. En el depósito caben 40 litros, ¿cuándo estaba lleno más de medio depósito?
b) ¿En cuántas gasolineras paré?, ¿en qué gasolinera eché más gasolina?. Si no hubiera parado, ¿dónde me habría quedado sin gasolina?
c) ¿Cuánta gasolina usé en los primeros 200 km?. ¿Cuánta en todo el viaje?. ¿Cuánta gasolina gasta el coche cada 100 km en esta autovía?

8. María y Jorge son dos personas más o menos típicas. En la gráfica puedes comparar como ha crecido su peso en sus primeros 20 años



a) ¿Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y María a los 12?. ¿Cuándo superó Jorge los 45 kg?
b) ¿A qué edad pesaban los dos igual? ¿Cuándo pesaba Jorge más que María?, ¿y María más que Jorge?
c) ¿Cuál fue el promedio en kg/año de aumento de peso de ambos entre los 11 y los 15 años?. ¿En qué periodo creció cada uno más rápidamente?

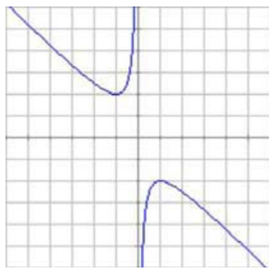
9. El gráfico da el espacio recorrido por dos coches que realizan un mismo trayecto.



a) ¿Cuál es la distancia recorrida? ¿Si el primer coche salió a las 10:00, a qué hora salió el 2º?. ¿Cuánto le costó a cada uno hacer el recorrido?
b) ¿Cuánto tiempo y dónde estuvo parado cada coche?. ¿En qué km adelantó el 2º al 1º?, ¿y el 1º al 2º?
c) ¿Qué velocidad media llevaron en el trayecto total?, ¿en qué tramo la velocidad de cada coche fue mayor?.

10. Las gráficas siguientes corresponden a las funciones I y II.

I) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ II) $f(x)=-\dfrac{x^2+1}{x}$

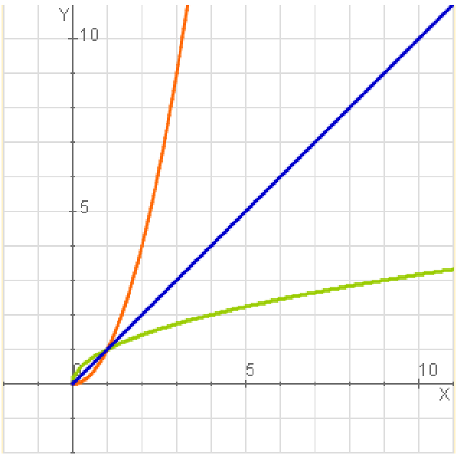


Calcula en cada una:
a) El dominio.
b) Los puntos de corte con los ejes.
c) Los valores de x para los que la función es positiva y negativa.
d) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Los máximos y mínimos.
f) ¿Presentan alguna tendencia especial?

Para saber más

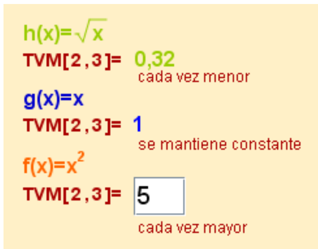
La primera función

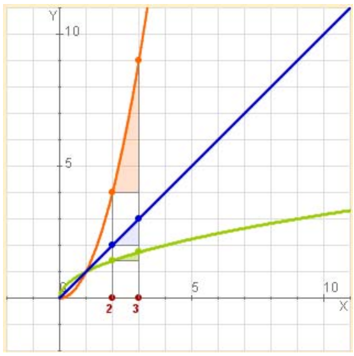
El primero en construir una función fue **Galileo** (1564-1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos bolas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez, había descubierto la ley de caída de los cuerpos.
Continuando su estudio y empleando un curioso artilugio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia.
La primera definición formal de función se debe a **Euler**, quien en el libro *Introductio in analysis infinitorum*, publicado en 1748, dice:
"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes".
En 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, vuelve sobre el tema acercándose más a la que hoy utilizamos.



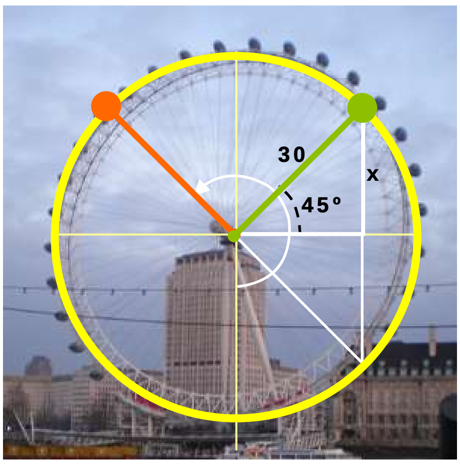
TVM y crecimiento

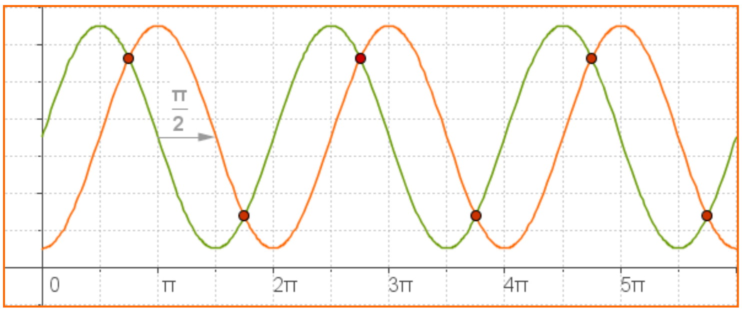
Como has visto la TVM de las funciones cuya gráfica es una recta es constante, entonces su crecimiento será siempre el mismo, decimos que es lineal.
Si observas las tres funciones de la izquierda, son crecientes. Comparemos el crecimiento de las tres:





f(x) crece "deprisa", **g(x)** tiene un crecimiento lineal, **h(x)** crece "despacio".





Observa las dos gráficas, ambas funciones son periódicas de periodo 2π, la gráfica verde está desfasada $\pi/2$ respecto a la naranja; fíjate donde alcanzan los máximos y los mínimos.

Cuando coinciden las dos gráficas, ¿a qué altura están?, x=r·sen 45º=21,21 m; 1) 35-21,21=13,79 2)35+21,21=56,21

Recuerda lo más importante

- Una **función** es una relación entre dos variables x e y, de modo que a cada valor de la variable independiente, **x**, le asocia un único valor de la variable **y**, la dependiente.

- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar x.

- La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos **(x,f(x))** representados en el plano.

- Una función es **continua** si puede representarse con un solo trazo. Es **discontinua** en un punto si presenta un "salto" o no está definida en ese punto.

- Una función es **periódica** de periodo t, si su gráfica se repite cada t unidades, f(x+t)=f(x).

- Una función es **simétrica** respecto al eje OY, función par, si f(x)=f(-x); y es simétrica respecto al origen, función impar, si f(-x)=-f(x).

- La **tasa de variación** de una función entre dos puntos es la diferencia: **$TV[x_1,x_2]=f(x_2)-f(x_1)$** La **tasa de variación media** es:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

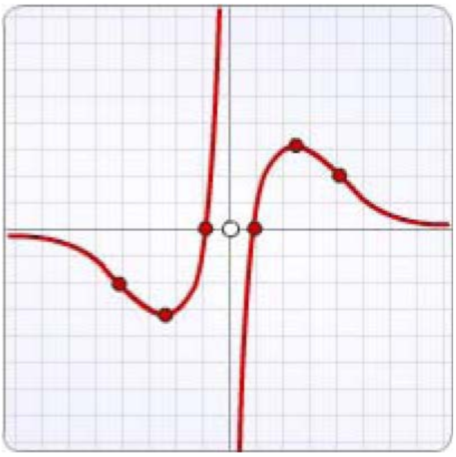
- Una función es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo

  Si $x_1<x_2$ entonces $f(x_1)<f(x_2)$

- Y es **decreciente**

  Si $x_1<x_2$ entonces $f(x_1)>f(x_2)$

- Una función continua en un punto x=a, presenta un **máximo** relativo, si a la izquierda de dicho punto es creciente y la derecha es decreciente. Si, por el contrario, es decreciente antes y creciente después hay un **mínimo** relativo.



Dominio

Todos los reales excepto el 0

Continuidad

No es continua, en 0 presenta una discontinuidad de salto infinito.

Simetría

Es simétrica respecto al origen de coordenadas, función impar.

Cortes con los ejes

Al eje de abscisas en (-1,0) y (1,0); no corta al eje de ordenadas.

Crecimiento y decrecimiento

Es creciente en (-∞, -2,5)U(2,5 ,+∞)
Y decreciente en (-2,5 ,0)U(0, 2,5)

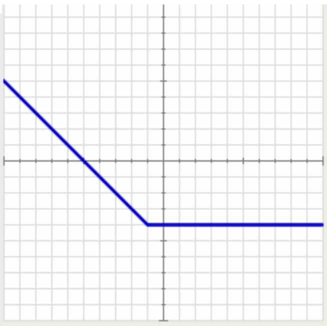
Máximos y mínimos

Máximo en (2,5 ,3);
Mínimo en (-2,5 ,3)

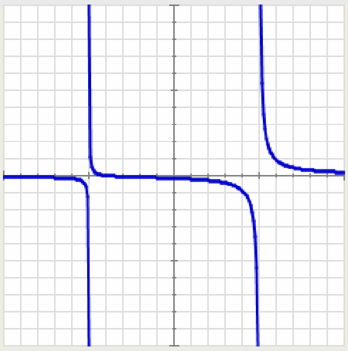
Tendencia

Tiene una asíntota horizontal

Autoevaluación



1. Calcula la imagen del cero en la función de la gráfica adjunta.



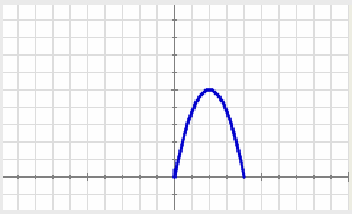
2. Calcula el dominio de la función correspondiente a la gráfica de la izquierda.

3. ¿Cuál de los puntos siguientes: A(-3,14); B(1,3); C(0,8), no pertenece a la gráfica de la función

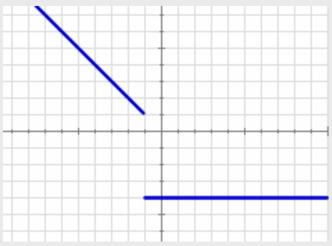
$$f(x) = -x^2 - 5x + 8$$

4. Calcula los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la recta de ecuación $y = -x + 5$

5. Si $y=f(x)$ es una función IMPAR y $f(-1)=-8$ ¿cuánto vale $f(1)$?

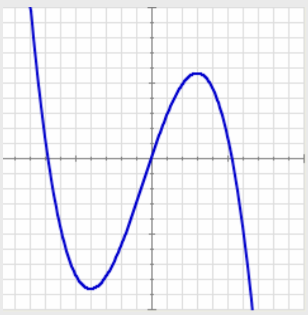


6. La gráfica muestra el primer tramo de una función periódica de periodo 4 y expresión $f(x)=-1{,}25x^2+5x$ si x está entre 0 y 4. Calcula f(17).



7. ¿En qué punto debe comenzar el tramo horizontal de la gráfica adjunta para que la función a la que representa sea continua?

8. Calcula la TVM en el intervalo [-2,-1] de la función $f(x) = -x^2 - x + 4$.



9. Determina el intervalo en el que la función de la gráfica adjunta es creciente.

10. Un ciclista sale de un punto, A, hacia otro, B, distante 70 km a una velocidad constante de 35 km/h. A la vez, sale otro de B con dirección hacia A a 40 km/h. ¿A cuántos km del punto A se cruzan en la carretera?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $f(x)=x^2-1$
$f(-1)=0$, $f(2)=3$, $f(1)=0$
Corte OY: -1 Corte OX: 1 y –1

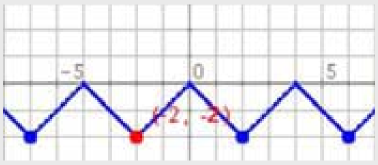
2. $y=\frac{x}{2}+3$
$f(-1)=2{,}5$ $f(1)=3{,}5$ $f(3)=4{,}5$
Corte OY: 3 Corte OX: -6

3. $f(x)=2x-5$
$f(-2)=-9$, $f(-1)=-7$, $f(1)=-5$
Corte OY: -5 Corte OX: 2,5

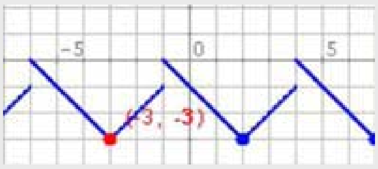
4. a) R
b) R-{2}
c) $\{x\geq -5\}$

5. a) TVM[0,4]=TVM[2,4]=0,5
b) TVM[0,4]=1,2; TVM[2,4]=1,8

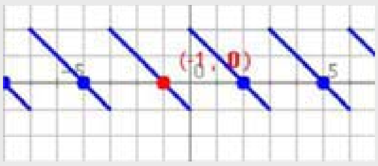
6. a)



b)



c)



7. a) 27,5 litros; entre los km 200 y 360 y del 440 hasta el 520.
b) En dos, una en el km 200 y otra en el 440; eché más en la 1ª; a los 280 km
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km

8. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; a los 14 años
b) A los 11 (30 kg) y a los 15 (55 kg) J más que M: hasta los 11 y desde los 15; M más que J: de los 11 a 15
c) 25kg; 6,25 kg/año; M entre los 11 y 12 (10 kg/año); J entre los 12-14 (10 kg/año)

9. a) 80 km; a las 10:15; 75 y 70 min
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en el km 20 y en 30 respectivamente.
c) 64 km/h y 68,6 km/h; 1º: min 60-75 2º: min 15-30 y min 70-85

10. I)
a) IR
b) (0,0)(3,0)
c) $y>0$ $(0,+\infty)$; $y<0$ $(-\infty,0)$;
d) crec: $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$,
decrec: $(1,3)$;
e) max x=1, mín x=3;
f) No

II)
a) IR-{0}
b) No corta
c) $y<0$ $(0,+\infty)$; $y>0$ $(-\infty,0)$
d) decrec: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
crec: $(-1,0)\cup(0,1)$;
e) max x=1, mín x=-1;
f) lineal.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. f(0)= –4

2. IR - { 5, -5}

3. (1, 3)

4. (0, 5) (5,0)

5. f(1)=8

6. f(17)=f(1)=3,75

7. (-1,1)

8. TVM[-2,-1] = 2

9. (-4, 3)

10. A 32,7 km de A.

No olvides enviar las actividades al tutor

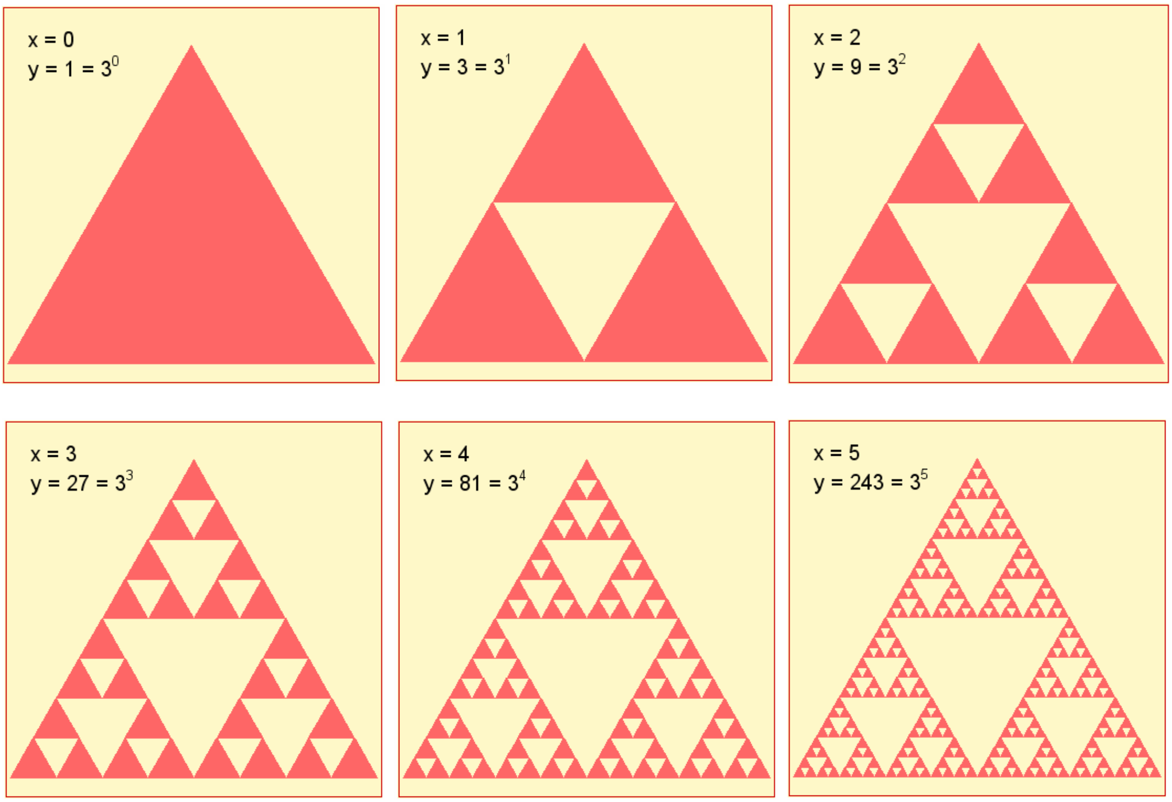
10 Funciones elementales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer y distinguir algunas de las funciones más habituales.
- Utilizar algunas funciones no lineales: cuadráticas, de proporcionalidad inversa y exponenciales
- Reconocer las características más importantes de esos tipos de funciones
- Representar e interpretar funciones "definidas a trozos"
- Buscar e interpretar funciones de todos estos tipos en situaciones reales

Antes de empezar



Investiga

Un investigador está haciendo un estudio de una cierta población de microbios. Ha comprobado que cada hora que pasa cada elemento de la población se divide en otros tres. La animación que acabas de ver es una simulación de este experimento.
La tabla adjunta muestra la relación entre el número de individuos de la población y el tiempo transcurrido:

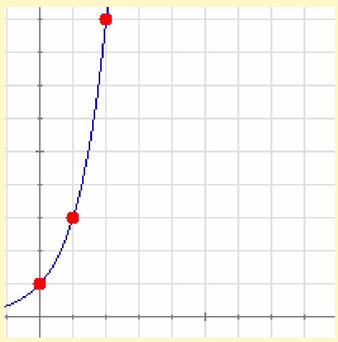
Horas	0	1	2	3	4	5	6
Nº mic	1	3	9	27	81	243	729

Como puedes ver si llamamos x al tiempo e y al número de individuos tenemos:

$$y = 3^x$$

Es un ejemplo de función exponencial.

La gráfica de esta función tiene este aspecto:



Como puedes comprobar su crecimiento es rapidísimo.
¿Podrías calcular cuanto tiempo tardaría en alcanzarse una población de un millón de individuos?

1. Funciones polinómicas

Función de proporcionalidad directa

Como su nombre indica, la función de proporcionalidad directa o **función lineal** relaciona dos magnitudes directamente proporcionales, es decir, tales que su cociente es constante. Dicho cociente recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**.

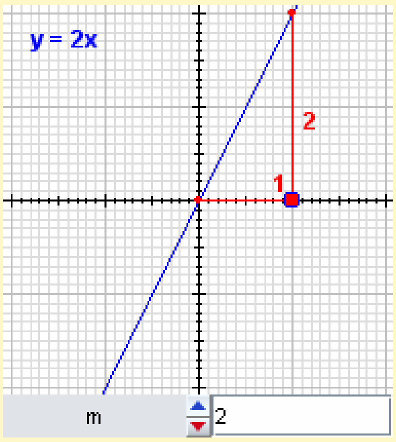
De la definición se deduce que la ecuación de la función lineal es

$$y = m \cdot x$$

Donde ***m*** es la constante de proporcionalidad.

La gráfica de esta función es siempre una línea recta que pasa por el origen (*si x=0, entonces y=0*), creciente si ***m*** es positiva, decreciente si ***m*** es negativa y tanto más cerca de la vertical cuanto mayor sea el valor absoluto de ***m***. Por ese motivo también se llama a ***m*** **pendiente** de la recta.

EN RESUMEN: Las ecuaciones del tipo $y = m \cdot x$ representan funciones lineales o de proporcionalidad directa.



- **Si m>0 es creciente**
- **Si m<0 es decreciente**

(Observa qué sucede si m=0)

Por su parte, la constante de proporcionalidad es una medida de la inclinación de la recta.

La llamamos **pendiente**.

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

Las rebajas

Han llegado las rebajas y en una tienda han decidido clasificar todos sus productos en tres lotes, A, B y C, a los que van a aplicar el 20%, el 30% y el 50% de descuento, respectivamente.

Si llamamos **x** al precio inicial e **y** al precio final, las tablas que ves debajo muestran los cambios de varios productos de los distintos lotes:

Lote A: 20%		Lote B: 30%		Lote C: 50%	
x	y	x	y	x	y
375,00 €	300,00 €	213,00 €	149,10 €	297,00 €	148,50 €
452,00 €	361,60 €	198,00 €	138,60 €	561,00 €	280,50 €
126,00 €	100,80 €	321,00 €	224,70 €	319,00 €	159,50 €
180,00 €	144,00 €	202,00 €	141,40 €	56,00 €	28,00 €
412,00 €	329,60 €	135,00 €	94,50 €	87,00 €	43,50 €

Lote A: 20%		
x	y	y/x
375,00 €	300,00 €	0,8
452,00 €	361,60 €	0,8
126,00 €	100,80 €	0,8
180,00 €	144,00 €	0,8
412,00 €	329,60 €	0,8

Vamos a analizar cada caso dividiendo el precio rebajado por el precio inicial.

Como puedes observar, en el primer lote todos los cocientes son iguales. Como hemos visto, eso significa que el precio rebajado es **directamente proporcional** al precio inicial y, en este caso, la constante de proporcionalidad es 0,8.

Por tanto, para el lote A tenemos: $y = 0{,}8 \cdot x$

Lote B: 30%			Lote C: 50%		
x	y	y/x	x	y	y/x
213,00 €	149,10 €	0,7	297,00 €	148,50 €	0,5
198,00 €	138,60 €	0,7	561,00 €	280,50 €	0,5
321,00 €	224,70 €	0,7	319,00 €	159,50 €	0,5
202,00 €	141,40 €	0,7	56,00 €	28,00 €	0,5
135,00 €	94,50 €	0,7	87,00 €	43,50 €	0,5

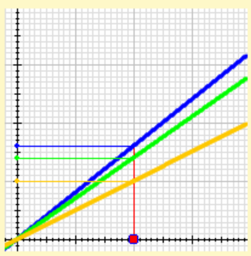
En los otros lotes sucede algo parecido, pero en cada caso la constante de proporcionalidad es diferente de manera que:

para el lote B tenemos: $y = 0{,}7 \cdot x$

para el lote C tenemos: $y = 0{,}5 \cdot x$

en cualquier caso todas tienen la forma $y = m \cdot x$

Vamos a analizar ahora las gráficas de las tres funciones: Como ves las tres son ***líneas rectas que pasan por el origen***, con mayor inclinación cuanto más grande es la constante de proporcionalidad.



x = 200,00 €

Lote A:
y = 160,00 €

Lote B:
y = 140,00 €

Lote C:
y = 100,00 €

EJERCICIOS resueltos

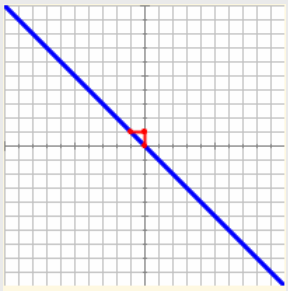
1. Averigua si las funciones definidas por los datos de la tablas adjuntas son o no son funciones lineales. En caso afirmativo calcula su pendiente y dibuja su gráfica:

x	y	y/x
-3	4,55	-1,52
-1	0,51	-0,51
1	0,51	0,51
3	4,55	1,52
5	12,64	2,53

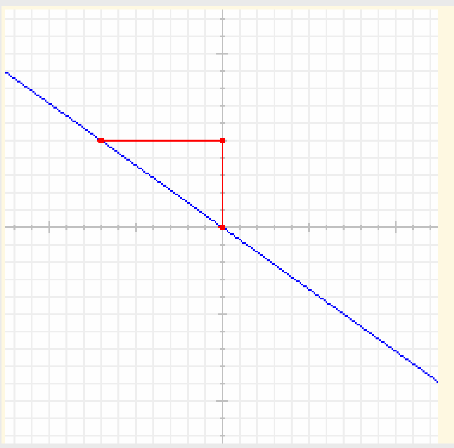
Como vemos, al dividir y por x no se obtienen siempre el mismo valor, por lo tanto las dos magnitudes no son directamente proporcionales y la función que representa esta tabla **no es lineal**.

x	y	y/x
-3	3	-1
-1	1	-1
1	-1	-1
3	-3	-1
5	-5	-1

En este caso los cocientes son todos iguales, por lo tanto, las magnitudes que representan x e y son directamente proporcionales y la función que las relaciona **sí es lineal**. La pendiente es la constante de proporcionalidad m=-1 y la gráfica es



2. Determina la pendiente y la ecuación de la función cuya gráfica es:



Como es una recta que pasa por el origen se trata de una función lineal de ecuación y=mx.

