TEMA 9 – INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

9.1 – PRIMITIVA. REGLAS BÁSICAS PARA SU CÁLCULO

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN f(x): F(x) es una **primitiva** de f(x) si F'(x) = f(x)

Ejemplos:	función: f(x)	Primitiva: F(x)
	$2x$	x^2
	sen x	- cos x
	e^x	e^x
	1/x	Ln |x|

Nota: Una función tiene infinitas primitivas

Ejemplo:	función: f(x)	Primitiva: F(x)
	$2x$	x^2
	$2x$	$x^2 + 1$
	$2x$	$x^2 – 7$
	.....	.....
	$2x$	$x^2 + C$

INTEGRAL INDEFINIDA DE f(x)

Llamamos **integral indefinida** o simplemente **integral** de f(x) al conjunto de todas sus primitivas y se denota:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{t.q. } F'(x) = f(x)$$

Ejemplos:

[1] $\int 2x\,dx = x^2 + C$

[2] $\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + C$

[3] $\int \frac{1}{x}dx = \text{Ln}\,|x| + C$

OPERACIONES CON INTEGRALES (Se cumplen las mismas que en derivadas)

[1] $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$

[2] $\int (f \pm g)(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

[3] $\int (f.g)(x)dx \neq \left[\int f(x)dx\right].\left[\int g(x)dx\right]$

[4] $\int \left(\frac{f}{g}\right)(x)dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

FUNCIÓN	INTEGRAL	FUNCIÓN	INTEGRAL
$\int k\,dx$	$kx + C$		
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int f'(x).f^n(x)\,dx$	$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$	$\sqrt{x}+C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,dx$	$\sqrt{f(x)}+C$
$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}dx$	$\sqrt[n]{x}+C$	$\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}}dx$	$\sqrt[n]{f(x)}+C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{Lna}+C$	$\int f'(x).a^{f(x)}dx$	$\frac{a^{f(x)}}{Lna}+C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$	$\int f'(x).e^{f(x)}dx$	$e^{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$Ln\,\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$Ln\,\lvert f(x)\rvert + C$
$\int sen\ x\,dx$	$-\cos x + C$	$\int f'(x).sen\ f(x)\,dx$	$-\cos f(x) + C$
$\int \cos x\,dx$	$sen\ x + C$	$\int f'(x).\cos f(x)\,dx$	$sen\ f(x) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$ $\int \left[1+tag^2 x\right]dx$	$tag\ x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx =$ $\int f'(x).\left[1+tag^2 f(x)\right]dx$	$tag\ f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$arcsen\ x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx$	$arcsen\ f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$arctag\ x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$	$arctag\ f(x) + C$

Ejemplos:

[1] $\int 2\,dx = 2x + C$

[2] $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}+C$

[3] $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$

[4] $\int 2x^5\,dx = 2.\frac{x^6}{6}+C = \frac{x^6}{3}+C$

[5] $\int \sqrt[3]{2x^2}\,dx = \sqrt[3]{2}\,\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C = \sqrt[3]{2}\,\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}+C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x^5}+C = \frac{3x.\sqrt[3]{2x^2}}{5}+C$

[6] $\int \frac{4}{x^3}\,dx = 4\int x^{-3}dx = 4.\frac{x^{-2}}{-2}+C = -\frac{2}{x^2}+C$

[7] $\int 3x^3 - \text{sen}x + 2^x\,dx = 3\frac{x^4}{4} + \cos x + \frac{2^x}{\text{Ln}2} + C$

[8] $\int 3\cos x - 5.e^x\,dx = -3\text{sen}x - 5e^x + C$

[9] $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsen}x + C$

[10] $\int \frac{3}{x^2+1}dx = 3.\text{arctag}\,x + C$

[11] $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\text{Ln}\left|x^2+1\right| + C$

[12] $\int (2x-5).\cos(x^2 - 5x + 3)dx = \text{sen}(x^2 - 5x + 3) + C$

[13] $\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int 3.e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$

[14] $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\text{arcsen}x^2 + C$

[15] $\int \text{tag}x\,dx = \int \frac{\text{sen}x}{\cos x}dx = -\text{Ln}\,|\cos x| + C$

[16] $\int \frac{3x}{x^2+2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx = \frac{3}{2}\text{Ln}\,|x^2+2| + C$

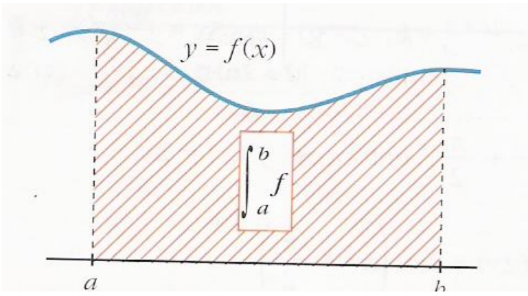
9.2 – INTEGRAL DEFINIDA. ÁREA BAJO UNA CURVA

APROXIMACIÓN DEL AREA BAJO UNA CURVA

El área entre la gráfica de la función y = f(x) y el eje X, en el intervalo [a,b] se designa:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

(Regla de Barrow)



PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

[1] $\int_a^a f(x)dx = 0$

[2] $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

[3] Signo de la integral:

- Si f(x) > 0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$
- Si f(x) < 0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx < 0$

[4] Si a < b < c y f es continua en [a,b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

[5] Si $f(x) \le g(x)$ en cada $x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

OPERACIONES CON INTEGRALES DEFINIDAS

[1] Suma o resta: $\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

[2] Multiplicación por un escalar: $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

[1] Cálculo del área encerrada entre una curva y el eje OX entre x = a y x = b

- Si $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$
  $A = \int_a^b f(x)dx$