Para hallar la pendiente localizamos un punto con dos coordenadas enteras. En este caso el punto (-7,5). La pendiente se calcula dividiendo la segunda coordenada por la primera, así pues,

$$m = -\frac{5}{7}$$

y la ecuación de la función es

$$y = -\frac{5}{7}x$$

Funciones afines

Podemos considerar a una **función afín** como una función lineal a la que se le han aplicado ciertas *condiciones iniciales*. Aunque no representa a dos magnitudes directamente proporcionales, existe entre ellas cierta proporcionalidad como verás en la escena adjunta.

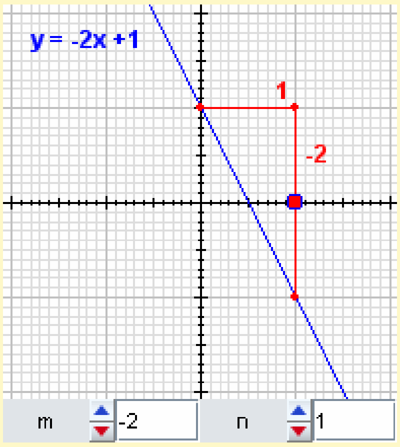
La ecuación de la función afín es

$$y = m \cdot x + n$$

Donde m sigue representando esa cierta *proporcionalidad* y n representa las *condiciones iniciales*.

Su gráfica es una línea recta que corta al eje Y en el punto n (*si x=0, entonces y=n*). Por ese motivo también se dice que ***n*** es la **ordenada en el origen** de la recta. La ***m*** tiene el mismo significado que en las funciones lineales.

EN RESUMEN: Las ecuaciones del tipo $y = m \cdot x + n$ representan funciones afines.



- **Si m>0 es creciente**
- **Si m<0 es decreciente**

(Observa qué sucede si m=0)

La pendiente se calcula ahora con respecto a la ordenada en el origen.

$$m = \frac{-2}{1} = -2$$

En una empresa de alquiler de vehículos cobran 50€ por el contrato de alquiler más 0,20€ por kilómetro recorrido. Queremos encontrar una ecuación que nos permita calcular con facilidad el precio de un alquiler en función de la distancia recorrida.

x (km)	Y (€)
0	50,00 €
100	70,00 €
200	90,00 €
300	110,00 €
400	130,00 €

La empresa nos proporciona la tabla adjunta para que nos podamos hacer una idea del precio.

Lo primero que observamos es que si duplicamos el número de km, el precio no se duplica: **las magnitudes no son directamente proporcionales**.

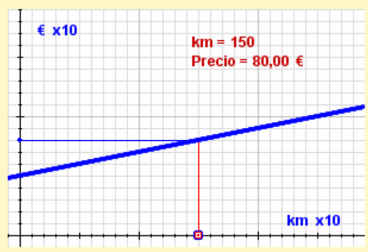
Vamos a analizar con más detalle la situación:
Si descontamos en cada caso el valor inicial y dividimos el precio por la distancia obtenemos siempre el mismo cociente, es decir, ***el precio (descontado el coste inicial) sí es directamente proporcional a la distancia***. El valor obtenido es la constante de proporcionalidad como en el caso anterior.

x (km)	y (€)	y-50	(y-50)/x
0	50,00 €		
100	70,00 €	20,00 €	0,20
200	90,00 €	40,00 €	0,20
300	110,00 €	60,00 €	0,20
400	130,00 €	80,00 €	0,20

Por tanto, $y-50 = 0{,}2 \cdot x$ de donde se deduce que:

$y = 0{,}2 \cdot x + 50$ que tiene la forma $y = m \cdot x + n$

Al igual que en las funciones lineales la **m** representa la pendiente y ahora la **n** representa el punto en el que la recta corta al eje Y.



EJERCICIOS resueltos

3. Una agencia de alquiler de coches cobra por un determinado modelo 0€ al contratar y 0,50€ por km recorrido. En otra agencia cobran 30€ al contratar y 0,30€ por km recorrido. Analiza, en función de los km recorridos cuál es la agencia más ventajosa.

Si llamamos x a los km recorridos e y precio total del alquiler, para la primer agencia tenemos:

$y = 0,50x$

Para la segunda:

$y = 0,30x + 30$

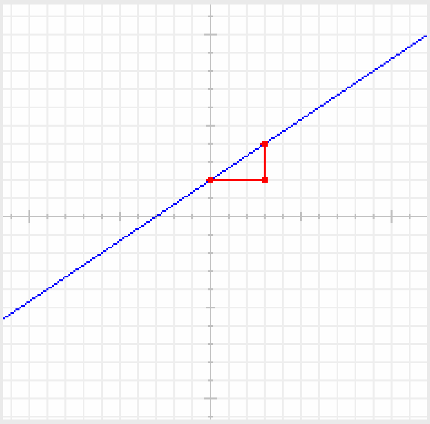
Resolviendo el sistema de ecuacione obtenemos las coordenadas del punt de corte:

$0,50x = 0,30x + 30$

$x = \frac{30}{0,20} = 150$

Por tanto, hasta 150 km es mejor la primera (su gráfica queda por debajo).
A partir de esa distancia es mejor la segunda.

4. Determina las ecuaciones de las funciones correspondientes a las gráficas:



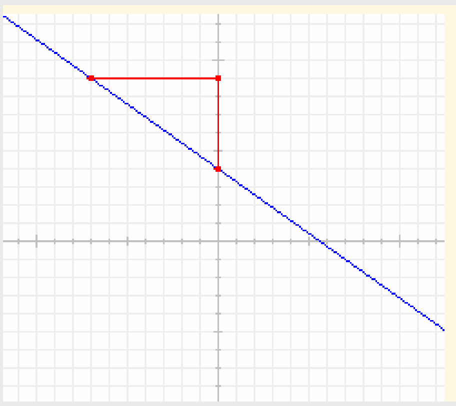
Por ser una recta que no pasa por el origen, se trata de una función afín de ecuación y=mx+n.

El valor de n es el punto en el que la recta corta al eje Y, por tanto, n=2.

Como la recta es creciente, la pendiente es positiva.

Para hallar la pendiente buscamos otro punto con coordenadas enteras, por ejemplo (3,4), trazamos un triángulo rectángulo que lo una con el punto de corte con el eje Y (0,2). El cociente entre el cateto vertical y el horizontal me da la pendiente: m=2/3 y la ecuación es

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$



En este caso n=4.

Como la recta es decreciente, la pendiente es negativa.

Para hallar la pendiente buscamos otro punto con coordenadas enteras, por ejemplo (-7,9), trazamos un triángulo rectángulo que lo una con el punto de corte con el eje Y (0,4). El cociente entre el cateto vertical y el horizontal me da la pendiente: m=-5/7 y la ecuación es

$$y = -\frac{5}{7}x + 4$$

Funciones cuadráticas

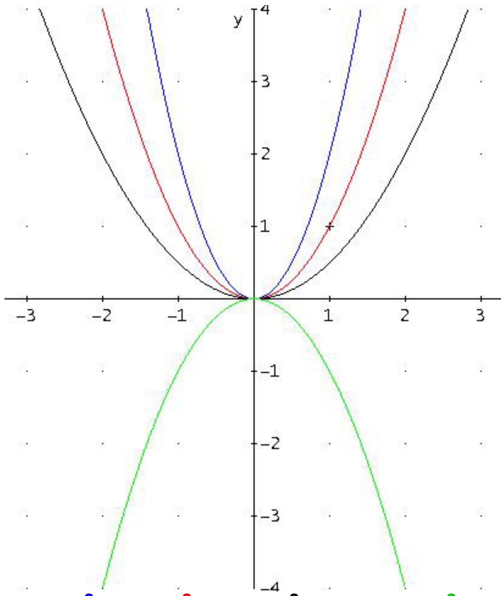
Una **función cuadrática** es la que viene representada por un polinomio de segundo grado (*la x está elevada al **cuadrado***).

La ecuación de la función cuadrática es

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

El significado de los coeficientes a, b y c se explica en las escenas adjuntas.

Su gráfica es una curva especial denominada **parábola**. Este tipo de curvas se encuentra con facilidad en la vida real pues es la curva que describe cualquier objeto lanzado al aire y sometido a la influencia de la gravedad.



$y=2x^2$ $y=x^2$ $y=x^2/2$ $y=-x^2$

Caso 1: b = c =0. $y=ax^2$

Características:

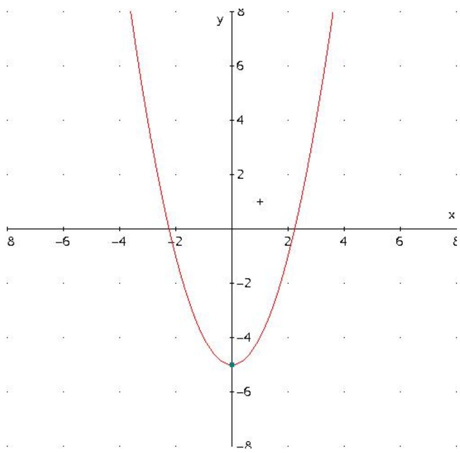
1. Siempre pasa por el origen.
2. Es simétrica respecto al eje Y.
3. Si a>0 está abierta hacia arriba.
4. Si a<o está abierta hacia abajo.
5. Cuanto mayor es |a|, más cerrada está.
6. El origen es el **vértice** de la parábola.
7. Si a>0 el vértice es un mínimo.
8. Si a<0 el vértice es un máximo.

Caso 2: b=0. $y=ax^2+c$

Características:

1. El vértice es el punto (0,c)
2. Si a y c tienen el mismo signo, no corta al eje X.
3. Si a y c tienen distinto signo, corta en dos puntos al eje X.
4. Las demás propiedades se mantienen, en particular el significado de a sigue siendo el mismo.

Sumar o restar c produce un desplazamiento vertical de la gráfica.



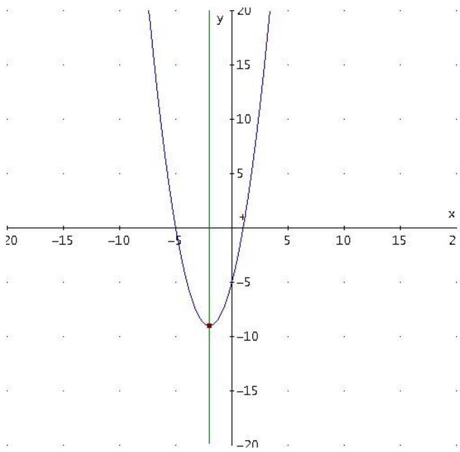
$y=x^2-5$

Caso general: $y=ax^2+bx+c$

Características:

1. El eje de simetría es $x=-\dfrac{b}{2a}$
2. El vértice se calcula sustituyendo el valor anterior en la ecuación.
3. Ahora, c representa solo el punto de corte con el eje Y.
4. Las demás propiedades se mantienen.

b representa una cierta medida del desplazamiento horizontal de la gráfica.



$y=x^2+4x-5$

EJERCICIOS resueltos

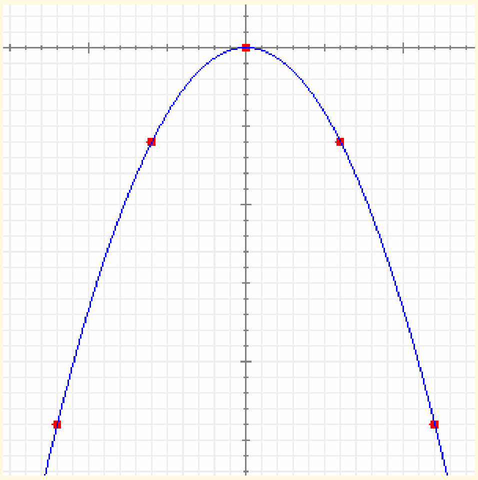
5.

Dibuja la gráfica de la función $y = -\frac{1}{6}x^2$

Como ya sabemos, las funciones del tipo $y = ax^2$ son parábolas simétricas con respecto al eje Y y con el vértice en el origen de coordenadas.

Como en este caso a < 0, la parábola está abierta hacia abajo. Para hallar las coordenadas de otros puntos damos unos cuantos valores a la x teniendo en cuenta la simetría:

x	-12	-6	0	6	12
y	-24	-6	0	-6	-24



6.

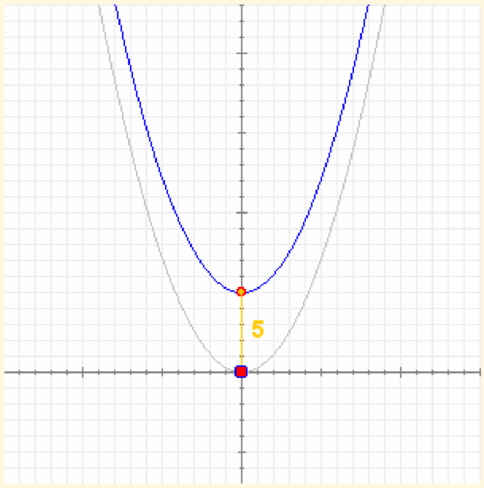
Dibuja la gráfica de la función $y = \frac{2}{7}x^2 + 5$

Es una función del segundo tipo, por lo que su gráfica será igual que la de la función

$$y = \frac{2}{7}x^2$$

pero desplazada 5 unidades hacia arriba.

Por tanto, solo tenemos que dibujar esta función como se explicó en el ejercicio anterior y luego desplazarla 5 unidades hacia arriba.



7.

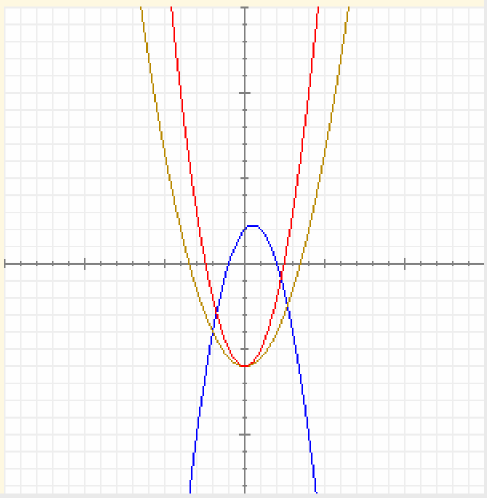
Asocia de forma razonada cada gráfica con su ecuación

1) $y = -x^2 + x + 2$

2) $y = 0{,}5x^2 - 6$

3) $y = x^2 - 6$

Recuerda que el signo de a indica hacia donde está abierta.
El valor de c indica el punto de corte con el eje Y.
Si b ≠ 0, el eje de simetría de la parábola no coincide con el eje Y.
Cuanto mayor es el valor absoluto de a más cerrada está la parábola y viceversa.



EJERCICIOS resueltos

8. **Dibuja la gráfica de la función $y = x^2 + 8x + 15$**

En este caso el proceso consiste en seguir los siguientes pasos:

1) Determinar si está abierta hacia arriba o hacia abajo: **Como a = 1 está abierta hacia arriba**

2) Hallar el punto de corte con el eje Y: **Si x = 0, entonces y = 15**

3) Hallar los puntos de corte con el eje X

Un punto está en el eje X si su segunda coordenada (la y) es igual a cero. Luego tenemos que resolver la ecuación

$$x^2 + 8x + 15 = 0; \qquad x = \frac{-8 \mp \sqrt{64 - 60}}{2}; \quad x1 = -5\,;\ x2 = -3$$

4) Hallar el vértice. Para ello recordamos que el vértice se encuentra en el punto de abscisa **$x = -b/2a = -4$**
y la segunda coordenada del vértice se obtiene sustituyendo este valor en la función: **$y = -1$**

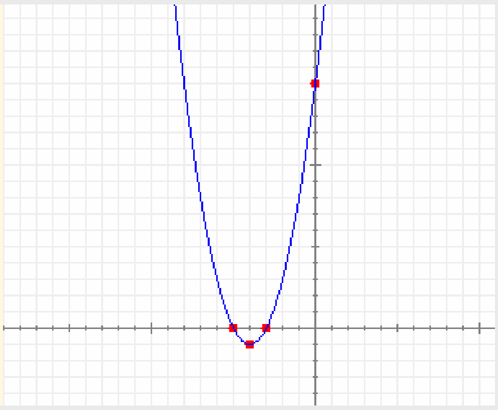
Resumiendo:

está abierta hacia arriba

Pasa por el punto **(0, 15)**

Corta al eje X en **(-5 ,0)** y en **(-3 ,0)**

El vértice es **(-4 , -1)**



2. Otras funciones

Función de proporcionalidad inversa

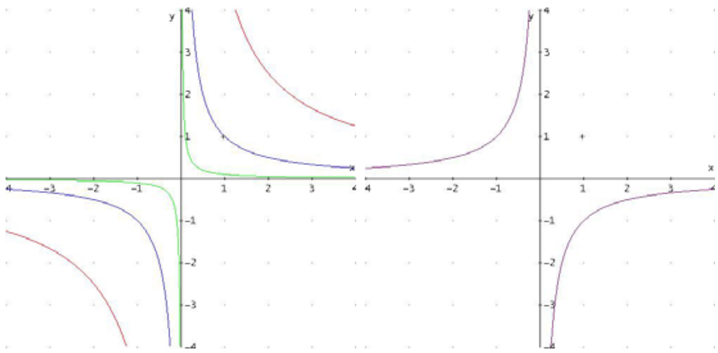
Como su nombre indica, la función de proporcionalidad inversa relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales, es decir, tales que su producto es constante. Dicho producto recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**

La ecuación de esta función es

$$y = \frac{k}{x} \qquad \text{ó} \qquad x \cdot y = k$$

Donde **k** es la constante de proporcionalidad.

Su gráfica es una curva especial denominada **hipérbola**. Se trata de un tipo de curva que tiende a parecerse a una línea recta cuando nos alejamos del origen.



x·y=1 **x·y=5** **x·y=1/10** **x·y=-1**

***Características*:**

1. Función discontinua en el origen.
2. Cuanto mayor es |k| más se aleja de los ejes.
3. Si k>0 la gráfica está en los cuadrantes 1 y 3.
4. Si k<0 la gráfica está en los cuadrantes 2 y 4.
5. Es impar (simétrica respecto del origen).
6. Las dos ramas de la gráfica se van aproximando a los ejes. Decimos que los ejes son **asíntotas** de esta función.

Si cambiamos x por x-a e y por y-b, la gráfica se desplaza de manera que ahora el vértice es (a,b), las asíntotas son las rectas x=a e y=b.
La gráfica de la izquierda corresponde a la función:

$$\mathbf{(x+2)\cdot(y-5)=1}$$

VIAJE DE ESTUDIOS

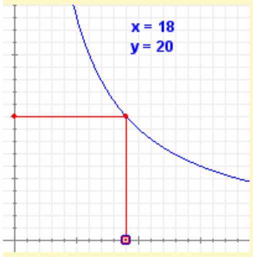
Un grupo de alumnos quiere organizar una excursión y para ello piden presupuesto a una agencia de viajes que les pide 360 € por el alquiler de una autocar sea cual sea el número de alumnos que se apunten.

Los organizadores están un poco preocupados porque solo son 10 y 36€ les parece mucho dinero. Poco a poco van convenciendo a más compañeros y al final reúnen un grupo de 30 alumnos (el triple de los iniciales), por lo que el viaje les sale a 12€ por persona (la tercera parte de la cantidad inicial).

Tenemos un ejemplo de proporcionalidad inversa: ***el precio por alumno es inversamente proporcional al número de alumos***.

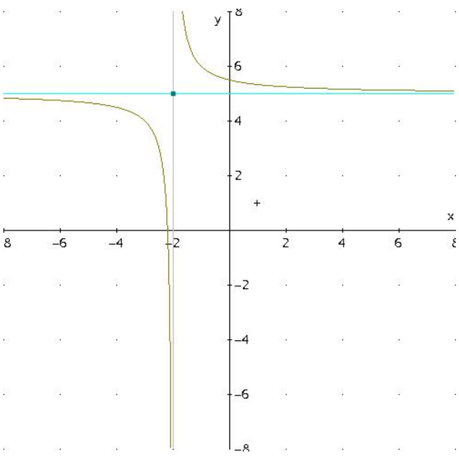
Si llamamos **x** al número de alumnos e **y** al precio que debe pagar cada uno, está claro que se cumple:

$$x \cdot y = 360 \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{360}{x}$$



Tenemos una función de proporcionalidad inversa cuya constante de proporcionalidad es 360.

La gráfica adjunta muestra cómo varía el precio en función del número de alumnos:



Función exponencial

Una **función exponencial** es una función definida por una potencia en la que la base es constante y el exponente es variable. Por motivos de operatividad sólo se admiten bases positivas y distintas de 1.

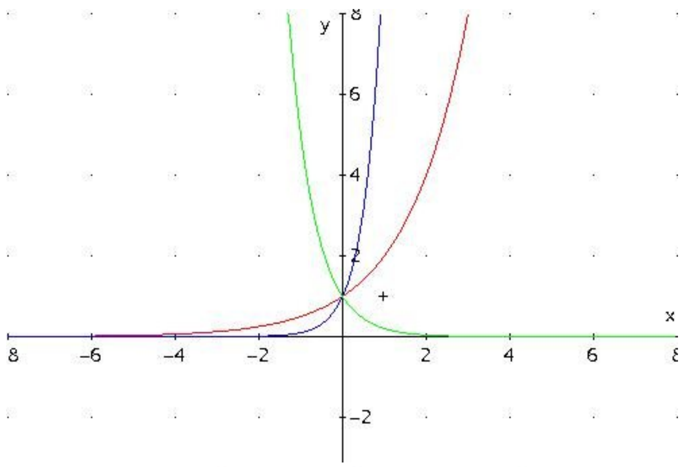
La ecuación de esta función es

$$y = k \cdot a^x$$

Donde a es cualquier número real mayor que cero y distinto de uno, y k es una constante que aleja o acerca la gráfica al eje X.

Al igual que las hipérbolas su gráfica tiene siempre una asíntota, pero a diferencia de ellas no es simétrica. Su principal característica es la de presentar un crecimiento o un decrecimiento muy rápido.

Caso 1: k=1. $\quad y=a^x$



$y=2^x$ $\quad y=10^x$ $\quad y=(0,2)^x$

Características:

1. Es creciente si a>1 y decreciente si a<1.
2. Corta al eje Y en el punto (0,1).
3. No corta al eje X.
4. La recta y=0 es una asíntota horizontal (por la izquierda si a>1 y por la derecha si a<1).

Caso general:
Cuanto mayor sea |k| más se aleja la gráfica del eje X. Si k es negativo las gráficas pasan a los cuadrantes 3 y 4 y las funciones crecientes se transforman en decrecientes y viceversa.

En un banco me proponen una inversión a largo plazo al 3% anual de forma que los intereses se acumulan al capital. En la tabla se muestra un ejemplo a 10 años para un capital inicial de 20.000€

ANOS	CAPITAL INICIAL	INTERESES	CAPITAL FINAL
1	20.000,00 €	600,00 €	20.600,00 €
2	20.600,00 €	618,00 €	21.218,00 €
3	21.218,00 €	636,54 €	21.854,54 €
4	21.854,54 €	655,64 €	22.510,18 €
5	22.510,18 €	675,31 €	23.185,48 €
6	23.185,48 €	695,56 €	23.881,05 €
7	23.881,05 €	716,43 €	24.597,48 €
8	24.597,48 €	737,92 €	25.335,40 €
9	25.335,40 €	760,06 €	26.095,46 €
10	26.095,46 €	782,86 €	26.878,33 €

Vamos a buscar una ecuación que nos sirva para cualquier plazo.

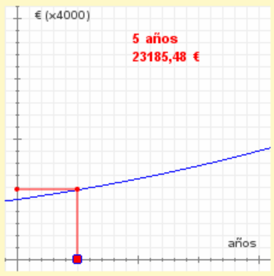
Vamos a llamar Co al capital inicial, i a los intereses anuales, t al número de años y Cf al capital final. A partir de la tabla adjunta se deduce la relación entre el capital final y el inicial:

ANOS	Ci	INTERESES	Cf
1	Co	I = 0,03·Co	C1 = Co+i = Co+0,03·Co = 1,03·Co
2	C1	0,03·C1	$C2 = 1{,}03 \cdot C1 = (1{,}03)^2 \cdot Co$
3	C2	0,03·C2	$C3 = 1{,}03 \cdot C2 = (1{,}03)^3 \cdot Co$
4	C3	0,03·C3	$C4 = 1{,}03 \cdot C3 = (1{,}03)^4 \cdot Co$
5	C4	0,03·C4	$C5 = 1{,}03 \cdot C4 = (1{,}03)^5 \cdot Co$
6	C5	0,03·C5	$C6 = 1{,}03 \cdot C5 = (1{,}03)^6 \cdot Co$
7	C6	0,03·C6	$C7 = 1{,}03 \cdot C6 = (1{,}03)^7 \cdot Co$
8	C7	0,03·C7	$C8 = 1{,}03 \cdot C7 = (1{,}03)^8 \cdot Co$
9	C8	0,03·C8	$C9 = 1{,}03 \cdot C8 = (1{,}03)^9 \cdot Co$
10	C9	0,03·C9	$C10 = 1{,}03 \cdot C9 = (1{,}03)^{10} \cdot Co$

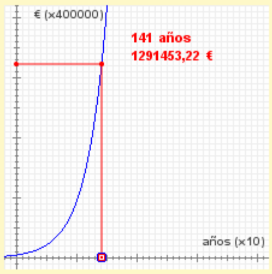
$Cf = Co \cdot (1{,}03)^t$ o, en general, $Cf = Co \cdot (1+r)^t$

Siendo r el tipo de interés aplicado.

La función que hemos obtenido tiene el aspecto: $y = k \cdot a^x$
(y es el capital final, k el capital inicial, a=1,03>0 y distinto de 1, x el tiempo transcurrido).
Tenemos, pues, una **función exponencial** cuya gráfica es:



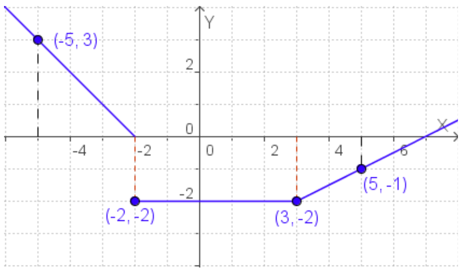
Ampliando la escala nos hacemos una idea mejor del aspecto de la gráfica. Como puedes ver siempre es creciente y aunque al principio el crecimiento es bastante lento, con el tiempo se acelera rápidamente.



Naturalmente, no vamos a hacer una inversión a tan largo plazo, pero piensa en empresas o instituciones que planifican con décadas de antelación.

Hay una novela de Ciencia-Ficción (*Retorno de las Estrellas*) de Stanislaw Lem que usa este recurso.

Funciones definidas a trozos



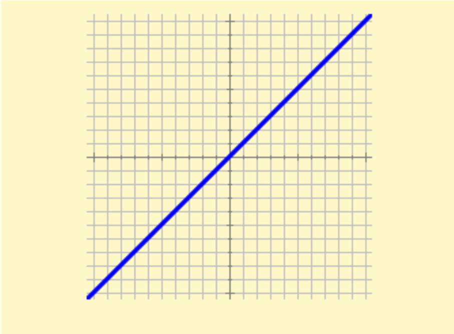
$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & x<-2 \\ -2 & -2\le x\le 3 \\ 0{,}5x-3{,}5 & x>3 \end{cases}$$

Hay un tipo de funciones que vienen definidas con distintas expresiones algebraicas según los valores de x, se dice que están **definidas a trozos**.

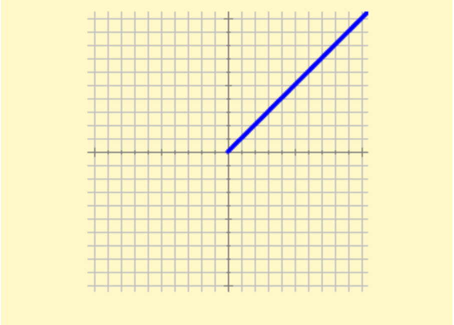
Para describir analíticamente una función formada por trozos de otras funciones, se dan las expresiones de los distintos tramos, por orden de izquierda a derecha, indicando en cada tramo los valores de x para los que la función está definida.

En la figura puedes ver un ejemplo de este tipo de funciones y su representación gráfica.

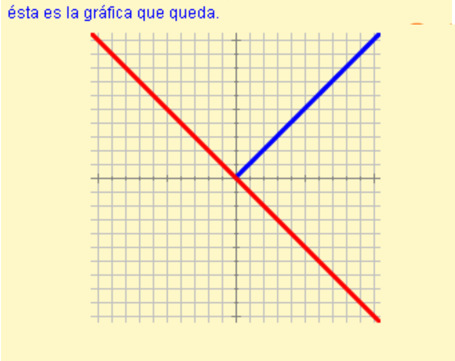
Función valor absoluto



Esta es la gráfica de la función lineal **y = x**



Si nos quedamos solo con la parte en la que x es positiva ésta es la gráfica que queda.



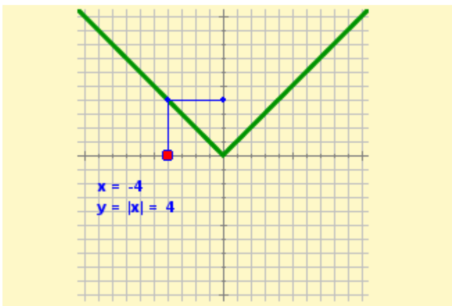
La línea roja es la gráfica de la función lineal **y = - x**

Como recordarás de la segunda quincena, el valor absoluto de un número representa su distancia al cero. La función valor absoluto es la que asigna a cada número esa distancia.

Teniendo en cuenta que el valor absoluto de un número es el mismo número si éste es positivo y su opuesto si es negativo, la ecuación de esta función es

$$y=|x|=\begin{cases} x & si\ x\geqslant 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$$

Como ves es un ejemplo de función definida a trozos. En cada trozo viene representada por una función lineal de pendientes 1 y -1 respectivamente, por lo que su gráfica está compuesta por dos semirrectas con esas pendientes que se unen en el origen.



Así pues, ésta es la gráfica de la función valor absoluto:
y = | x |

EJERCICIOS resueltos

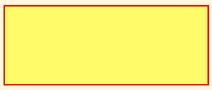
9. Indica si la base y la altura de todos los rectángulos cuya superficie mide 6000 m^2 son magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo escribe la ecuación de la función que las relaciona y dibuja su gráfica.

El área de un rectángulo es igual a la base (b) por la altura (h). Si el área es constante tenemos

$$b \cdot h = k.$$

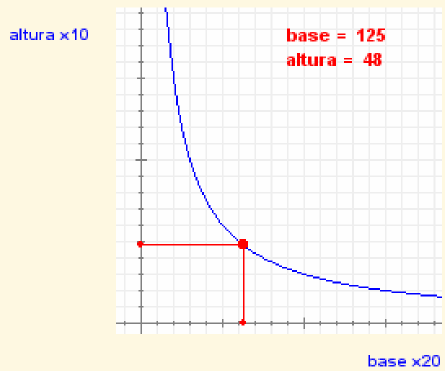
Luego sí son inversamente proporcionales.
En nuestro caso la ecuación es

$$b \cdot h = 6000 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{6000}{b}.$$

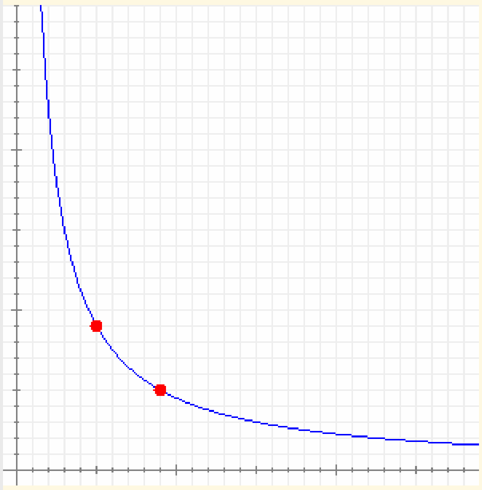


base 125

SUPERFICIE = 6000 m^2



10. Determina la ecuación de la gráfica adjunta.



Se trata de una función de proporcionalidad inversa.

$$x \cdot y = k$$

Intentamos localizar uno o varios puntos con coordenadas enteras:

Por ejemplo: **(5 , 9)**

entonces la ecuación es $x \cdot y = 5 \cdot 9 = 45$

Si es posible buscamos otros puntos para confirmar.

11. Dibuja la gráfica de la ecuación $x \cdot y = -4$

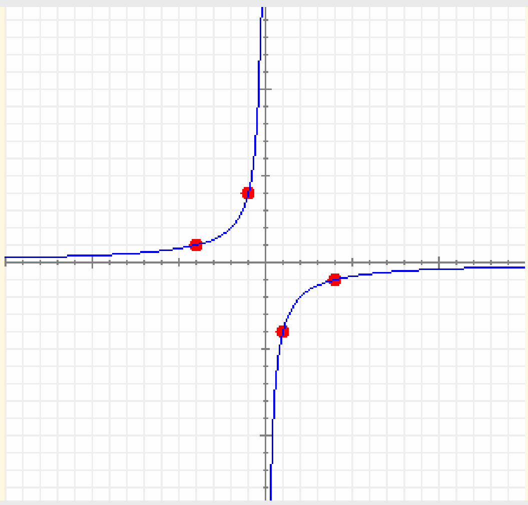
Como k es negativa la gráfica tiene que estar en el segundo y cuarto cuadrantes.

Buscamos uno o varios puntos con coordenadas enteras cuyo producto sea -4 y tenemos en cuenta la simetría de la función.

Por ejemplo, pasa por **(-4 , 1)**

y por **(4 , -1)**

Si es posible buscamos más puntos.



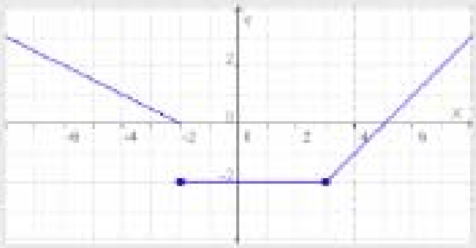
EJERCICIOS resueltos

12. En las siguientes funciones, definidas a trozos, calcula las imágenes de los valores de x indicados.

a) $f(x)=\begin{cases} -0{,}5x-1 & \text{si} \quad x<-2 \\ -2 & \text{si} \quad -2\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

x=-4 se sustituye arriba (-4<-2)
x=-2, x=1 y x=3 se sustituyen en la del medio, ya que están en [-2,3].
x=6 se sustituye abajo pues 6>3.

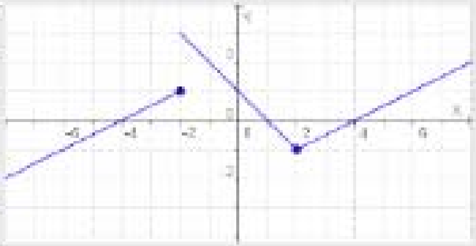
x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



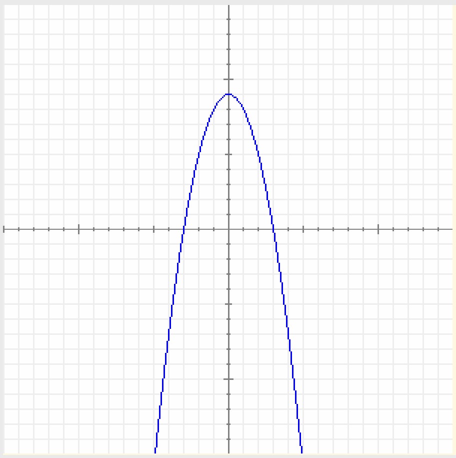
b) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+2 & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x+1 & \text{si} \quad -2<x<2 \\ 0{,}5x-2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

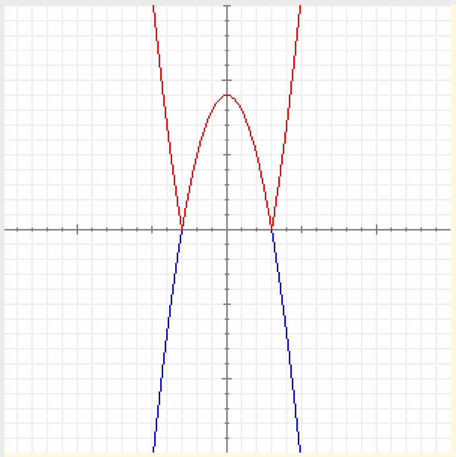
x=-6, x=-2 se sustituye arriba.
x=0 se sustituye en la del medio, ya que están en -2<0<2.
x=2, x=4 se sustituye abajo.

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



13. La imagen adjunta se corresponde con la gráfica de la función $y=-x^2+9$. Dibuja la gráfica que corresponde al valor absoluto de esta función.

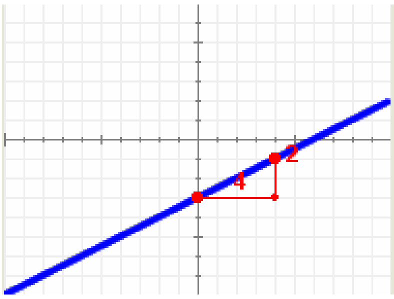




La línea roja de la derecha representa la gráfica buscada. Recuerda que el valor absoluto de un número coincide con el número si éste es positivo y con su opuesto si el número es negativo.

Para practicar

1. Determina la ecuación de la función cuya gráfica es la siguiente, indicando si se trata de una función lineal o afín.



2. Dibuja la gráfica de la función **y=-2x+5**

3. Halla las coordenadas del punto de corte de las rectas cuyas ecuaciones son:
f: y = x + 9 **g: y = 3x + 13**

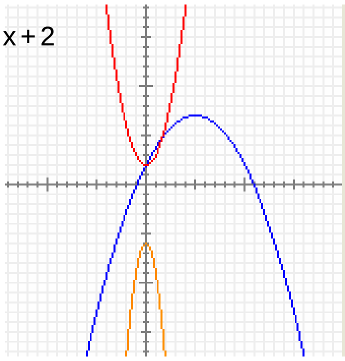
4. Halla la ecuación de la función cuya gráfica es paralela a la de la función **y = 4x – 2** y pasa por el punto **P(-1,4)**

5. Halla la ecuación de la función cuya gráfica pasa por los puntos
P(-2,7) y Q(-1,4)

6. Dibuja la gráfica de la función **$y=x^2$-1**.

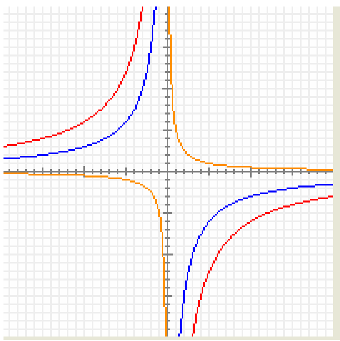
7. Asocia cada gráfica con su ecuación:

a) $y=-0{,}2x^2+2x+2$
b) $y=-3x^2+6$
c) $y=x^2+2$



8. Asocia cada gráfica con su ecuación:

a) x·y = -60
b) x·y = -30
c) x·y = 5

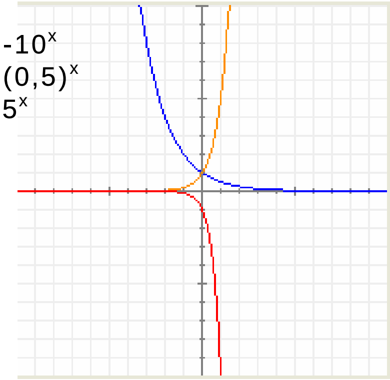


9. Los números de la tabla adjunta corresponden a cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales. Rellena los huecos que quedan y escribe la ecuación de la función que relaciona a estas dos magnitudes.

x	y
2	40
	-320
5	16
-8	
	-8
-20	

10. Asocia cada gráfica con su ecuación:

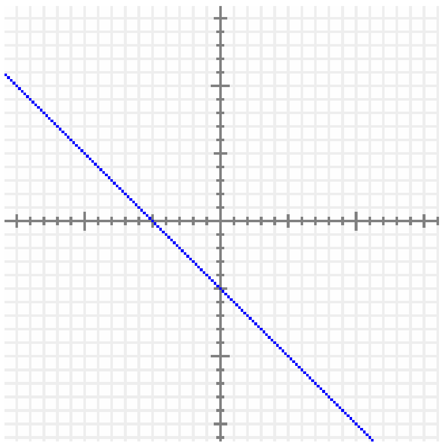
a) $y = -10^x$
b) $y = (0{,}5)^x$
c) $y = 5^x$



11. Dibuja la gráfica de la función:

$$y = \begin{cases} -x-5 & si \quad x \leq -1 \\ +4 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

12. La gráfica adjunta corresponde a una cierta función y=f(x). Dibuja la gráfica de la función y=|f(x)|.



13. En cierta gasolinera el precio de un litro de gasolina es de 1,04€. Un día deciden subir el precio un 1,66%. Unos días después deciden incrementar otra vez el precio un 3,18% sobre el último precio. Calcula el precio final y el porcentaje de aumento sobre el precio inicial.

14. El precio de cierto artículo en un centro comercial es de 601€. En las rebajas de enero deciden aplicarle un descuento del 13%. Al llegar febrero, todavía quedan existencias, por lo que deciden aplicarle un nuevo descuento del 11% sobre el precio que tenía en enero. Calcula el precio final y el descuento total sobre el valor inicial.

15. Si una compañía de teléfonos cobra 12,14€ por hablar durante 2 minutos y 12,70€ por hablar durante 10 minutos, calcula la cuota fija mensual que cobra así como el coste por minuto. Calcula también el importe de un recibo mensual si se ha hablado durante 22 minutos.

16. Una avioneta tiene combustible para 4 horas, viajando a una velocidad constante de 270 km/h. Al despegar, el piloto observa que hay viento a favor que le permite volar a 318 km/h con el mismo gasto, pero debe tener en cuenta que a la vuelta solo podrá ir a 222 km/h. ¿Cuál es la distancia máxima a la que puede alejarse?

17. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima cuyo perímetro es igual a 436 metros.

18. Un móvil recorre un trayecto de 265 km con velocidad constante. Escribe la ecuación de la función que relaciona la velocidad del móvil con el tiempo empleado en recorrer ese trayecto. Después calcula el tiempo si la velocidad es de 50 km/h y calcula la velocidad si el tiempo empleado es de 8 horas.

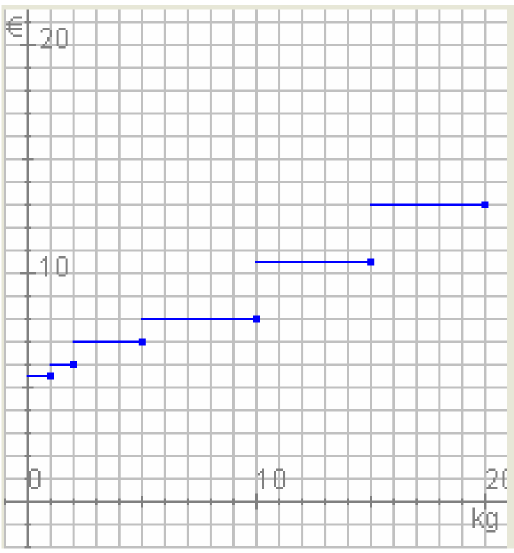
19. Un grifo con un caudal de 7 litros por minuto tarda 15 minutos en llenar un depósito. Halla la ecuación de la función que relaciona el tiempo que tarda en llenarse el depósito con el caudal del grifo. Dibuja su gráfica y calcula el tiempo que tardaría en llenarse si el caudal del grifo fuera de 14 litros por minuto.

20. El IPC (Índice de Precios al Consumo) es una medida porcentual de la variación de los precios de un año a otro. Si el IPC se mantiene constantemente igual a 1,9% durante 5 años, un producto que inicialmente valía 655€ ¿qué precio tendrá al cabo de esos años?

21. Hemos comprado un coche por 17739€. Si el precio de venta en el mercado de segunda mano se deprecia un 14% anual, ¿cuál será el precio del coche al cabo de 11 años?

22. Tenemos un bloque de hielo a –24ºC de temperatura. Lo ponemos a calentar en un recipiente y tarda 10 minutos en alcanzar los 0ºC. Se mantiene 6 minutos a esa temperatura hasta que se licua totalmente. Luego tarda 7 minutos en alcanzar la ebullición a 100ºC y otros 10 minutos en evaporarse completamente, periodo durante el cual mantiene la temperatura constante a 100ºC. Halla la ecuación que relaciona la temperatura del agua en el recipiente con el tiempo transcurrido y dibuja su gráfica. Después calcula cuánto se tarda en alcanzar una temperatura de 25ºC y qué temperatura se alcanza al cabo de 25 minutos.

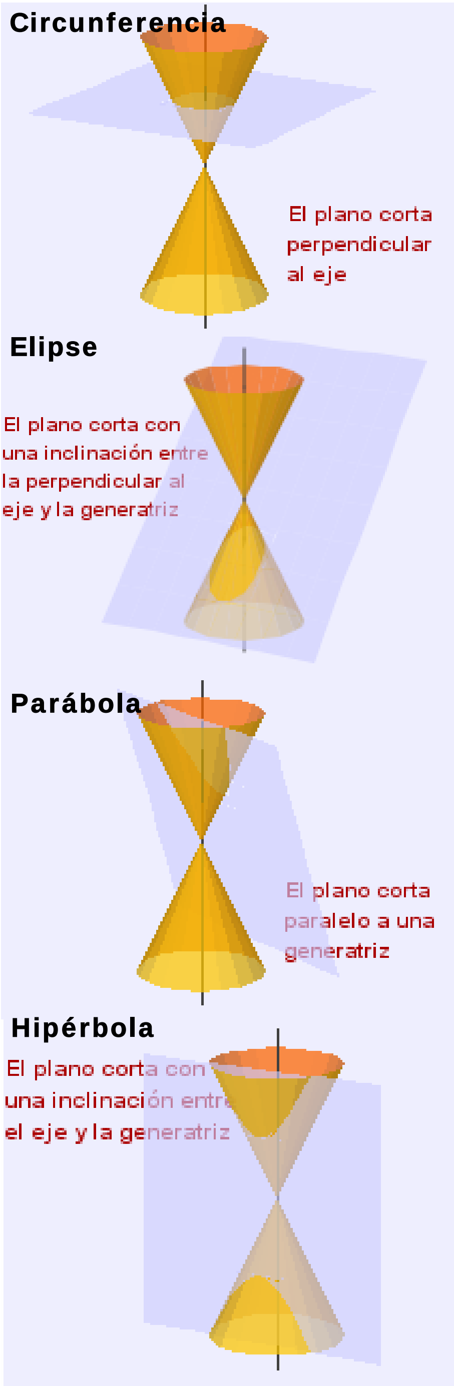
23. La gráfica adjunta describe el coste de enviar un paquete por correo en función del peso de dicho paquete. Escribe la función correspondiente a esta gráfica y averigua el precio de enviar un paquete de 17 kg.



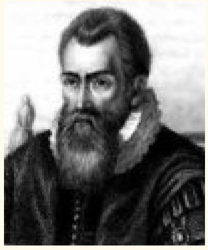
Para saber más

Las cónicas

La hipérbola y la parábola pertenecen a una familia de curvas llamadas **cónicas**, a la que también pertenecen la elipse y la circunferencia. Se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano:



Logaritmos



El **logaritmo** de un número, y, en una cierta base, b, es el número, x, al que hay que elevar b para obtener y, es decir:

$$\log_b y = x \text{ equivale a } y = b^x$$

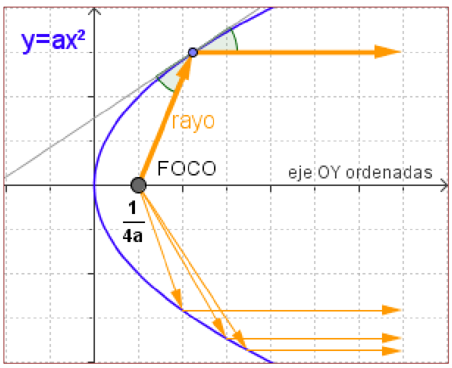
Informalmente, decimos que el logaritmo es la operación contraria de la exponenciación. El cálculo con logaritmos se incia de forma sistemática en el siglo XVII con el matemático inglés John Napier.

En la página inicial se nos preguntaba cuánto se tardaría en alcanzar una población de un millón de microbios. Se trata de resolver la ecuación:

$$3^x = 1.000.000$$

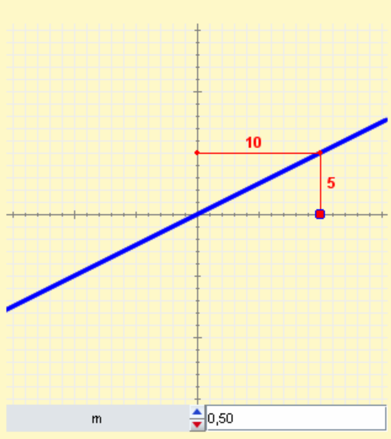
o lo que es lo mismo, ***calcular el logaritmo en base 3 de un millón***. Si usas la calculadora tienes que hallar el logaritmo de un millón y dividirlo por el logaritmo de 3 y obtendrás un valor comprendido entre 12 y 13 horas.

En las parábolas todos los rayos que parten del **foco** o inciden en él son reflejados en la misma dirección. De ahí que los faros de los coches o las antenas tengan forma parabólica.



Recuerda lo más importante

Funciones lineales



ECUACIÓN: $y = m \cdot x$

$y = 0{,}5 \cdot x$

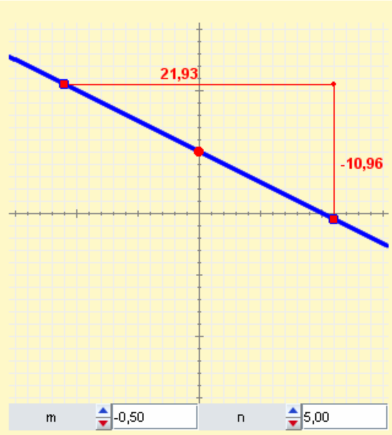
Su gráfica es una recta que:

- Pasa por el origen
- Crece si m>0
- Decrece si m<0
- Es horizontal si m=0

m es la PENDIENTE y coincide con el cociente entre la ordenada y la abscisa de cualquier punto de la recta.

Relaciona dos magnitudes DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Funciones afines



ECUACIÓN: $y = m \cdot x + n$

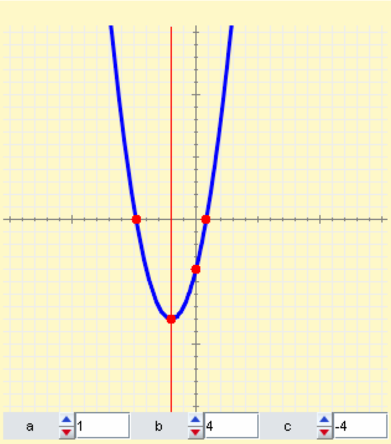
$y = -0{,}5 \cdot x + 5$

Su gráfica es una recta que:

- Pasa por (0,n)
- Crece si m>0
- Decrece si m<0
- Es horizontal si m=0

m es la PENDIENTE y coincide con el cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas entre dos puntos cualesquiera de la recta.

Funciones cuadráticas



ECUACIÓN: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$y = x^2 + 4x - 4$

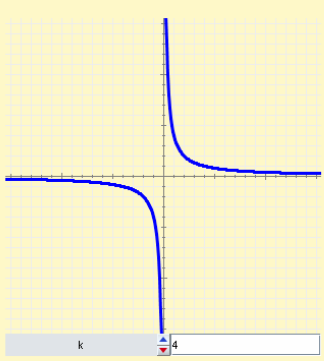
Su gráfica es una parábola:

- Pasa por (0,c)
- Abierta hacia arriba si a>0
- Abierta hacia abajo si a<0
- Más cerrada cuanto mayor es a en valor absoluto.

Eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$

Los puntos de corte con el eje X se obtienen igualando la ecuación a cero.

Función de proporcionalidad inversa



ECUACIÓN:

$x \cdot y = k$ o bien $y = \frac{k}{x}$

$x \cdot y = 4$

Su gráfica es una hipérbola:

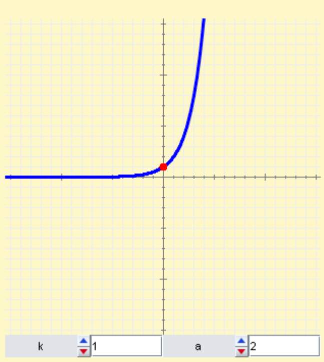
Sus ramas están
- en los cuadrantes 1 y 3 si k>0
- en los cuadrantes 2 y 4 si k<0

Tienes dos asíntotas.

Es simétrica con respecto al punto de corte de sus asíntotas.

Es discontinua.

Funciones exponenciales



ECUACIÓN: $y = k \cdot a^x$

$y = 2^x$

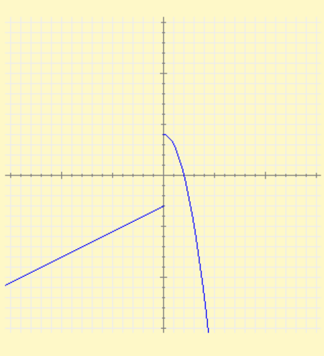
Solo está definida para valores de a mayores que cero y distintos de uno. k debe ser distinta de cero.

- Creciente si k>0 y a>1 ó k<0 y a<1.
- Decreciente si k<0 y a>1 ó k>0 y a<1.

Corta al eje Y en (0,k)

Tienes una asíntota.

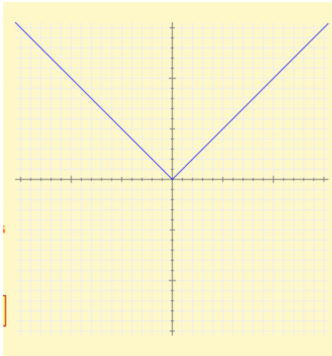
Funciones definidas a trozos



Son funciones que están definidas por ecuaciones distintas en diferentes zonas de su dominio.

Se usan para explicar las propiedades de las funciones y para describir situaciones en las que cierta magnitud cambia bruscamente su forma de comportarse.

Función valor absoluto

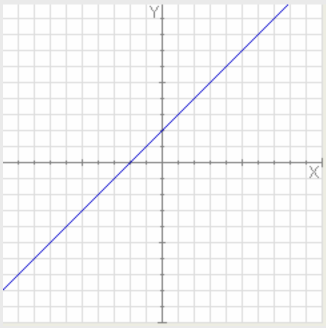


ECUACIÓN: $y = |x|$

$$y = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Es un ejemplo de función definida a trozos

Autoevaluación



1. ¿Cuál es la pendiente de la recta de la imagen?

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a la recta y=0,5x+2 que pasa por el punto (1,0)?

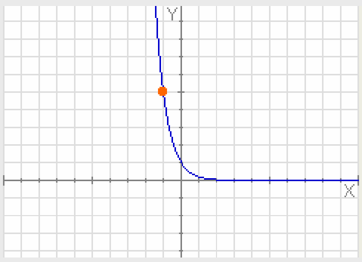
3. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,0) y B(3,3).

4. Calcula las coordenadas del punto de corte de las rectas r: y=2,5x+6,5 y s: y=-2x-7

5. Calcula las coordenadas del vértice de la parábola y = x^2 + 2x + 5.

6. Calcula las coordenadas de los puntos en los que la parábola y = $-x^2+3x+4$ corta a los ejes de coordenadas.

7. Halla la ecuación de la función de proporcionalidad inversa cuya gráfica pasa por el punto P(-3,2) y dibuja la gráfica.



8. Halla la ecuación de la función exponencial de la figura con ayuda del punto que está marcado.

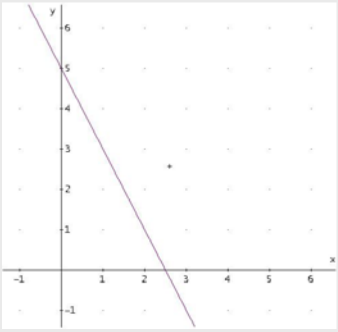
9. Ponemos un capital de 100.000€ al 7% de interés compuesto. ¿A cuánto ascenderá al cabo de 13 años? (Redondea a euros)

10. Calcula |f(2)| sabiendo que

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & si\, x < 3 \\ 2x-1 & si\, x \geq 3 \end{cases}$$

Soluciones de los ejercicios para practicar

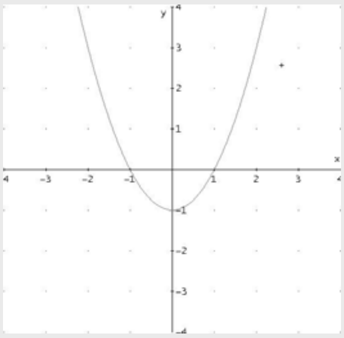
1. $y = \frac{1}{2}x - 3$

2. 

3. (-2,7)

4. y=4x+8

5. y= -3x+1

6. 

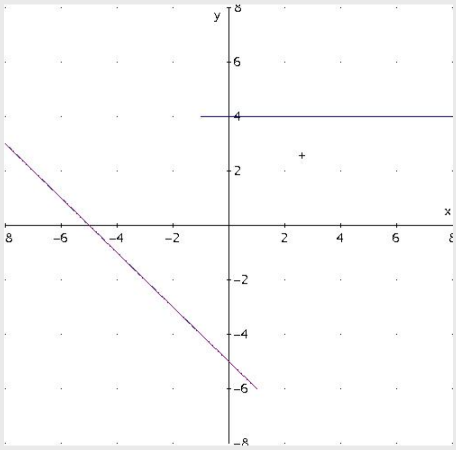
7. a ---- azul
b ---- amarillo
c ---- rojo

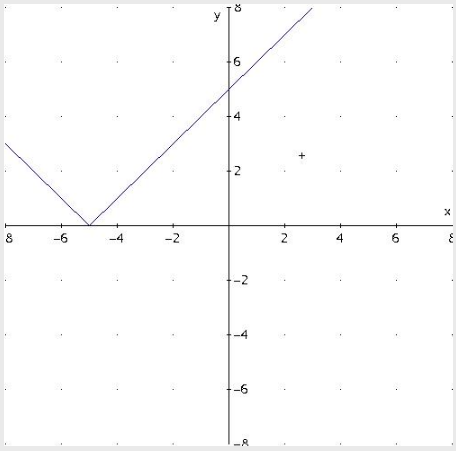
8. a ---- rojo
b ---- azul
c ---- amarillo

9. x·y = 80

x	y
2	40
-0,25	-320
5	16
-8	-10
-10	-8
-20	-4

10. a ---- rojo
b ---- azul
c ---- amarillo

11. 

12. 

13. Precio final: 1,09€; aumento: 4,89%

14. Precio final: 465,35€; descuento: 22,57%

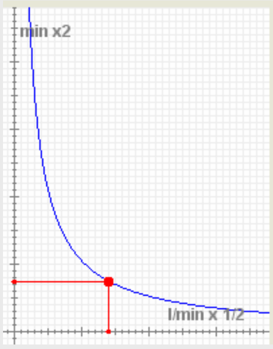
15. Cuota fija: 12€; minuto: 0,07€; 22 minutos: 13,54€.

16. 522,93 km

17. b = h = 109 m

18. x·y=265; x=5,3 h; y=33,13 km/h

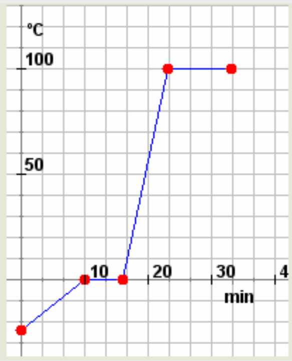
19. x·y=105; 7,5 minutos



20. 719,77 €

21. 3376,08 €

22.



23. continuación
Tarda 17,75 minutos en llegar a 25 ºC.
A los 25 minutos la temperatura es 100 ºC

$$y = \begin{cases} \frac{24}{10}x - 24 & si\ x \geq 0 \ \ y \ \ x < 10 \\ 0 & si\ x \geq 10 \ \ y \ \ x < 16 \\ \frac{100}{7}(x - 16) & si\ x \geq 16 \ \ y \ \ x < 23 \\ 100 & si\ x \geq 23 \ \ y \ \ x < 33 \end{cases}$$

24.

$$y = \begin{cases} 5{,}5 & si\ x \leq 1 \\ 6 & si\ x > 1 \ \ y \ \ x \leq 2 \\ 7 & si\ x > 2 \ \ y \ \ x \leq 5 \\ 8 & si\ x > 5 \ \ y \ \ x \leq 10 \\ 10{,}5 & si\ x > 10 \ \ y \ \ x \leq 15 \\ 13 & si\ x > 15 \ \ y \ \ x \leq 20 \end{cases}$$

Enviar un peso de *17* kg cuesta *13,00 €* porque ese peso corresponde a la zona *6* .

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 1

2. y=0,5x-0,5

3. y=1,5x-1,5

4. (-3,-1)

5. (-1,4)

6. x1=-1; x2=4; y=4

7. x·y=-6

8. $y=(0,2)^x$

9. 240.985 €

10. 6

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

Estadística

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir los conceptos de población y muestra.
- Diferenciar los tres tipos de variables estadísticas.
- Hacer recuentos y gráficos.
- Calcular e interpretar las medidas estadísticas de centralización más importantes.
- Calcular las principales medidas de dispersión.
- Entender la importancia de la elección de la muestra para que sea representativa.

Antes de empezar

Recuerda

El curso pasado ya estudiaste estadística, y en numerosas ocasiones has hecho estadística aunque no te hayas dado cuentas de ello. Veamos algunos ejemplos.

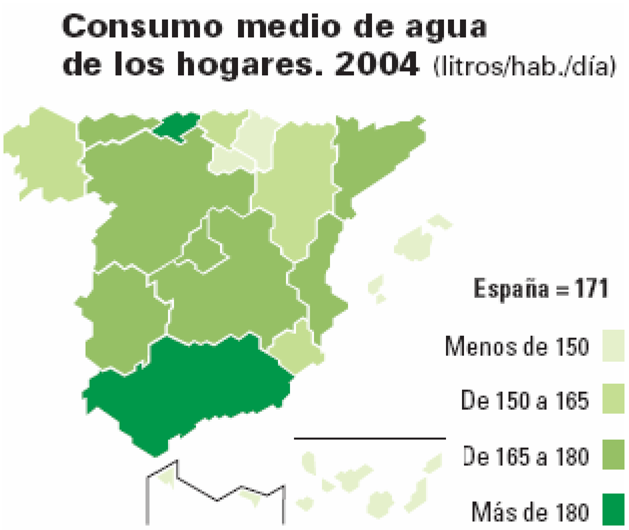
Nota media

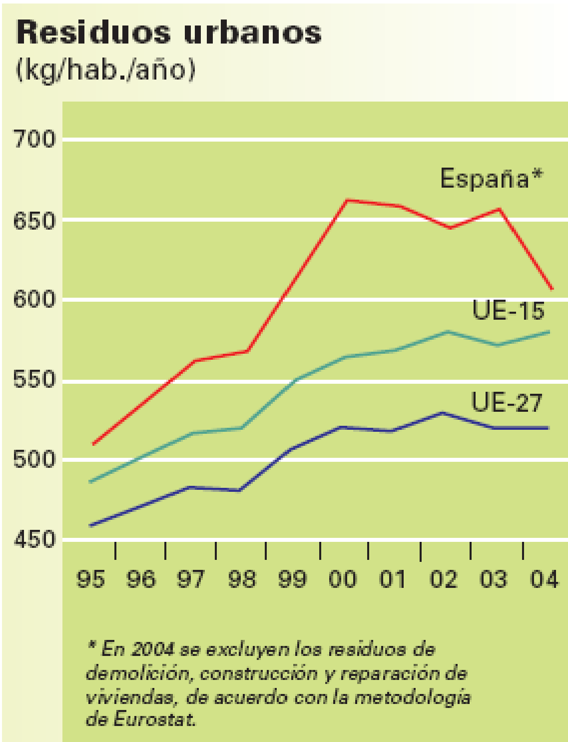
A lo largo de un curso escolar tendrás muchas ocasiones donde calcular este valor. Si una nota depende de dos exámenes y en uno tienes un 4, intentarás sacar al menos un 6 en la otra.

Al final del instituto, las medias del bachillerato y de la prueba selectividad. Comparaciones con la media local o nacional. Las medias de corte para determinadas carreras

Fútbol

El jugador que más goles ha marcado, el portero que menos ha encajado. La clasificación de la liga. La mejor mitad de liga. Los puestos de competiciones europeas, los de descenso, nº de veces internacional, nº de fases finales, minutos jugados, tiros a puerta, faltas.





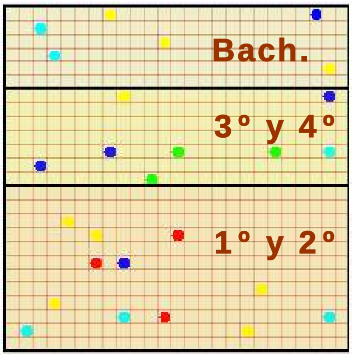
1. Estadística descriptiva

Población y muestra.

Población es el conjunto de individuos, con alguna característica común, sobre el que se hace un estudio estadístico.

En la práctica es frecuente tener que recurrir a una muestra para inferir datos de la población. La **muestra** es un subconjunto de la población, seleccionada de modo que ponga de manifiesto las características de la misma, de ahí que la propiedad más importante de las muestras es su representatividad.

El proceso seguido en la extracción de la muestra se llama **muestreo**



Si cada cuadrito representa a cada uno de los alumnos de un instituto ficticio y se les pregunta sobre su color favorito, el total de los cuadros es la población, 625 alumnos, y los 26 encuestados constituyen la muestra.

Variables estadísticas

La característica a estudiar en una población es la **variable estadística**.

Las variables estadísticas pueden ser esencialmente de dos tipos **cualitativas** y **cuantitativas.**

Las variables cualitativas son las que no aparecen en forma numérica sino como una categoría o atributo.

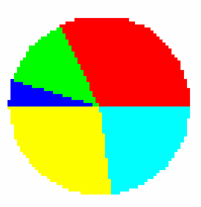
Las variables cuantitativas son las que pueden expresarse numéricamente, y a su vez pueden ser:

- ✓ Cuantitativas discretas, si sólo pueden tomar un número finito de valores.
- ✓ Cuantitativas continuas cuando pueden tomar cualquier valor de un intervalo.

- El color de los ojos, el queso preferido, el continente donde vives, son **variables estadísticas cualitativas**.
- El nº de ordenadores en casa, o de televisores y el nº de habitantes por vivienda, por ejemplo, son variables estadísticas **cuantitativas discretas.**
- El peso, la altura, la velocidad, la densidad, la presión, son **variables estadísticas cuantitativas continuas.**

Los datos:

xi	fi
● (rojo)	7
● (verde)	3
● (azul)	1
● (amarillo)	6
● (cian)	5
Total	22



Tienen este diagrama de sectores

Gráficos en variables cualitativas.

El diagrama de sectores es el mas indicado para este tipo de información. El porcentaje de datos de cada valor en una muestra se corresponde con el mismo porcentaje de sector de un círculo. Así por ejemplo, si los datos son A, A, A, A, A, B, B, B, C y C. Las frecuencias son (A,5), (B,3) y (C,2), los porcentajes serán (A,50%), (B,30%) y (C,20%) los que corresponde a un gráfico de sectores con (A, 180º), (B,108º) y (C, 72º).

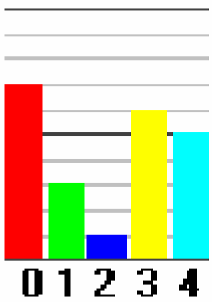
$$\frac{\text{frecuencia}}{\text{nº total de datos}} = \frac{\text{grados del sector}}{360}$$

Gráficos en variables discretas.

Diagrama de barras. Bastará que observes un ejemplo.

A los datos,

1 2 4 4 3
3 3 3 0 0
0 4 0 1 0
0 3 4 1 3
0 4

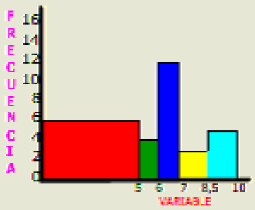


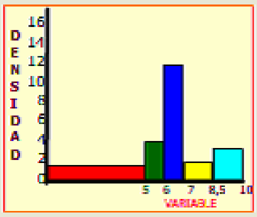
les corresponde el gráfico de la derecha.

Intervalos	Recuento	fr.	Dens.
[0 5)	𝍸 |	6	1,2
[5 6)	||||	4	4
[6 7)	𝍸 𝍸 ||	12	12
[7 8,5)	|||	3	2
[8,5 10)	𝍸	5	3,3

RECUENTO DE LAS NOTAS EN 30 EXÁMENES

En el diagrama de frecuencias el área mayor corresponde a la columna roja que no es la de más frecuencia





$$\text{Densidad} = \frac{\text{Frecuencia}}{\text{Longitud del intervalo}}$$

Las **áreas** de las barras-densidad resultan **proporcionales a las frecuencias** en el intervalo

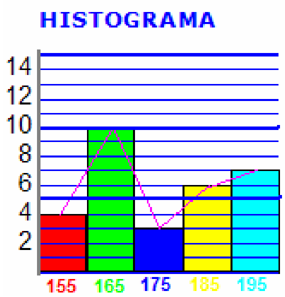
Gráficos en variables continuas.

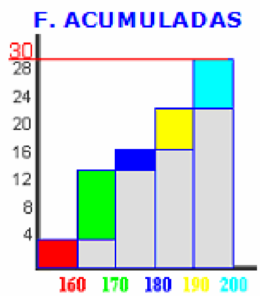
Histograma. Los datos se representan por rectángulos cuya base es la amplitud del intervalo representado y con la altura que nos indica la frecuencia absoluta, si todos los intervalos son de la misma amplitud. Si no es el caso, las alturas se calculan de manera que las áreas sean proporcionales a las frecuencias absolutas. A la izquierda tienes un ejemplo hecho.

Polígono de frecuencias. Uniremos los centros de la parte superior de todos los rectángulos para obtenerlo.

También se suele dibujar el histograma de las **frecuencias acumuladas**, en cada dato se acumula la frecuencia de los datos anteriores.

[150, 160]→4
[160, 170]→10
[170, 180]→3
[180, 190]→6
[190, 200]→7





EJERCICIOS resueltos

1. Clasifica las los siguientes ejemplos de variables estadísticas: Longitud de un camión, Carga máxima, nº de ruedas, nº de ejes, tipo de camión, marcas de neumáticos, tipo de tapicería, nº de puertas, altura máxima.

Cualitativas: Tipo de camión, marcas de neumáticos, tipo tapicería

C. discretas: Nº de ruedas, nº de ejes, nº de puertas

C. continuas: Longitud de un camión, Carga máxima y altura máxima.

2. Calcula los grados que corresponden a cada valor en un gráfico de sectores hecho a partir de los datos: R, R , V , V , V , V , V , A, A y A

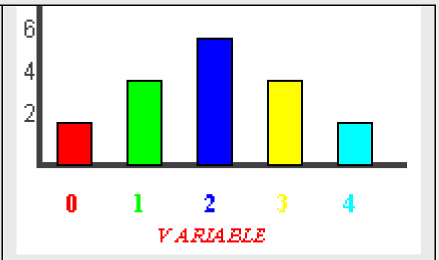
Hacemos el recuento R → 2, V → 5 y A→3 Y calculamos

$\frac{2}{10} = \frac{\text{Grados R}}{360}$, $\frac{5}{10} = \frac{\text{Grados V}}{360}$ y $\frac{3}{10} = \frac{\text{Grados A}}{360}$ y obtenemos

Grados R = 72, Grados V = 180 y Grados A =108

3. Agrupa los datos siguientes y haz un diagrama de barras adecuado. Datos = { 0 1 0 2 3 4 1 2 2 1 2 2 3 4 3 2 1 3 }

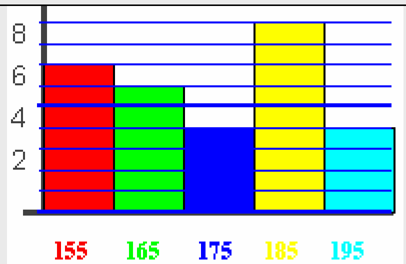
Marca	Frecuencia
0	2
1	4
2	6
3	4
4	2



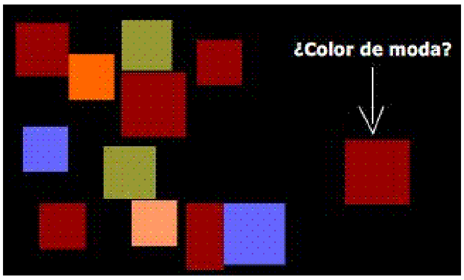
4. Clasifica los datos en intervalos y dibuja un histograma adecuado.

180	197	154	181	189	162	152	162	167	190
189	160	166	197	187	194	152	181	173	154
177	184	186	174	177	159	158	189	160	150

[150, 160]	155→ 7
[160, 170]	165→ 6
[170, 180]	175→ 4
[180, 190]	185→ 9
[190, 200]	195→ 4



2. Medidas de centralización



Media, mediana y moda.

Un conjunto N de observaciones, N números, puede que por si solo no nos diga nada. En cambio, si además nos dicen que están situados alrededor de uno o varios valores centrales ya tenemos una referencia que sintetiza la información.

Media. La suma de los N números dividida entre N.
Por ejemplo, para **3**, **4** y **5**, (**3**+**4**+**5**)/3 = 12/3 = 4;
para **1**, **1**, **4**, **8**, **8** y **8**, (**1**·2+**4**+**8**·3)/6=5.

$$\text{Media} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + \ldots + x_nf_n}{N}$$

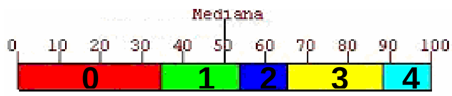
Moda. Si una observación se repite más que cualquier otra, será considerada la moda de esos datos. Por ejemplo, si tenemos las observaciones 6,7,8,6,7,6,8,6,9 y agrupamos los datos 6→4, 7→2, 8→2 y 9→1 vemos claramente que el valor 6 aparece mas que ningún otro. En este caso la moda es 6.

En el caso de variable continua, consideraremos por moda a la marca del intervalo de mayor frecuencia, cuando esto ocurra. También puede ocurrir que haya dos modas o que no haya ninguna que destaque.

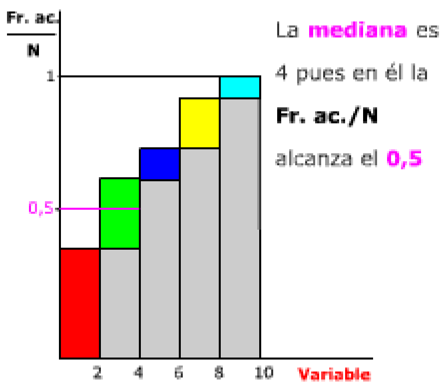
Mediana. El número tal que la mitad de las observaciones son mayores que él y la otra mitad menores.

En general, para pocos datos lo mejor es proceder según el ejemplo de la izquierda, según sea una cantidad para o impar.

Para cantidades mayores, habrá que agrupar los datos primero en una tabla. Y determinar segmentos de longitud proporcional a su frecuencia, disponerlos de forma lineal y marcar el centro como muestra el siguiente ejemplo.



En este otro gráfico vemos indicada la mediana en un diagrama de Frecuencias relativas acumuladas:



Por ejemplo, si tenemos las observaciones 6,7,8,6,7,6,8,6,9 y agrupamos los datos vemos claramente que el valor 6 aparece mas que ningún otro. En este caso la **moda** es 6.

xi→fr
6→4
7→2
8→2
9→1

Si ordenamos los datos, y dado que el nº de datos es impar justo el 7 queda en el centro.

6 6 6 6 7 7 8 8 1

Si los datos fueran 6,7,8,6,7,6,8,6,5 una vez ordenados, y como hay una cantidad par de datos, dos de ellos ocuparían el centro:

5 6 6 6 6 7 7 8 8 1

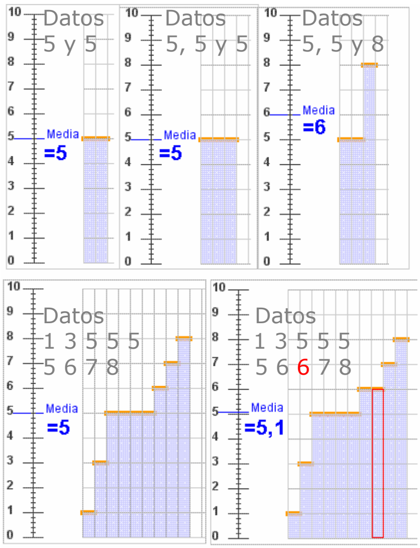
y la mediana será (6+7)/2 = 6.5

Media. Evolución al añadir y/o cambiar un dato

1 Para los datos 5 y 5 la media es 5. Si añadimos un 5 se mantiene en 5. Si añadimos un 8 la media pasa a ser 6. (Figura derecha).

2 Si tenemos 9 datos con media 5, necesitamos añadir un 6 para que la media pase a ser 5,1. Si tenemos 19 datos con media 5, necesitamos un dato de valor 7 para que la media suba a 5,1. (Figura derecha).

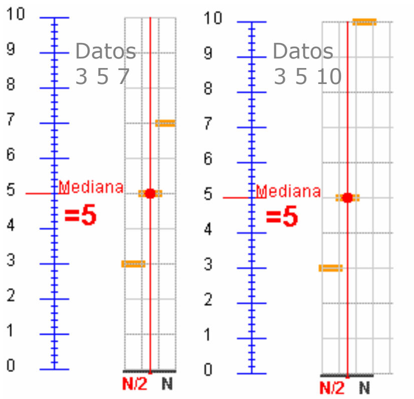
3 Para un conjunto de datos con media 5, si añadimos otro con media 5, por ejemplo 6 y 4, el nuevo conjunto conserva la media.



Mediana. Evolución al añadir y/o cambiar un dato

1 La mediana, para los datos 2, 3 y 4 es Me=3. Si cambiamos el 4 por 5 o por 6 o por cualquier otro valor mayor sigue siendo Me = 3.

2 En cambio, si añadimos otro dato y tenemos 2, 3, 4 y 4, por ejemplo, la Me = 3,5. Y si ahora añadimos un quinto valor, un 4 o un 5 o un 6 o cualquier otro mayor que 4, la mediana en 2,3, 4, 4 y ?? pasa a ser 4. Da igual el valor ?? es 5, 10 o 25**.**



Para ver la mediana se traza una vertical desde el eje horizontal en N/2

Media y mediana comparadas

Para los datos 4 y 6 la media y la mediana coinciden en 5. Añadir un 8 o un 11 da lo mismo para la mediana, que pasa a ser en ambos casos 6. Sin embargo la media con un 8 pasa a ser 6 y con un 11 pasa a ser 7. Los valores 8 y 11 se consideran observaciones atípicas, están distanciados del resto de valores, tiran de la media y no afectan a la mediana. Si los datos estuvieran repartidos simétricamente respecto a un valor, ese valor seria a la vez la media y la mediana. En cambio, si los valores a un lado de la mediana están más alejados de ella que los del otro lado, la media se desplaza hacia esos valores alejados que tiran de ella. Hay una asimetría.

Por ejemplo, si tenemos las observaciones

1. 20, 24 y 28.

   Me = 24

2. Y para 20, 24, 28 y 30

   Me = (24+28)/2 = 26

3. Para 20, 24, 28 y 100

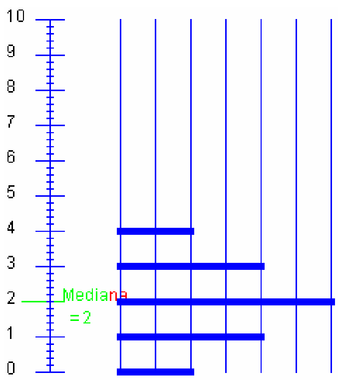
   Me = (24+28)/2 = 26

En cambio la media no se comporta de la misma forma para los mismos datos

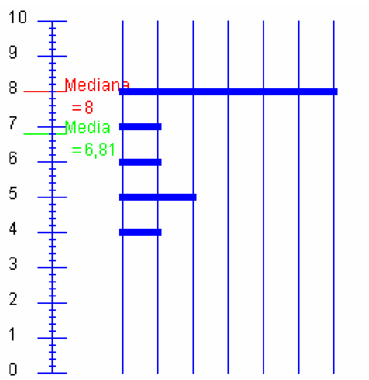
1 $\overline{X} = 24$

2 $\overline{X} = 25{,}5$

3 $\overline{X} = 43$



Datos simétricos
Mediana igual a la Media



Datos atípicos
Mediana distinta de la Media

EJERCICIOS resueltos

5. Calcula la media en cada caso:

a) 4, 6, 8

b) 4, 6, 8, 6

c) 100, 120, 180, 200

Soluciones: a) (4+6+8)/3 = 6

b) (4+6+8+6)= 24/4 = 6

c) (100+120+180+200)/4 = 150

6. Calcula la media en cada caso:

a

Marca	Fr
10	2
20	4
30	3
40	2

b

Marca	Fr
100	2
200	4
300	3
400	2

a) $\overline{X} = \dfrac{10\cdot 2 + 20\cdot 4 + 30\cdot 3 + 40\cdot 2}{11} = 24{,}54$

b) $\overline{X} = \dfrac{100\cdot 2 + 200\cdot 4 + 300\cdot 3 + 400\cdot 2}{11} = 245{,}45$

7. Determina la moda y la mediana

a) 5,6,6 c) 1,2,3,4,2

b) 1,1,2,3 d) 3,2,3,2,2,2

Soluciones: a) Me=6, Mo=6 c) Me=2 Mo=2

b) Me=1,5 Mo=1 d) Me=2 Mo=2

8. Calcula la moda y la mediana en cada caso:

a

Marca	Fr
10	2
20	4
30	3
40	2

b

Marca	Fr
100	2
200	3
300	4
400	1

Soluciones:

a) Me=20 Mo=4

b) Me=250 Mo=300

9. Se han medido las alturas en cm de un grupo de 30 personas obteniéndose los datos siguientes:

Altura en cm	f_i
(150,160]	7
(160,170]	9
(170,180]	10
(180,190]	3
(190,200]	1

Calcula la media, la moda y la mediana.

a) Completamos la tabla añadiendo una columna para x_i y otras dos para $x_i\cdot f_i$ y para las frecuencias acumuladas.

Altura en cm	x_i	f_i	$x_i\cdot f_i$	F_i	
(150,160]	155	7	1085	7	← Me
(160,170]	165	9	1485	16	← Mo
(170,180]	175	10	1750	26	
(180,190]	185	3	555	29	
(190,200]	195	1	195	30	
	SUMA:	30	5070		

$\overline{x} = \dfrac{5070}{30} = 169$ Me = 165 Mo = 175

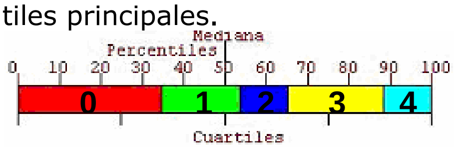
3. Medidas de posición

Cuartiles y percentiles

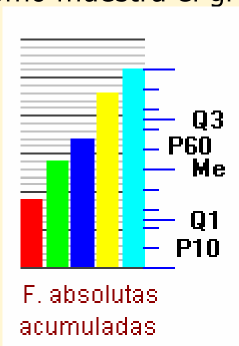
Dado un conjunto de datos numéricos correspondientes a un estudio estadístico, si los ordenamos de forma creciente y consideramos el que esté en el centro, nos estaremos fijando en la **mediana**. Es el primero que supera (o iguala) al 50% de valores, pero también podemos fijarnos en otras posiciones:

- Si nos fijamos en el primer valor que supera al 25% o al 75%, estamos hablando del **primer** y **tercer cuartil, Q_1 y Q_3**.
- Para otros valores como el 10%, o el 80% hablamos de **percentiles, P_{10} y P_{80}** .

Ejemplo. Para la variable de valores 0, 1, 2, 3, 4, y frecuencias 0→9, 1→5, 2→3, 3→6, 4→3, dibujamos barras de longitud proporcional a las frecuencias y dividimos el total en partes iguales: en dos partes para la mediana, cuatro para los cuartiles y 10 para los percentiles principales.



También podemos hacer un diagrama de frecuencias acumuladas y dividir en partes iguales como muestra el gráfico.

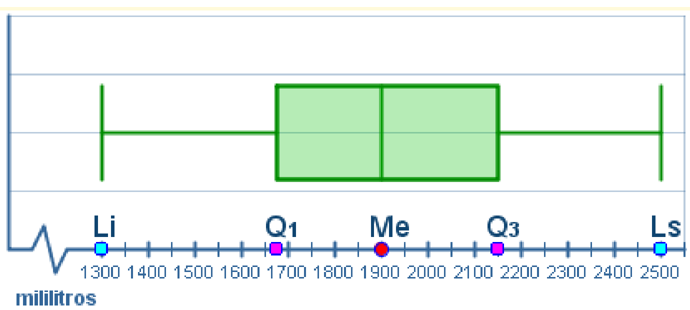


Diagramas de caja y bigotes

A partir del valor de la mediana y los cuartiles se pueden representar las distribuciones estadísticas mediante los llamados “diagramas de caja y bigotes”.

Veamos como se construye con los datos de la tabla de la derecha. Una vez ordenados los datos, se calculan los valores mínimo y máximo, los cuartiles y la mediana.

mín=1300 Q_1=1675 Me=1900 Q_3=2150 máx=2500



Se sitúan estos valores sobre el eje de abscisas y se dibuja la “caja” desde el primer al tercer cuartil (el recorrido *intercuartílico*), y los “bigotes” como indica la figura.

La tabla muestra el consumo diario de agua, en ml, de los 20 alumnos de una clase.

Juan	1650	Luis	**1300**	**Mín**
Luis	1300	Tere	1500	
Alma	2400	Maya	1600	
Toño	2000	Marta	1650	
Rosa	2100	Juan	1650	**Q_1**
Lupe	1700	Lupe	1700	
Paco	1900	David	1750	
Tere	1500	Pepe	1850	
Iris	1900	Alex	1900	
Pepe	1850	Iris	1900	**Me**
Marco	2000	Paco	1900	
Lisa	2200	Marco	2000	
Julio	2300	Toño	2000	
Maya	1600	Omar	2100	
Alex	1900	Rosa	2100	**Q_3**
Beto	2500	Lisa	2200	
Rita	2200	Rita	2200	
Marta	1650	Julio	2300	
Omar	2100	Alma	2300	
David	1750	Beto	**2500**	**Máx**

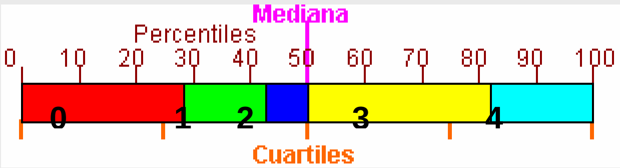
NOTA: La longitud de los bigotes no debe exceder una vez y media la de la caja, si hay valores extremos que superan esa medida se dibujan como puntos aislados.

EJERCICIOS resueltos

10. Calcula la mediana, cuartiles primer y 3º, y el percentil 30 60 y 90 de los datos.

4 1 3 3 2 3 1 3 3 4 0 0 0 4 4 3 0 3 0 3 2 1 0 0 4 3 0 1

Hacemos el recuento: 0→8, 1→4, 2→2, 3→9 y 4→5 y barras de longitud proporcional a la frecuencia para cada valor. Además partimos la longitud total de la barra en 2, 4 y 10 trozos para obtener la mediana, cuartiles y percentiles, tal y como muestra la imagen.

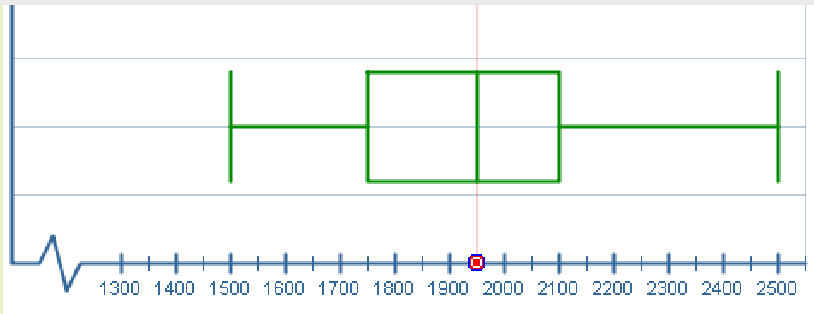


Vemos que la mediana está entre el azul y el amarillo, (3+2)/2 = 2.5, Q_1 en el rojo, Q3 en amarillo.

Q_1=0 Me=2,5 Q_3=3

P_{30}=1 P_{60}=3 y P_{90}=4

11. Analiza el siguiente diagrama de caja y bigotes y calcula, a partir de él, los valores máximo y mínimo, la mediana y los cuartiles.



Mínimo = 1500

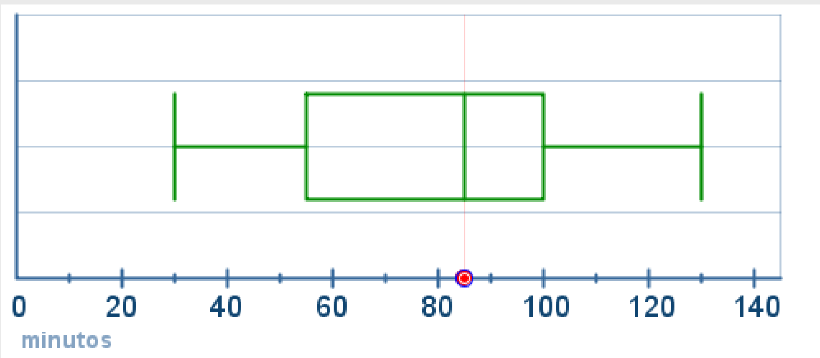
Q_1 = 1750

Me = 1950

Q3 = 2100

Máximo = 2500

12. Analiza el siguiente diagrama de caja y bigotes. Muestra los minutos que tarda en hacer efecto un medicamento en una población. Interpreta la información que presenta y responde a las preguntas.



Mínimo = 30

Q_1 = 55

Me = 85

Q3 = 100

Máximo = 130

a) ¿A qué porcentaje de la población había hecho efecto al cabo de 30 minutos?.

b) Al cabo de cuántos minutos había hecho efecto al 50 % de la población?.

c) Cuántos minutos tardó en hacer efecto al 100% de la población?

d) A qué porcentaje había hecho efecto a los 55 minutos?.

¿Cuánto tardó en hacer efecto a las tres cuartas partes de la población?

RESPUESTAS: a) Al 0%, 30 es el valor mínimo. b) a los 85 minutos (la mediana)
c) 130 minutos (valor máximo) d) 55 es el primer cuartil, al 25%
e) 100 minutos, ¾ partes son el 75%

4. Medidas de dispersión.

Varianza, Desviación típica y rango

"La estadística es una ciencia según la cual, si yo me como un pollo y tú no te comes ninguno, nos hemos comido como promedio medio pollo cada uno".

La estadística indicará que todos comen lo mismo cuando las medidas de dispersión sean todas nulas.

Rango. El intervalo definido por el menor y el mayor dato. También se llama rango a la diferencia entre el mayor y el menor de los datos.

Varianza. La media aritmética de los cuadrados de las diferencias de los datos con la media.

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi\cdot(Xi-\bar{X})^2}{n} \quad \text{que equivale a} \quad \sigma^2 = \frac{\sum fi\cdot(Xi)^2}{n} - (\bar{X})^2$$

Desviación típica. La raíz cuadrada positiva de la varianza.

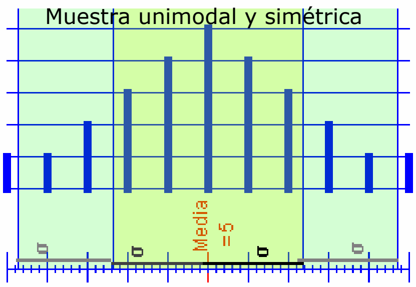
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\cdot(Xi-\bar{X})^2}{n}} \quad \text{o} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\cdot Xi^2}{n} - \bar{X}^2}$$

Medir la dispersión

Ese es el objetivo de estas medidas. Por ejemplo, los datos A= {20, 20}, B={15, 20, 20, 25} tienen la misma media, moda y mediana. En todos los casos igual a 20. Sin embargo, puedes comprobar que en ninguna de las tres medidas de dispersión definidas arriba coinciden.

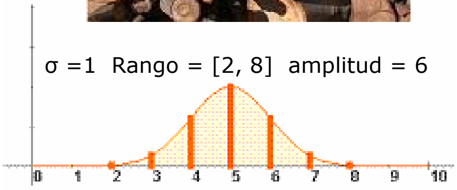
Media y desviación típica.

Para muestras unimodales (una sola moda) y casi simétricas, alrededor de la media podemos considerar un intervalo que contenga la mayoría de los datos. Por ejemplo, para una muestra con media 100 y desviación típica 10, la mayor parte de los datos estarán entre 90 y 110, aproximadamente el 68% ; entre 80 y 120 estará el 95% aproximadamente. Y casi todos entre 70 y 130. Hay una forma de distribución de datos llamada **normal** que cumple con lo anterior, y de una manera u otra, de todas las poblaciones grandes se pueden extraer datos que se ajustan a ella. En cursos superiores verás la importancia de estas distribuciones.

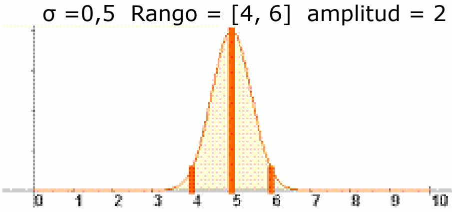



La estatura de los tributarios presenta poca dispersión


El grosor de los troncos tiene bastante dispersión



σ =0,5 Rango = [4, 6] amplitud = 2



En ambos gráficos la media, mediana y moda valen 5

En la práctica se suele usar la fórmula reducida para el cálculo de la desviación típica.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\cdot Xi^2}{n} - \bar{X}^2}$$

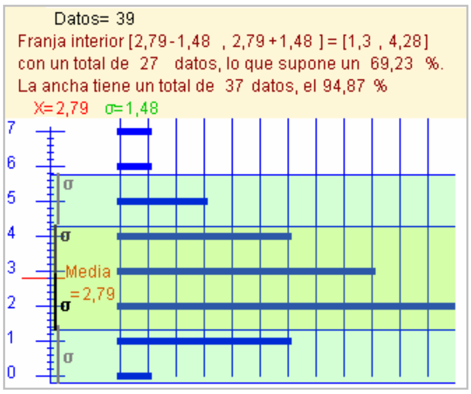
Así, para

Marca	Fr
4	3
5	3
6	2

Se tiene que la media $\bar{X} = 4,85$

y

$$\sigma = \sqrt{\frac{3\cdot4^2 + 3\cdot5^2 + 2\cdot6^2}{8} - 4,85^2}$$



cidead

EJERCICIOS resueltos

13. Calcula la media y la desviación típica en
a) 200, 250
b) 175, 275
c) 250, 250

a) $\bar{X} = \frac{250+200}{2} = 225$ $\qquad \sigma = \sqrt{\frac{(250-225)^2+(200-225)^2}{2}} = \sqrt{\frac{25^2+25^2}{2}} = 25$

b) $\bar{X} = \frac{175+275}{2} = 225$ $\qquad \sigma = \sqrt{\frac{(175-225)^2+(275-225)^2}{2}} = \sqrt{\frac{50^2+50^2}{2}} = 50$

c) $\bar{X} = \frac{250+250}{2} = 250$ $\qquad \sigma = \sqrt{\frac{(250-250)^2+(250-250)^2}{2}} = \sqrt{\frac{0^2+0^2}{2}} = 25$

14. Calcula la media y la desviación típica en:
a) 7, 5 , 3, 2, 4, 5
b) 20, 25, 20, 22, 21

a) $\bar{X} = \frac{7+5+3+2+4+5}{6} = \frac{26}{6} = 4,33$

$$\sigma = \sqrt{\frac{7^2+5^2+3^2+2^2+4^2+5^2}{6} - 4,33^2} = \sqrt{\frac{128}{6} - 18,75} = 1,59$$

b) $\bar{X} = \frac{20+25+20+22+21}{5} = \frac{108}{5} = 21,6$

$$\sigma = \sqrt{\frac{20^2+25^2+20^2+22^2+21^2}{5} - 21,6^2} = \sqrt{\frac{2350}{5} - 466,56} = 1,85$$

(Nota.- Observa la fórmula utilizada para la desviación)

15. Organiza los datos siguientes en intervalos de 10 cm desde 150 a 200. Amplia la tabla con dos columnas, una para el producto de las marcas con las frecuencias y otra para el producto de las frecuencias con los cuadrados de las diferencias con la media. Calcula la media y la desviación típica.

174	158	150	185	186	178	166	185	199
183	175	173	175	164	173	178	179	164
176	159	190	173	189	163	156	169	

	xi	fi	xi·fi	fi·(xi-X̄)²
[150,160)	155	5	775	1733,65
[160,170)	165	5	825	371,58
[170,180)	175	10	1750	19,02
[180,190)	185	7	1295	906,42
[190,200)	195	2	390	914,14
Total		29	5035	3944,82

Con los datos de la tabla es mas fácil, y se tiene:

Media y Desviación típica

$\bar{X} = \frac{5035}{29} = 173,62 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{3944,82}{29}} = 11,66$

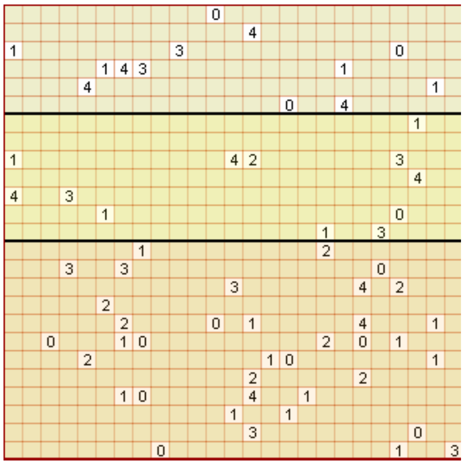
5. Representatividad

Muestreo aleatorio

La característica más importante de una muestra es su **representatividad** respecto al estudio estadístico que se esté haciendo. Si la muestra no es representativa diremos que está **sesgada**.

El proceso mediante el cual se elige una muestra se llama **muestreo**, y para que nos proporcione una muestra representativa debe ser aleatorio. Un muestreo es **aleatorio** cuando los individuos de la muestra se eligen al azar, de forma que todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

Ejemplo: Llamadas telefónicas voluntarias. Estas encuestas tienen varias fuentes de sesgo. Hay familias que no tienen teléfono, el coste de la llamada no todo el mundo está dispuesto a asumirlo. Pero sobre todo, el factor de respuesta voluntaria, los encuestados se auto-seleccionan. Suelen contestar aquellos con una fuerte opinión negativa sobre el tema. El enojo les anima a participar.



xi	fi	fi / N
0	13	0,2
1	20	0,32
2	9	0,14
3	10	0,16
4	10	0,16
	62	1

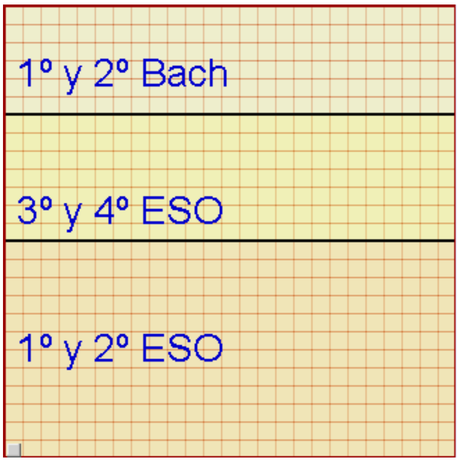
→ DATOS DE LA MUESTRA

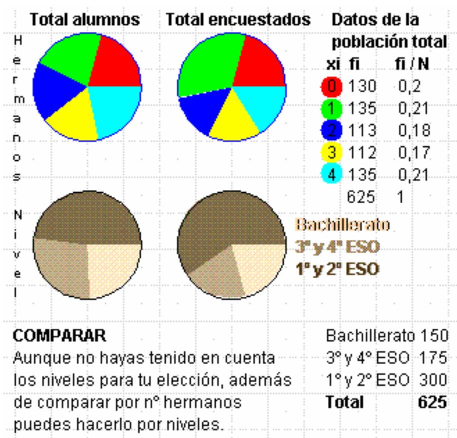
EN ESTE MUESTREO
No tienes que tener en cuenta los niveles, solo que cada alumno sea elegido de entre todos aleatoriamente. Aún así habrá correlacion en los niveles entre muestra y poblacion.

Bachillerato	13
2º ciclo ESO	12
1º ciclo ESO	37
Total	62
Porcentaje	**7,84%**

Ejemplo

En la imagen tienes 625 cuadros que representan a los alumnos de un instituto ficticio, se quiere estudiar el "número de hermanos" y para ello se ha elegido una muestra aleatoria como puedes ver a la derecha.





Hazlo así: Decide primero el tamaño de la muestra, por ejemplo 62 alumnos, ordenados los alumnos se elige uno de ellos al azar (puedes simularlo eligiendo un cuadrito con los ojos cerrados), a partir de este cuenta y señala cada 10 cuadritos (625/62≈10), cuando llegues al final de la lista (cuadrado) sigue desde el principio. Este tipo de muestreo aleatorio se llama **sistemático**.

Muestreo estratificado

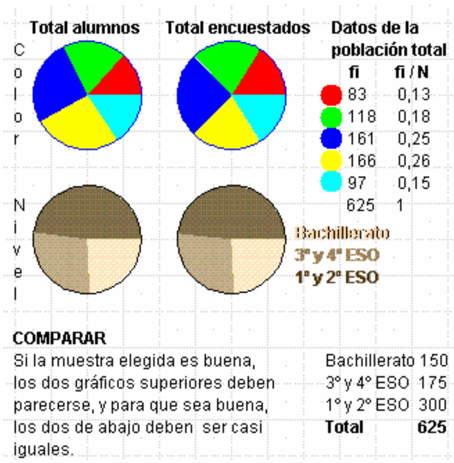
En ocasiones cuando la población objeto de estudio, pertenece a distintos grupos o estratos conviene elegir la muestra de forma que todos ellos queden representados.

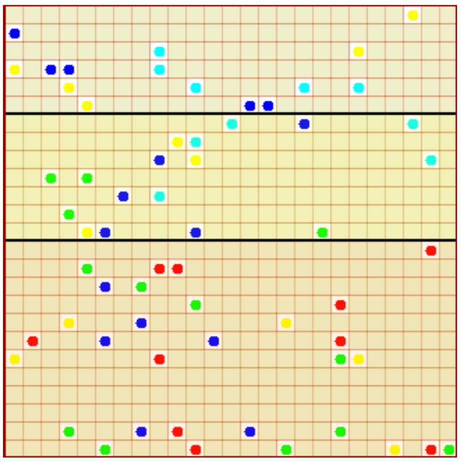
Este tipo de muestreo, escogiendo un reparto proporcional a los estratos, se llama **estratificado**.

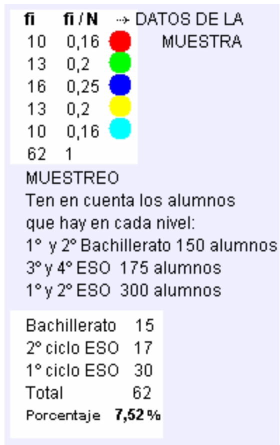
Por ejemplo, si queremos estudiar el poder adquisitivo de una población, y solo elegimos a individuos de una determinada zona, o principalmente de una determinada zona, la muestra con toda seguridad no será representativa. La muestra se ha de elegir tomando muestras de individuos proporcionales a la población de cada zona. Si hay tres zonas con 12.000, 18.000 y 20.000 habitantes, la muestra deberá tener un 24% de la primera zona, 36% de la segunda y 40% de la última.

A continuación sobre la población del instituto ficticio anterior se ha hecho una encuesta sobre el color preferido y en este caso se ha decidido hacer estratificada. De cada nivel se ha seleccionado aleatoriamente un número de individuos proporcional al número de componentes.

Debajo vemos la muestra aleatoria que se ha elegido y el resultado de la encuesta. Los últimos diagramas de sectores comparan la realidad con los resultados de la encuesta.







EJERCICIOS resueltos

16. Una gran empresa tiene trabajadores en cuatro áreas. Operarios, Representantes, administración y dirección. Las condiciones de trabajo son bastantes diferentes en cada área, por lo que el grado de satisfacción no es igual en cada una de ellas. Para averiguarlo, si hay 1000, 500, 300 y 200 trabajadores en las áreas de operarios, representantes, administrativos y directivos, ¿cuántos hay que seleccionar de cada área para una muestra de tamaño?

a) 200 b) 100 c) 300

a) De un total de 2000 empleados, los porcentajes para operarios, repartidores, administrativos y directivos son del 50%, 25%, 15% y 10%. Lo cual hace que la muestra tome 100 operarios, 50 repartidores, 30 administrativos y 20 directivos.
b) 50, 25, 15 y 10.
c) 150, 75, 45 y 30

Estadística

Algunos de los ejercicios propuestos a continuación están elaborados a partir de esta publicación de INE. Puedes ver artículos similares en
http://www.ine.es/prodyser/pubfolletos.htm

4/2007

cifras INE

Boletín Informativo del Instituto Nacional de Estadística

Encuesta de Empleo del Tiempo

Encuesta de Empleo del Tiempo

Qué hacemos y durante cuánto tiempo

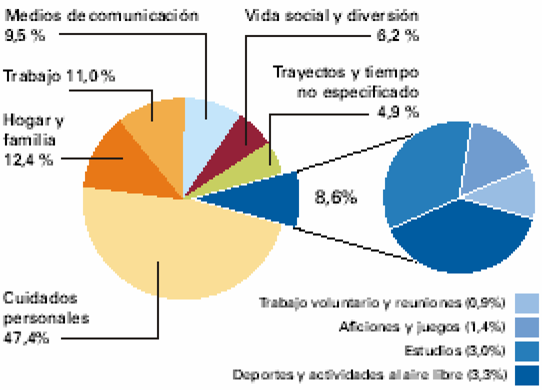
El Instituto Nacional de Estadística (INE) presenta en esta publicación algunos de los principales resultados de la **Encuesta de Empleo del Tiempo, primera y única encuesta de ámbito nacional sobre la utilización del tiempo**. Se realizó en España entre los años 2002 y 2003 de manera armonizada con las de otros países europeos, siguiendo las recomendaciones de la Oficina Estadística de la Unión Europea (Eurostat). Entre los años 1998 y 2004 otros países de la Unión llevaron a cabo investigaciones similares.

La encuesta facilita información, entre otras cosas, del **porcentaje de personas que realizan una determinada actividad en el transcurso del día y la duración media diaria dedicada a esa actividad por dichas personas**. Esta información primaria nos permite analizar con rigor la dimensión del trabajo no remunerado realizado por los hogares, la distribución de las responsabilidades familiares en el hogar, la participación de la población en actividades culturales y de ocio, etc. Por otra parte, la información recogida también permite comparar **datos nacionales** de uso del tiempo **en relación con los demás países europeos** que han realizado la encuesta.

Como principales resultados, cabe destacar el dato de que **las tareas domésticas y el cuidado de niños y ancianos son tareas eminentemente femeninas, ya que el 93% de las mujeres las realizan, frente al 70% de los varones**. En el contexto europeo, es de señalar **la primera posición de España en tiempo dedicado a caminar y pasear; pero también el último lugar por lo que se refiere a tiempo dedicado a la lectura**.

El INE quiere aprovechar esta ocasión para expresar su **agradecimiento a los cerca de 24.000 hogares de la muestra**, y pone a su disposición los resultados obtenidos.

Distribución del tiempo por actividades



NOTA: Los informantes de 10 y más años han anotado las actividades realizadas en un día concreto (de lunes a domingo) elegido al azar. El tiempo así estimado se refiere a un "día promedio" obtenido al concentrar todas las actividades de todos los informantes en un solo día. Los datos que aquí se presentan se refieren a toda la población investigada, salvo que se indique expresamente lo contrario.

Más información en: **www.ine.es**

DEPÓSITO LEGAL: M-13947-2001 ISSN: 1578-2277 NIPO: 606-07-006-1

Fuentes estadísticas utilizadas:
Procedentes del INE: Encuesta de Empleo del Tiempo. La información internacional procede de **Eurostat**.

Para practicar

1. Agrupa las siguientes variables: a)Peso, b)densidad, c)nº de plantas de los edificios, d)Tipo de fachada de los edificios, e)nº de ventanas, f)metros de fachada, g)nº de habitantes por edificio, h)tipo de puerta principal.

2. Escribe tres variables cualitativas que tengan que ver con embarcaciones.

3. Escribe tres variables cuantitativas discretas que tengan que ver con aviones.

4. Escribe tres variables cuantitativas continuas que tengan que ver con trenes.

5. Si las frecuencias para R, V, A y T son R→3, V→2, A→4 y T→1 ¿Cuántos grados le corresponde a cada letra en un gráfico de sectores?

6. Haz una tabla y un gráfico de sectores de los datos: R R A A R A R V N V R N

7. Haz una tabla y un gráfico de barras con los datos:
   3 3 4 5 4 5 3 2 1 2 3 4 5 4 5 4 3 3 4 4

8. Agrupa los datos siguientes en intervalos

195	194	194	182	168	179	191	154	177	189
184	187	155	167	177	187	161	171	190	162
190	152	166	180	156	186	184	167	184	162

9. Haz un histograma de los datos del ejercicio anterior

10. Calcula la media en cada caso:
    a) 4, 6, 8
    b) 4, 6, 8, 6
    c) 100, 120, 180, 200

11. Calcula la media en cada caso:

a)

Marca	Fr
1	3
2	5
3	3
4	2

b)

Marca	Fr
1000	3
2000	5
3000	3
4000	2

12. Determina la moda y la mediana
    a) 50,60,60
    b) 12,12,22,32
    c) 10,20,30,40,20
    d) 35,25,35,25,25,25

13. Calcula la moda y la mediana en cada caso:

a)

Marca	Fr
100	5
200	4
300	6
400	3

b)

Marca	Fr
100	2
200	7
300	9
400	2

14. ¿Cuál o cuáles de los datos siguientes se puede considerar una observación atípica en cada una de las dos series?
    a) 4 5 6 5 7 8 4 5 8 7 5 12 6 7 6 5 4
    b) 8 9 1 9 8 9 7 9 6 7 8

15. Calcula la mediana, primer y tercer cuartil y el percentil 90 de
    1 1 4 3 3 4 2 2 5 3 1 2 1 2 2 4 2 2 4 3 1

16. Calcula la mediana, primer y tercer cuartil y el percentil 20 de
    3 1 1 1 4 1 5 3 1 3 3 4 5 5 4 4 2 1 4 4

17. Calcula la media y la desviación típica en cada uno de los siguientes casos:
    a) 100 y 100
    b) 99 y 101
    c) 110 y 90
    d) 120 y 80

18. Completa la tabla con los datos:

190	151	193	187	158	175	165	158	184	172
197	161	157	157	183	180	150	161	182	169
162	177	160	155	188	157	189	167	186	157

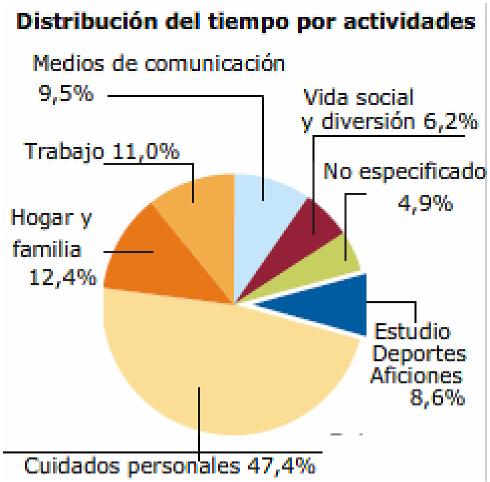
Intervalo	Marca x_i	Frec. f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i (X-x_i)^2$
[150,160)	155			
[160,170)	165			
[170,180)	175			
[180,190)	185			
[190,200)	195			

19. Determina la media y la desviación típica, de los datos de la tabla anterior.

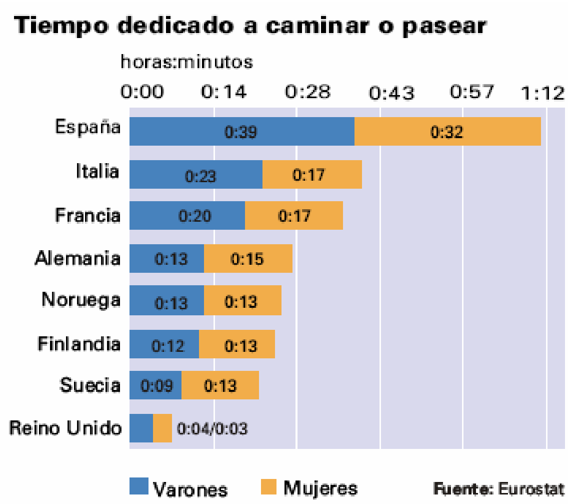
20. Determina los intervalos $\left(\bar{X}-\sigma, \bar{X}+\sigma\right)$ y $\left(\bar{X}-2\sigma, \bar{X}+2\sigma\right)$ y el número de elementos que hay en cada uno.

Marca	Fr
0	5
1	4
2	7
3	3
4	2

21. Observa los siguientes gráficos y responde a las preguntas de cada uno

a)


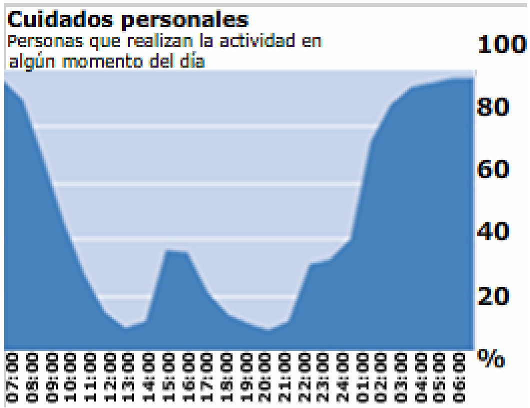
a1. ¿Cuál es la variable estudiada? ¿ y la frecuencia?
a2. ¿A qué grupo de actividades dedicamos más tiempo los españoles?
a3. Calcula cuánto tiempo dedicamos al hogar y la familia ¿cuántos grados ocupa este sector en el diagrama?

b)


b1. ¿En qué países pasean más las mujeres que los hombres?

b2. Calcula el tiempo medio que se dedica en cada país a pasear.

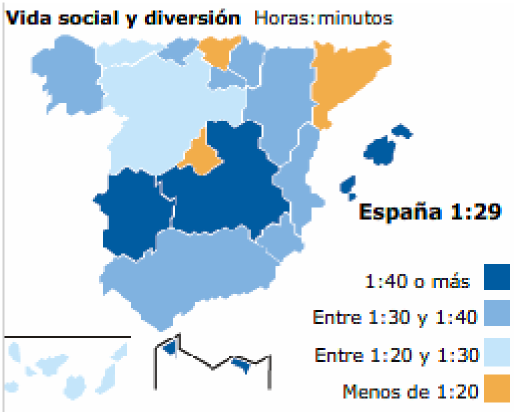
b3. ¿Qué país está en el percentil 50?

c)


c1. ¿Crees que el dormir se ha contado como actividad de cuidado personal?

c2. A las 15:00 hay un máximo local en la gráfica ¿a qué se debe?

c3. A la hora de la comida el 38% de las personas se dedica al cuidado personal. Significa esto que un 62% de las personas no come?

d)


d1. ¿Cuáles son las comunidades en las que se dedica menos tiempo a la vida social y a la diversión

d2. ¿Cuánto tiempo dedican a la diversión o a la vida social la mayor parte de las comunidades?

d3. ¿Cuál es el tiempo medio que se dedica en España a esta actividad?

Para saber más

La profesión de enfermería.

Florence Nightingale (1820-1910), conocida por ser la fundadora de la profesión de enfermería. Durante la guerra de Crimea se percató de que la causa principal de las muertes de heridos en combate era la falta de medidas sanitarias. Al aplicarlas, la tasa de mortalidad pasó de un 42,7% a un 2,2%. Gracias a un uso eficaz de los datos consiguió modificar el sistema de atención sanitaria a su vuelta a Gran Bretaña. Cambió el sistema de registro de datos y fue una de las primeras personas en utilizar los gráficos estadísticos para representar los datos de una forma sencilla de forma que hasta los parlamentarios y generales pudieran entender.

Para Florence, los datos no eran algo abstracto, eran una forma de poder salvar vidas humanas.

El padre de la estadística.

Sir Ronald A. Fisher (1890-1962) está considerado el padre de la estadística. Los escritos de Fisher ayudaron a organizar la estadística como campo de estudio preciso cuyos métodos se aplican a problemas prácticos de muchas disciplinas. Como casi todos los pioneros en la estadística, sus trabajos nacieron de la necesidad de resolver problemas prácticos.

Inferencia estadística

La estadística desarrollada en este tema es lo que se conoce como estadística descriptiva, en ella se recoge información y se hacen cálculos que describen como están repartidos. Pongamos el caso que una muestra elegida al azar nos da una media. ¿La verdadera media está próxima a la de la muestra? Si considero un intervalo alrededor de la media muestral, la verdadera ¿con qué probabilidad estará o no en él? De estas preguntas y otras se encarga la inferencia estadística.

Principales campos de aplicación de la estadística

La estadística se aplica en muchos campos como en **Industria y empresas**. Para el control de calidad en la producción en cadena, para el análisis de mercados, para el estudio de precio de venta al público de los artículos fabricados, en gestión financiera,...

En la parte derecha se citan algunas otras de sus aplicaciones.

Algunos campos de aplicación de la estadística

Administración pública

A través de las Delegaciones territoriales y provinciales, se recogen datos para analizarlos y someterlos a procesos estadísticos. De esta forma se conocen datos referidos a nacimientos, defunciones, matrimonios, precios, salarios, trabajo, enseñanza, sanidad,... Todos estos datos se suelen publicar por el INE.

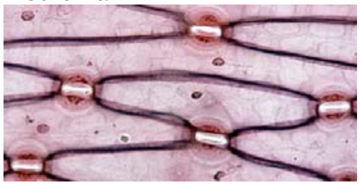
Economía.

En este campo es imprescindible, sobre todo en macro-magnitudes.

Psicología.

La mayor parte de los trabajos científicos en psicología experimental tienen como principal herramienta de trabajo la estadística.

Medicina.



En cualquier estudio experimental de estas áreas Existe una asignatura específica llamada Bioestadística para cubrir esos estudios experimentales. En Genética y antropometría encontramos dos de los campos de mayor aplicación.

Recuerda lo más importante

Población. Alumnos de un instituto ficticio.

Muestra. Alumnos encuestados

Variables estadísticas: Cualitativa, color preferido; Cuantitativa discreta, nº de hermanos y cuantitativa continua, altura.

Consideremos las dos muestras siguientes:

Nº de hermanos: 4 3 2 3 1 2 0 2 0 1 2 3 1 2 4 0 1 1 4 1 1 4 0 4 2 0 4 1

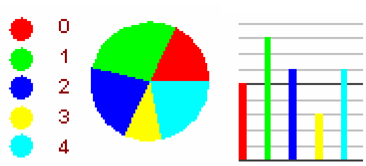
Altura: 182 172 157 194 150 166 163 196 167 199 172 185 172 168 173 160 162 173 161 192 156 164 173 180 193 172

Recuento de datos:

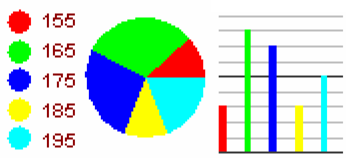
x_i	f
0	5
1	8
2	6
3	3
4	6
	28

Intervalo	x_i	f_i
[150,160)	155	3
[160,170)	165	8
[170,180)	175	7
[180,190)	185	3
[190,200)	195	5
	Total	26

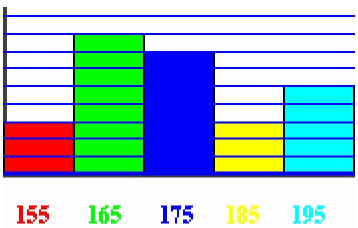
Gráficos de **sectores** y **barras**
Nº de hermanos



Altura.



Histograma



Media y **moda** y **desviación típica**

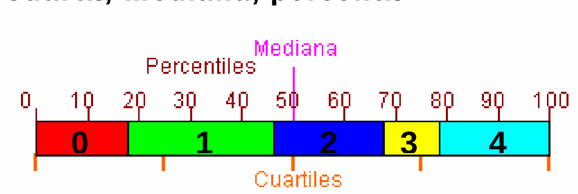
	xi	fi	xi·fi	$fi\cdot(xi-\overline{X})^2$
●	0	5	0	0
●	1	8	8	6,37
●	2	6	12	0,06
●	3	3	9	3,67
●	4	6	24	26,64
	Total	28	53	54,67

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{53}{28} = 1.89$$

Moda=Mo=1

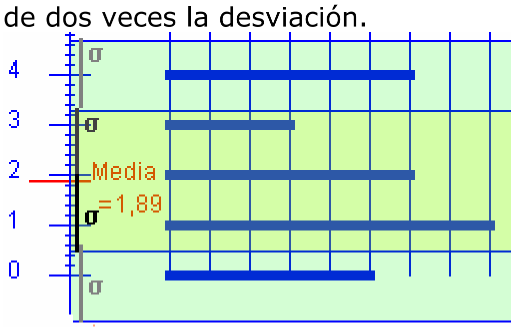
$$\sigma = \sqrt{\frac{54.67}{28}} = 1.39$$

Cuartil, mediana, percentil



Me=2, Q1=1, Q3=3, P20=1, P60=2, P90=4
Recorrido. De 0 a 4, de amplitud 4

Media y desviación En nuestro ejemplo, 17 de 28 datos no se alejan de la media mas de la desviación típica, son el 60,7%, y el 100% no se alejan de la media mas de dos veces la desviación.



Representatividad
Una muestra es representativa de la población cuando en ella podemos encontrar las mismas proporciones de las características de estudio que en el conjunto de la población.

Autoevaluación

1 ¿Cuántos grados corresponden en un diagrama de sectores a la marca 2?

xi	fi
1	4
2	4
3	7
4	5

2 ¿La mediana de la distribución anterior es?

3 ¿Cuál es la moda ?

xi	fi
15	40
25	45
35	37
45	51

4 ¿Qué porcentaje de la muestra corresponde a las dos primeras marcas ?

xi	fi
100	4
200	4
300	7
400	5

5 ¿Cuál es el percentil 30 ?

xi	fi
1	4
2	4
3	7
4	5

6 ¿Cuál es la media de los datos anteriores?

7 ¿Cuál es la desviación típica del los datos del nº5?

8 ¿Cuál es la media?

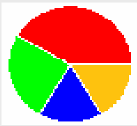
xi	fi
180	40
200	25
220	27
240	50

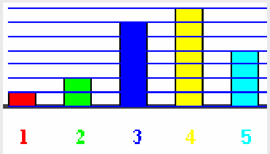
9 ¿Cuál es la desviación típica de los datos anteriores?

10 ¿Cuál es el percentil 70?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. Cualitativas: d) h)
   Cuantitativas discretas c) e) g)
   C. continuas: a) b) f)
2. Propulsión, Carga, Tipo de travesía
3. Nº de pasajeros, nº ruedas, nº ventanas
4. Velocidad máxima, carga máxima, potencia.
5. R→108º, V→72º, A→144º y T→36º
6. R→5, A→3, V→2, N→2

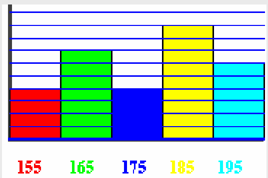




7. 1→1, 2→2, 3→6, 4→ 7, 5→4)
8. Intevalo x_i f_i

Intevalo	x_i	f_i
[150,160)	155	4
[160,170)	165	7
[170,180)	175	4
[180,190)	185	9
[190,200)	195	6

9. ----------------→



10. a) 6 b) 6 c) 150
11. a) 2.3 b) 2307
12. a)Mo=60, Me=60
    b)Mo=12, Me=17
    c)Mo=20, Me=20
    d)Mo=25 Me=25
13. a) Mo=300, Me=250 b) Mo=300, Me=300
14. a) 12 b) 1
15. Me= 2, Q1=2, Q3=3, P90=4
16. Me=3, Q1=1, Q3=4 y P20=1
17. La media es 100 en los 4 , y la desviación 0, 1, 10 y 20.
18.

Intervalo	Marca x_i	Frec. f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i(X-x_i)^2$
[150,160)	155	9	1395	2401
[160,170)	165	7	1155	280,77
[170,180)	175	3	525	40,33
[180,190)	185	8	1480	1494,22
[190,200)	195	3	585	1680,33
		30	5140	5896,66

19. $\bar{x} = 171,\hat{3}$ $\sigma \approx 14.02$
20. En (0.42, 2.9) hay 11, y en (-0.88, 4.14) todos
21. a1)variable:actividades. Fr:porcentaje de tiempo diario que se dedica a cada actividad
    a2)cuidados personales
    a3) 2h 58m 34s 44,64grados
    b1) Alemania, Suecia y Finlandia
    b2) E35,5 I20, F18,5 A14 N13 F12,5 S11 R3,5 en minutos
    b3) Francia
    c1) Sí. c2) Comida y Siesta
    c3) No, el pico ocupa dos horas y algunos comen en media hora
    d1) País Vasco, Cataluña y Madrid
    d2) entre 1:30 y 1:40 horas:minutos
    d3) 1:29

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Sol 72º
2. Sol 3
3. Sol 51
4. Sol 40%
5. Sol 2
6. Sol 2.65
7. Sol 1.06
8. Sol 212.25
9. Sol 24.53
10. Sol 240

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

12 Probabilidad

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Hallar los sucesos de un experimento aleatorio y realizar operaciones con ellos.
- Calcular la probabilidad de un suceso mediante la regla de Laplace.
- Conocer las propiedades de la probabilidad.
- Hallar la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto.
- Hallar probabilidades de sucesos dependientes e independientes.
- Aplicar la probabilidad a situaciones de la vida cotidiana.

Antes de empezar

Investiga

Imagina que estás en un concurso de televisión en el que te ofrecen tres puertas y tiene que elegir una.

Detrás de una de las puertas hay un coche y detrás de cada una de las otras dos, un burro.

Eliges una puerta, pongamos que la de la estrella verde, pero antes de abrirla, el presentador, que sabe lo que hay detrás de cada una, abre una de las dos que no has elegido, la roja, tras la que por supuesto hay un burro, y entonces te da la oportunidad de cambiar tu elección.

Naturalmente quieres llevarte el coche, ¿qué haces, cambiar de puerta o no cambiar?

Supongamos que cambias tu puerta y al final te quedas con la azul, y… ¡ganaste el coche!. En este caso salió bien cambiar la primera elección. ¿Qué opinas?, ¿conviene cambiar o es igual?, a lo largo de este tema lo descubrirás.

1. Experimentos aleatorios

Espacio muestral y sucesos.

Al extraer una carta de una baraja, lanzar una moneda, tirar un dado, y en otros ejemplos análogos, no podemos saber de antemano el resultado que se va a obtener. Son experimentos **aleatorios**, aquellos en los que no se puede predecir el resultado y de ellos se trata aquí.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**, y cada uno de esos posibles resultados es un **suceso elemental**.

✓ Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral, se verifica cuando ocurre cualquiera de los sucesos elementales que lo forman.

Hay un suceso que se verifica siempre, el **suceso seguro** que es el mismo espacio muestral.

Operaciones con sucesos

El suceso **contrario** a uno dado A, está formado por todos los sucesos del espacio muestral que no están en A. Es el que ocurre cuando no sucede A y se indica **$\bar{A}$**.

- El suceso **contrario** del **seguro** es el **suceso imposible**, que no se verifica nunca, se indica con **Ø**.

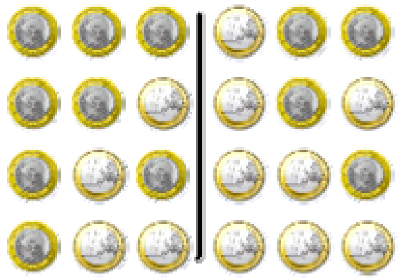
Con los sucesos de un experimento aleatorio se pueden realizar distintas operaciones. Dados dos sucesos A y B:

- La **unión** de A y B, **AUB**, es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B. Ocurre cuando sucede A ó sucede B ó ambos.
- La **intersección**, **A∩B**, es el suceso formado por los sucesos elementales comunes a A y B. Se verifica cuando ocurren A y B a la vez.
- La **diferencia** de A y B, **A∖B**, es el suceso formado por los sucesos elementales de A que no están en B. Ocurre si sucede A pero no B.

- Al tirar una moneda y un dado, una forma de representar el espacio muestral es:

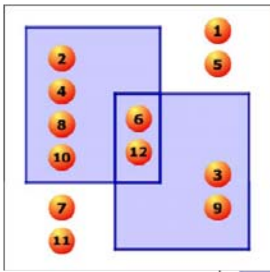
O bien: (cara, 1) (cara, 2),...

- Al tirar tres monedas (o una moneda tres veces) el espacio muestral es:

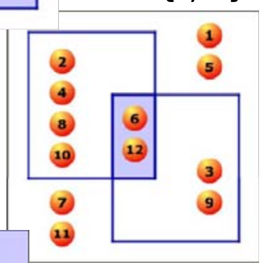


E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

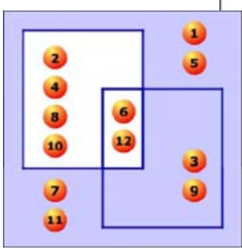
A∪B={2,3,4,6,8,9,10,12}



A∩B={6,12}

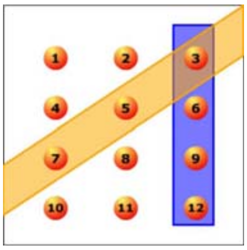


$\bar{A}$={1,3,5,7,9,11}



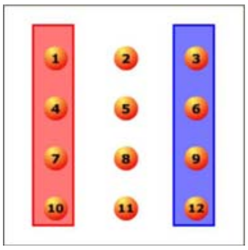
A= "salir par"

B="múltiplo de 3"



Sucesos compatibles
Cuando sale 3 ocurren ambos.

Sucesos incompatibles
No ocurren a la vez, pero no son contrarios



Sucesos compatibles e incompatibles

En un experimento aleatorio hay sucesos que pueden ocurrir a la vez y sucesos que no.

- Dos sucesos se dicen **compatibles** si tienen algún suceso elemental común. En este caso **A∩B≠Ø**, pueden ocurrir a la vez.
- Dos sucesos se dicen **incompatibles** si no tienen ningún suceso elemental común, en este caso **A∩B=Ø** y no pueden ocurrir a la vez

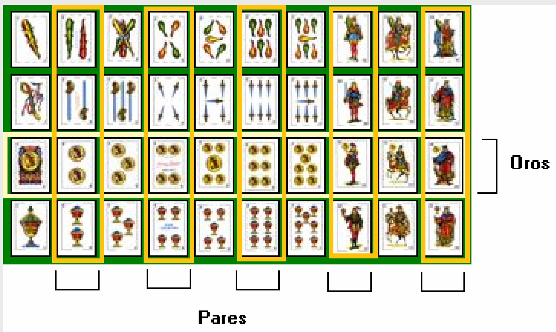
Un suceso y su contrario son siempre incompatibles, pero dos sucesos incompatibles no siempre son contrarios, como se puede ver en el ejemplo de la izquierda.

EJERCICIOS resueltos

1. En una bolsa tenemos tres bolas numeradas como 1, 2 y 3. Consideramos el experimento de extraer una bola y anotar su número. Escribe todos los sucesos posibles. Indica cuáles de ellos son los elementales.

{},{1,2,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1}, {2} y {3}. Los tres últimos son los elementales.

2. En una baraja, bajo el experimento de extraer una carta, considera los sucesos a) par, b) oros, c) par y oros, d) par u oros, e) par menos oros, f) oros menos par y g) no par



Observa la imagen,
a) hay 20 cartas rodeadas de naranja, las pares,
g) otras 20 que no, las impares,
b) 10 oros.
c) El 2, 4, 6,10 y 12 de oros son pares.
d) Todos los oros y pares juntos son 25 cartas (todas las rodeadas por amarillo o naranja)
e) A los 2, 4, 6, 10 y 12 hay que quitar el 2, 4, 6, 10 y 12 de oros, a 20 cartas se le quitan 5 quedan 15
f) El 1, 3, 5, 7 y 11 de oros.

3. Al tirar un dado consideramos los sucesos: A={par}, B={mayor de 3}, y C={impar}. De los tres pares de sucesos posibles AB, AC y BC, indica cuáles son compatibles y/o incompatibles:

AB compatibles, cuando salga el 4 o el 6.
AC incompatibles, si es par no puede ser impar.
BC compatibles, cuando salga el 5.

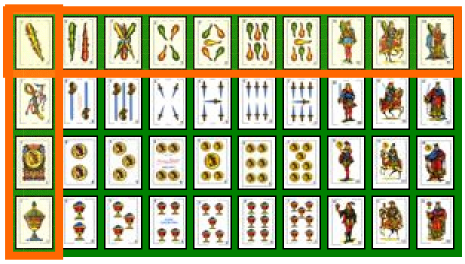
2. Probabilidad de un suceso

La regla de Laplace

Cuando un experimento aleatorio es regular, es decir que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir ó son **equiprobables**, para calcular la probabilidad de un suceso cualquiera A, basta contar y hacer el cociente entre el nº de sucesos elementales que componen A (**casos favorables**) y el nº de sucesos elementales del espacio muestral (**casos posibles**).

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{nº casos favorables}}{\textbf{nº casos posibles}}$$

Este resultado se conoce como **regla de Laplace**. Observa que para poder aplicarla es necesario que todos los casos posibles sean igualmente probables.



Extraemos una carta de una baraja de 40:

P(bastos)=10/40=0,25

P(as)=4/40=0,1

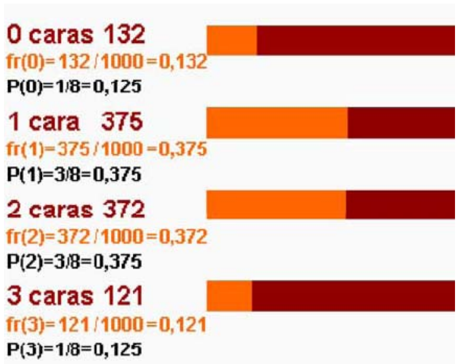
P(as de bastos)=1/40=0,025

Frecuencia y probabilidad

Con la regla de Laplace podemos calcular la probabilidad de un suceso en experimentos regulares, pero si la experiencia es irregular o desconocemos la probabilidad de cada uno de los posibles resultados entonces es preciso recurrir a la **experimentación**.

Como sabes la **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que aparece cuando se repite un experimento aleatorio, y la **frecuencia relativa** es la frecuencia absoluta dividida por el número de veces, **n**, que se repite el experimento aleatorio. Cuando este número **n** es muy grande, la frecuencia relativa con que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo. Este resultado, conocido como **ley de los grandes números**, permite definir la probabilidad de un suceso como ese número hacia el que tiende la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

Resultados obtenidos en la simulación del lanzamiento de tres monedas 1000 veces



EJEMPLO

Sospechamos que un dado está trucado y nos entretenemos en tirarlo 1000 veces y anotar los resultados, obteniendo:

	1	2	3	4	5	6
F	203	297	146	154	98	102
Fr	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1	0.1

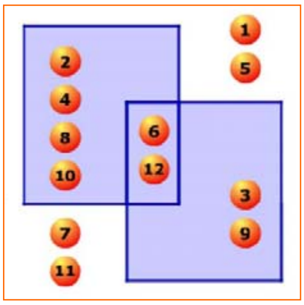
Concluiremos, P(1)=P(2)=··· ya no es 1/6, sino aproximadamente P(1)=0,2; P(2)=0,3 etc. Aquí estaremos usando la frecuencia relativa como probabilidad, en lo sucesivo lo tendremos en cuenta al jugar con ese dado.

A="par"   B="múltiplo de 3"

P(A)=6/12=1/2   **P(B)=4/12=1/3**

P($\bar{A}$)=1/2   **p($\bar{B}$)=2/3**

$$\mathbf{P(A \cup B)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$



Propiedades de la probabilidad

Vista la relación entre frecuencia relativa y probabilidad, se cumple que:

- La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible 0.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos **incompatibles** A y B es **P(AUB)=P(A)+P(B)**.

Y de éstas se deduce además que:

- La probabilidad del contrario es **p(A)=1-P(A)**
- La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es **p(AUB)=p(A)+p(B)-p(A∩B)**

EJERCICIOS resueltos

4. Tenemos un dado de 20 caras {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6} perfectamente equilibrado

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles?

P(1)=1/20=0,05   P(2)=2/20=0,1   P(3)=3/20=0,15
P(4)=4/20=0,2   P(5)=5/20=0,25   P(6)=5/20=0,25

b) P(par)= 11/20 = 0,55   Hay dos 2 y cuatro 4, y cinco 6, 11 pares

c) P(mayor de 3)= 14/20 = 0,70   14 posibles entre 20

d) P(par y mayor de 3)=9/20=0,45   El 4 y el 6 son pares y mayores de 3

e) P(par o mayor de 3)=19/20=0,95   Si sale 2, 4, 5 ó 6

5. En una bolsa tenemos 7 bolas rojas, 9 bolas azules y 4 verdes. Extraemos una bola, calcula la probabilidad de que

a) No sea roja   P($\bar{R}$)=13/20=0,65   Hay 20 bolas, 7 rojas, 13 no rojas

b) Sea roja o azul   P(RUA)=16/20=0,8   7+9=16 rojas ó azules

6. En una urna hay 40 bolas rojas y azules, no sabemos cuántas de cada color,. Para averiguarlo extraemos una bola, miramos el color y la devolvemos a la urna antes de sacra otra. Repetimos el experimento 1000 veces y obtenemos 807 bolas rojas y 193 bolas azules. ¿Cuántas bolas de cada color estimas que hay en la urna?.

P(roja)=0,81   P(azul)=0,19 $0{,}81 \cdot 40 \approx 32$ rojas $0{,}19 \cdot 40 \approx 8$ azules

7. En un grupo, el 40% juega baloncesto y el 60% fútbol, sabiendo que el 85% practica alguno de los dos deportes, ¿qué porcentaje juega a los dos?.

P(F)=0,60   P(B)=0,40   P(FUB)=0,85

P(F∪B)= P(F)+P(B) - P(F∩B)

0,85=0,60+0,40-P(F∩B)   P(F∩B)=0,15   15%

8. En una clase el 68% aprueba Lengua y el 66% Matemáticas, si el 43% ha aprobado las dos asignaturas, ¿qué porcentaje no aprueba ninguna de las dos?.

Aprueba al menos una de las dos: P(L∪M)= P(L)+P(M) - P(L∩M) = 0,68+0,61-0,43 = 0,86
Suspender las dos es el suceso contrario a éste, luego su probabilidad es 1 – 0,86 = 0,14
El 14% ha suspendido las dos asignaturas.

3. Experimentos compuestos

Regla de la multiplicación

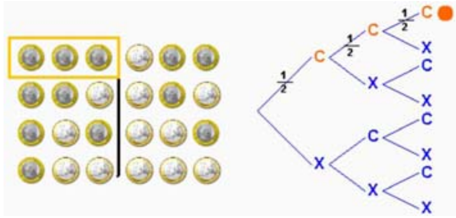
Un **experimento compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva.

Para calcular el espacio muestral de un experimento compuesto conviene, en muchas ocasiones, hacer un diagrama de árbol que represente todas las opciones. Cada resultado viene dado por un camino del diagrama. Observa en el ejemplo cómo construir un diagrama de árbol.

Si te fijas en el ejemplo anterior, al indicar la probabilidad de cada rama del camino, se obtiene la probabilidad de cada suceso compuesto calculando el producto de los respectivos sucesos simples.

Para calcular la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto se **multiplican** las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

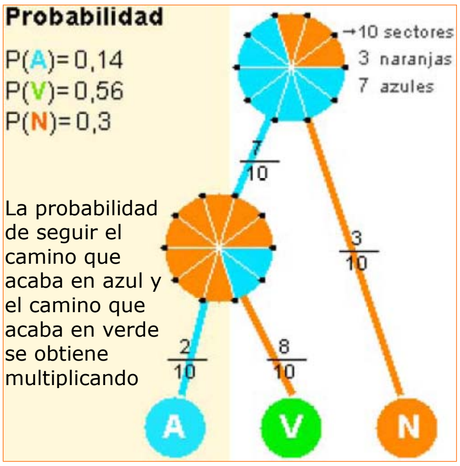
Tiramos una moneda tres veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres caras?



8 casos posibles
1 caso favorable

La probabilidad de C en cada moneda 1/2

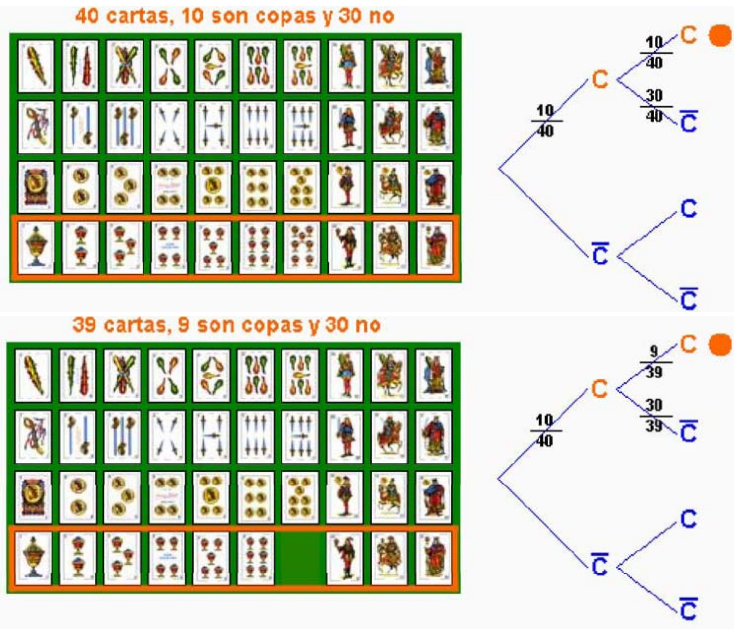
$$P(CCC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$



La probabilidad de seguir el camino que acaba en azul y el camino que acaba en verde se obtiene multiplicando

Extracciones con devolución y sin devolución

Un ejemplo de experimento compuesto lo encontramos en la extracción sucesiva de cartas o de bolas de una urna, ... , en estos casos hay que considerar si se devuelve la carta, bola, etc. antes de sacar la siguiente o no.



Sacamos sucesivamente dos cartas de una baraja de 40, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

La probabilidad de que la primera carta sea de copas es 10/40.

Para la segunda la probabilidad depende de que devolvamos la primera carta al mazo o no.

Con devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

Sin devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

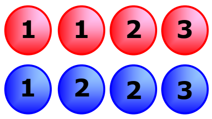
$$P(B/A)=\frac{\text{Casos favorables de B ocurriendo A}}{\text{Casos posibles ocurriendo A}}=$$

$$=\frac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables de A}}=$$

$$=\frac{\boxed{\dfrac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables en total}}}}{\boxed{\dfrac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos favorables en total}}}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

En una urna tenemos bolas rojas y azules numeradas como en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cada número?

P(1)=3/8
P(2)=3/8
P(3)=2/8



Si sabemos que la bola es roja

P(1/R)=2/4 (de 4 rojas hay 2 con 1)
P(1)<P(1/R) se favorecen

P(2/R)=1/4 (de 4 rojas hay 1 con 2)
P(2)>P(2/R) se desfavorecen

P(3/R)=1/4 (de 4 rojas hay 1 con 3)
P(3)=P(3/R) son independientes.

Probabilidad condicionada

Cuando se realizan observaciones de varios sucesos puede que uno dependa del otro.

Los sucesos "el día está gris" y "llevar paraguas" influyen entre sí. Los sucesos "estudiar" y "aprobar", son sucesos que se favorecen; cuando se estudia, aumenta la probabilidad de aprobar.

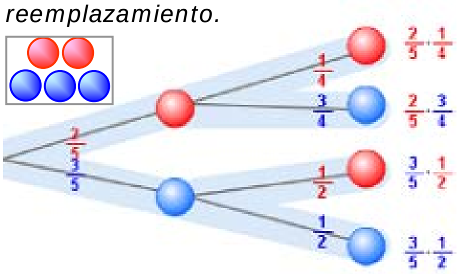
La probabilidad de que ocurra un suceso B cuando está ocurriendo otro, A, se llama **condicionada**, y se expresa **p(B/A)**.

$$\mathbf{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

Dados dos sucesos, se dice que son **independientes** si la presencia del uno no influye en la probabilidad del otro, es decir, **si P(B/A)=P(B)**; en caso contrario son **dependientes**.

✓ A y B independientes: **P(B/A)=P(B)** y al tener en cuenta la formula anterior para p(B/A),
A y B independientes: **P(A∩B)=P(A)·P(B)**

En una urna hay 2 bolas rojas y 3 azules, extraemos dos bolas sin reemplazamiento.



Suma = 1

Probabilidad de que las dos sean rojas:

$$\mathbf{P(R_1R_2)}=P(R_1)\cdot P(\mathbf{R_2}/R_1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$$

Probabilidad de que las dos sean azules:

$$\mathbf{P(A_1A_2)}=P(A_1)\cdot P(\mathbf{A_2}/A_1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$$

Probabilidad de que sean del mismo color:

$$\mathbf{P(R_1R_2\cup A_1A_2)}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}$$

Probabilidad de que sean de distinto color:

$$\mathbf{P(R_1A_2\cup R_1A_2)}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$$

Probabilidad con diagramas de árbol

Como has podido ver, en los experimentos compuestos se puede hacer un diagrama en árbol, y cada resultado viene dado por un camino en dicho árbol.

Para calcular una probabilidad solo hay que dibujar el camino correspondiente, y el producto de las probabilidades de todas la ramas que lo forman será el valor que buscamos.

Así si ocurre A y luego B:

P(A y B)=P(A)·P(B/A)

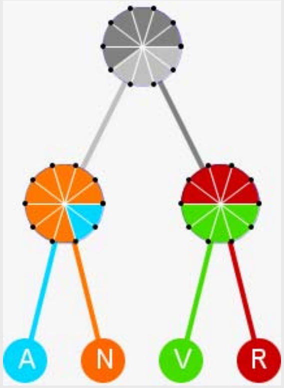
En un diagrama de árbol:

✓ La suma de las probabilidades de todos los caminos es igual a **1**

✓ La probabilidad de un suceso compuesto por varios caminos es la suma de las probabilidades de los caminos respectivos.

EJERCICIOS resueltos

9. En las ruletas de la figura adjunta, calcula la probabilidad de cada uno de los caminos.



P(azul) = 0,4·0,2 = 0,08 P(naranja)= 0,4·0,8 = 0,32

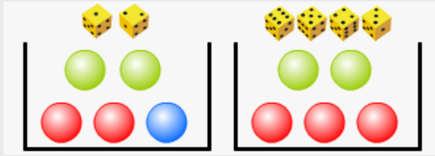
P(verde) = 0,6·0,5 = 0,30 P(rojo) = 0,6·0,5 = 0,30

10. Lanzamos un dado de 4 caras {1,2,3,4} y otro de 10 {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos 3?. ¿Y dos 4?

P(3 y 3) = 1/4 · 3/10 = 3/40 = 0.075

P(4 y 4) = 1/4 · 4/10 = 4/40 = 0.1

11. Lanzamos un dado, si sale 1 ó 2 sacamos una bola de la urna A y si no de la B, ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola azul?.



La bola azul está en la urna A, para que salga ha tenido que salir antes en el dado un 1 o un 2.
P(A) = 1/3 · 1/5 = 1/15

12. En una bolsa tenemos 5 bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos dos bolas, a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 y un 3 si no devolvemos las bolas sacadas?. b) ¿Y cuál si las devolvemos?

Sin devolución P = 1/5 · 1/4 = 0.05 Con devolución P = 1/5 · 1/5 = 1/25 = 0.04

13. En una caja hay 6 bolas blancas y 4 bolas negras, ¿qué probabilidad hay de que al extraer dos bolas sean las dos blancas?. Hazlo sin devolución y con devolución.

a) Sin devolución: P(BB) = 6/10 · 5/9 = 30/90 = 1/3

b) Con devolución: P(BB) = 6/10 · 6/10 = 36/100 =18/50

14. En una caja hay 12 bolas de tres colores, rojas, azules y verdes. Están huecas y en algunas hay premio y en otras no. La distribución de premios y colores es la que se indica en la tabla. Calcula las probabilidades siguientes e indica si los sucesos "premio" y "color" son dependiente o independientes en cada caso.

				TOTAL
CON PREMIO	1	1	2	4
SIN PREMIO	1	2	5	8
TOTAL	2	3	7	12

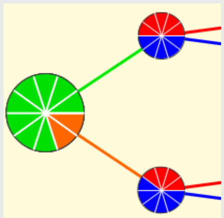
P(**V**) = 3/12 = 1/4 P(**V**∩premio) = 1/12 P(premio/ **V**) = 1/3

P(**A**) = 7/12 P(**A**∩premio) = 2/12 P(premio/ **A**) = 2/7

P(**R**) = 2/12 = 1/6 P(**R**∩premio) = 1/12 P(premio/ **R**) = 1/2

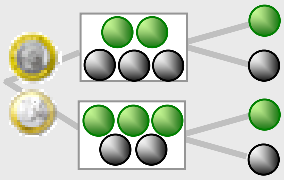
P(premio) = 4/12 = **1/3** Los sucesos "premio" y "verde" son independientes, mientras que "premio" y "roja", "premio" y "azul" son dependientes.

15. Calcula la probabilidad de obtener rojo en las ruletas de la figura.



P(R) = 0,8·0,5 + 0,2·0,4 = 0,48

16. Lanzamos una moneda, si sale cara sacamos una bola de una urna con 2 bolas verdes y 3 bolas negras; si sale cruz de otra urna con 3 bolas verdes y 2 bolas negras. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea verde.



P(C y V) = 1/2 · 2/5 = 1/5 = 0,2

P(X y V) = 1/2 · 3/5 = 3/10 = 0,3

P(V) = 0,2 + 0,3 = 0,5

Para practicar

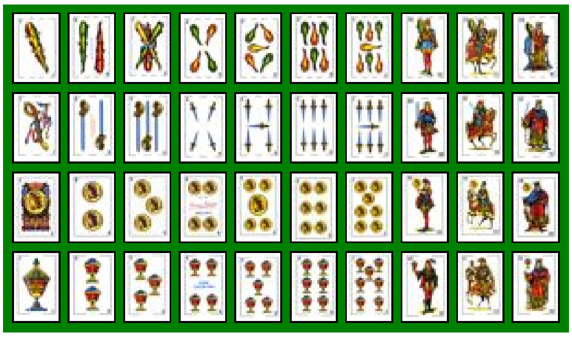
1. Lanzamos un dado de doce caras y anotamos el número de la cara superior. Describe los sucesos:
   A=”Sacar un nº par”
   B=”Sacar un número mayor que 6
   C=”Sacar un número menor que 3”
   D=”Sacar múltiplo de 3”
   Señala que pares de estos sucesos son incompatibles.

2. Elegimos una ficha de dominó al azar, describe los sucesos: A=”La suma de los puntos es mayor que 7”; B=”La suma de los puntos es múltiplo de 5”. Escribe $A\cap B$ y $A\cap\overline{B}$.

3. En el experimento de sacar una carta de una baraja española, considera los sucesos:

   A=”Sacar una figura”, B=”Sacar copas”

   Obtén los sucesos: $A\cap B$ y $\overline{A}\cap B$



4. En la escuela municipal de un pueblo hay clases para deportes de equipo de baloncesto, fútbol y voleibol. Hay 100 inscritos en deportes de equipo, 70 van a clases de fútbol, 60 de baloncesto y 40 a fútbol y baloncesto. ¿Cuántos van sólo a voleibol?

5. Con un diagrama de árbol construye el espacio muestral del experimento de lanzar 4 monedas. Considera los sucesos:

   A=”Salir una cara”

   B=”Salir al menos dos cruces”

   Escribe $A\cup B$, $A\cap B$ y el suceso contrario de B

6. De un juego de dominó quitamos todas las fichas dobles, luego sacamos una ficha al azar, calcula la probabilidad de que la suma de los puntos sea múltiplo de 5.

7. Formamos todos los números posibles de tres cifras con el 3, el 5 y el 6, repetidas o no. Elegimos uno de esos números al azar, calcula la probabilidad de que acabe en 5.

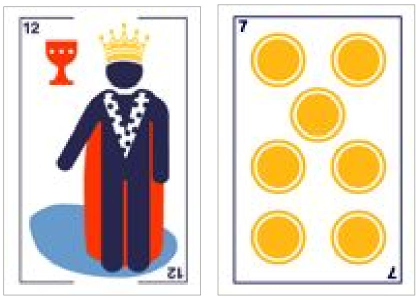
8. En una caja hay 3 bolas rojas, 3 bolas verdes y 2 azules; en otra caja hay 2 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. ¿En qué caja es mayor la probabilidad de extraer una bola azul?

9. Se elige al azar un número del 1 al 30. Calcula la probabilidad de elegir:

   a) un nº mayor que 3 y menor que 17

   b) un múltiplo de 3

10. Encima de la mesa tenemos las dos cartas que aparecen debajo, sacamos otra carta, calcula la probabilidad de que sea de oros.



11. Para corregir un examen de probabilidad un profesor benévolo ha decidido hacerlo de la siguiente manera:
    Tira dos dados y se fija en la mayor de las puntuaciones obtenidas, si es menor que 4 pone Insuficiente y en los otros casos Suficiente.

    Con este método, ¿qué probabilidad hay de aprobar?

12. La probabilidad de un suceso A es 0,15, ¿cuál es la probabilidad del suceso contrario?.

13. Un dado está trucado de forma que las caras con número impar tienen triple probabilidad de salir que las caras con número par. Calcula la probabilidad de cada una de las caras y la de sacar número impar.

14. La probabilidad de un suceso A es 0,14 y la de otro B es 0,39. Si la probabilidad de que ocurran los dos a la vez es 0,13. Calcula la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos.

15. Considera dos sucesos A y B de un experimento aleatorio con $P(A)=0,16$ y $P(A\cup B)=0,65$; $P(A\cap B)=0,02$; calcula la probabilidad de A-B y de B-A.

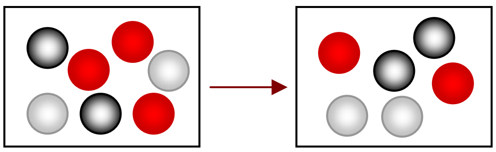
16. En una urna hay bolas blancas, rojas y negras, pero no sabemos cuántas ni en qué proporción. En 1000 extracciones, devolviendo la bola cada vez, se ha obtenido bola blanca 223 veces, roja 320 veces y negra 457 veces. Al hacer una nueva extracción, ¿qué probabilidad hay de sacar una bola roja?. Si en la urna hay 23 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada color?

17. En una caja hay 3 bolas rojas, 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Se extraen dos bolas, calcula la probabilidad de que las dos sean del mismo color si la extracción se hace:

a) con devolución

b) sin devolución.

18. En una caja, A, hay 3 bolas rojas, 2 bolas blancas y 2 negras, en otra caja, B, hay 2 bolas de cada color. Se extrae una bola de la caja A y se pone en la B, después se saca una bola de B. Calcula la probabilidad de que esta última bola sea negra.



19. En una caja, A, hay 2 bolas rojas, 3 bolas blancas y 3 negras, en otra caja, B, hay 2 bolas de cada color, rojo, blanco, negro. Se tira un dado, si sale un número mayor que 4, se saca una bola de la urna A y si no de la B. Calcula la probabilidad de que la bola sea roja.

20. De una baraja española de 40 cartas, se extraen dos cartas sin devolución, calcula la probabilidad de que

a) las dos sean del mismo palo

b) una sea de oros y otra de copas.

21. En un instituto hay 450 estudiantes, de los que 290 son chicos y el resto chicas. El 20% de los chicos y el 10% de las chicas lleva gafas. Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve gafas?

22. Llevo en un bolsillo 6 monedas de 10 céntimos, 2 de 20 céntimos y 2 de 1 €. Saco dos monedas al azar, qué probabilidad hay de que:

a) las dos sean de 1 euro

b) saque 1,10 euros.

23. En una empresa trabajan 190 hombres y 130 mujeres. Hay 19 hombres y 26 mujeres que son fumadores. Elegida una persona de esa empresa al azar, calcula la probabilidad de que:

a) sea una mujer fumadora

b) sea una mujer sabiendo que fuma.

AYUDA: Completa la tabla

	FUMA	NO FUMA	
HOMBRES	19		190
MUJERES	26		130
TOTAL			

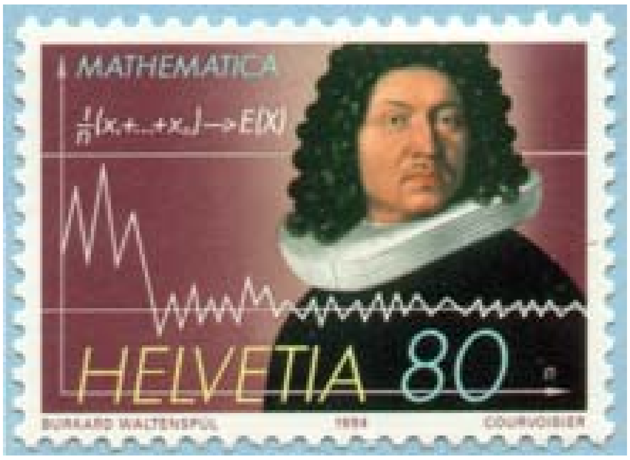
24. Un jugador de baloncesto suele encestar el 80% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si tira tres veces, calcula la probabilidad de que:

a) enceste dos veces

b) no enceste ninguna vez

Para saber más

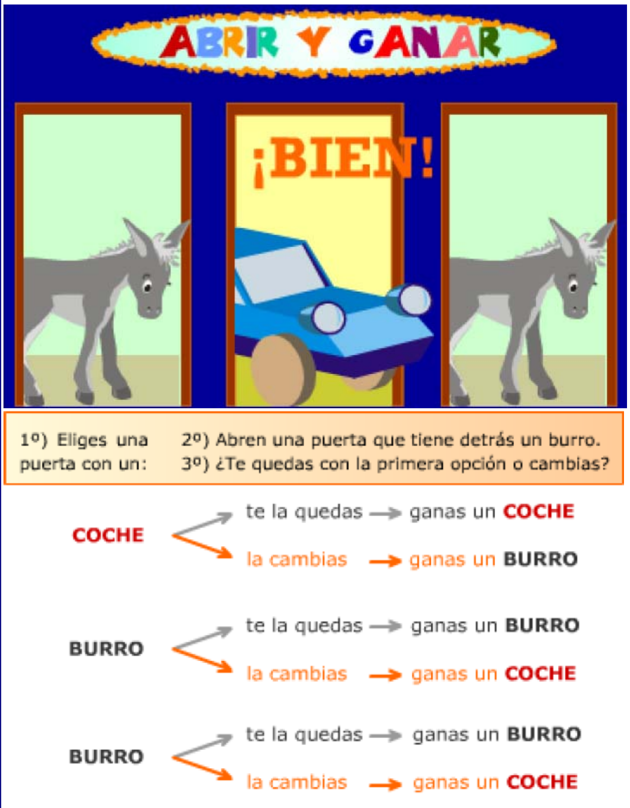
Un poco de historia



La probabilidad nació en torno a los juegos de azar. En las civilizaciones antiguas (Egipto, Grecia, Roma) se usaba un hueso a modo de dado para diversos juegos donde intervenía el azar (de ahí proviene un juego tradicional: las tabas). Pero incluso restos arqueológicos de hace mas de 40.000 años se han interpretado como elementos de juegos de azar.

En Grecia y Roma se practicaban con verdadero celo y pasión. Homero (900 a. C.) cuenta que cuando Patroclo era pequeño, se enfadó tanto con un oponente jugando con el astrágalo que casi le mató.

- Fue Girolamo Cardano (1501-1576) quien en 1565, escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar. Se llamaba *Libro de los juegos de azar*.
- Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), el reverendo Thomas Bayes (1702-1761) y Joseph Lagrange (1736-1813) desarrollaron fórmulas y técnicas para el cálculo de la probabilidad. En el siglo XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749--1827), unificó todas estas primeras ideas y compiló la primera teoría general de la probabilidad.
- La probabilidad ha seguido evolucionando con matemáticos como Poisson (1781-1840), P.Chebyshev(1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), y creando escuela para superar estancamientos; Andrei N. Kolmogorov de la escuela rusa, (1903-1987), Norbter Wiener (1894-1964) de la americana. En la actualidad estadística y la probabilidad se unen y se desarrollan juntas.



Este problema llamado de **Monty Hall** está inspirado en el concurso televisivo estadounidense *"Let's Make a Deal" (Hagamos un trato)*, famoso entre 1963 y 1986. Su nombre proviene del presentador del mismo, Monty Hall.

Si has jugado bastantes veces habrás comprobado, quizás con cierta sorpresa, que la probabilidad de ganar un coche cambiando la primera elección, es superior a la probabilidad de ganarlo sin cambiar de puerta.

Observando el diagrama de árbol o aplicando lo que ya sabes sobre probabilidad condicionada verás que:

- **P(coche/con cambio)=2/3**
- **P(coche/sin cambio)=1/3**

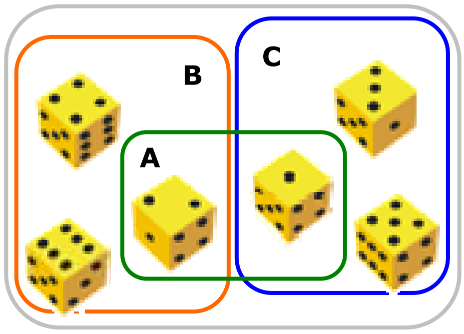
Recuerda lo más importante

Experimentos aleatorios

No puede predecirse el resultado por mucho que lo hayamos experimentado.

Por ejemplo, lanzar un dado.

- Espacio **muestral** E={1,2,3,4,5,6}
- Sucesos elementales: {1}, {2},{3},{4},{5} y{6}
- Otros **sucesos**: A={1,2}, B={2,4,6}, C={1,3,5}
- Suceso **seguro**: E={1.2.3.4.5.6}
- Suceso **imposible**: Ø={ }
- Suceso **contrario** de A: $\overline{A} = \{3,4,5,6\}$



Sucesos **compatibles**: Son los que pueden ocurrir a la vez, como A y B ó A y C.
Sucesos **incompatibles**: Si no pueden ocurrir a la vez, como par e impar, B y C.

Operaciones con sucesos

Unión: A U B = {1,2,4,6}
Intersección: A ∩ B = {2}
Diferencia: A−B={1}

Probabilidad de sucesos

P(Suceso seguro) = P(E) = 1
P(Suceso imposible) = P(Ø) = 0
0 ≤ P(suceso) ≤ 1

Probabilidad de la unión:
P(A U B) = P(A) + P(B) si A y B son incompatibles
P(A U B) = P(A) + P(B)−P(A ∩ B) A y B compatibles.

Regla de Laplace

Cuando los sucesos elementales son equiprobables:

$$P = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Si el experimento no es regular se recurre a la experimentación, tomando como probabilidad la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

Experimentos compuestos

Están formados por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva. Para calcular la probabilidad de multiplican las de los sucesos simples que lo forman.

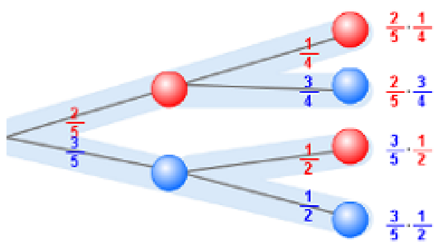
En sucesos consecutivos pueden producirse dos situaciones:
1) **Independientes**, no influyen en el otro.
Como en las extracciones con devolución
2) **Dependientes**, cada suceso está condicionado por el anterior
Como en las extracciones sin devolución.

Probabilidad condicionada

$$\mathbf{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Con un diagrama de árbol es fácil calcular la probabilidad de un experimento compuesto:

P(A y B)=P(A)·P(B/A)



Autoevaluación

1. Escribimos cada una de las letras de la palabra ENSEÑANZA en un papel y sacamos una al azar. Escribe el suceso "salir vocal"

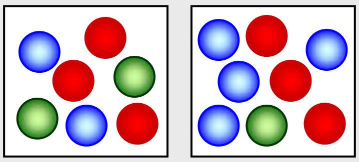
2. Una moneda está trucada de manera que la probabilidad de salir cruz es doble que la probabilidad de salir cara, ¿qué probabilidad hay de sacar cara?

3. En una bolsa hay 100 bolas numeradas del 0 al 99, se extrae una bola calcula la probabilidad de que en sus cifras no esté el 9.

4. Se elige una ficha de dominó, considera los sucesos A="salir una ficha doble", B="la suma de los puntos es múltiplo de 4". ¿Cuál es la probabilidad de $A \cup B$?

5. Si A y B son dos sucesos tales que P(A)=0,42; P(B)=0,30 y $P(A \cap B)=0{,}12$. Calcula la probabilidad de que no ocurra ni A ni B.

6. Se lanza una moneda y un dado, calcula la probabilidad de que salga "cara" y "número impar"



7. Tenemos dos urnas con bolas rojas, verdes y azules, como en la figura. Sacamos una bola de cada urna, calcula la probabilidad de las dos bolas sean rojas.

	aprueban	suspenden
4ºA	14	7
4ºB	15	14

8. Los resultados de un examen realizado por dos grupos de 4º ESO se muestran en la tabla de la izquierda. Se elige un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que sea del grupo A si sabemos que ha aprobado.

9. Tengo en un cajón 6 calcetines de color blanco y 14 de color negro. Si cojo dos calcetines sin mirar, ¿qué probabilidad hay de que sean del mismo color?

10. Se sacan dos cartas de una baraja de 40, una tras otra. Si la extracción se hace con devolución, calcula la probabilidad de que una sea copas y otra de bastos.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. A={2,4,6,8,10,12}
B={7,8,9,10,11,12}
C={1,2}
D={3,6,9,12}
Incompatibles B y C, C y D

2. A={2-6,3-5,3-6,4-4,4-5,4-6,5-5,5-6,6-6}
B={0-5,1-4,2-3,4-6,5-5}
$A\cap B$={4-6,5-5}
$A\cap \overline{B}$={2-6,3-5,3-6,4-4,4-5, 5-6,6-6}

3. $A\cap B$ = {10C,11C,12C}
$\overline{A}\cap B$ = {1C,2C,3C,4C,5C,6C,7C}

4. $A\cup B$ = B
$A\cap B$= A
$\overline{B}$={CCCC,CCCX,CCXC,CXCC,XCCC}

5. 4/21=0,19

6. 9/27=1/3

7. En la segunda (2/7)

8. a) 13/30 b) 9/30

9. 9/38

10. 27/36=0,75

11. 0,85

12. P(1)=P(3)=P(5)=3/12
P(2)=P(4)=P(6)=1/12
P(impar)=3·3/12=9/12

13. P(ni A ni B)=1– $P(A\cup B)$=1– 0,40=0,60

14. P(A – B) = 0,14
P(B – A) = 0,49

15. P(roja)≈ 0,32
5 blancas, 7 rojas, 11 negras.

16. a) 17/49 b) 10/42

17. 16/49

18. 22/72

19. a) 9/39 b) 5/78

20. 0,84

21. a) 2/90 b) 4/15

22. a) $P(M\cap F)$=26/320
b) P(M/F)=26/45

23. a) 3·0,8·0,8·0,2 = 0,384
b) 0,2·0,2·0,2 = 0,008

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. {A, E}

2. 1/3

3. 481/100=0,81

4. 11/28

5. 1- 0,60 =0,40

6. 1/4=0,25

7. 9/56

8. 14/29

9. 53/95

10. 1/8

No olvides enviar las actividades al tutor ▶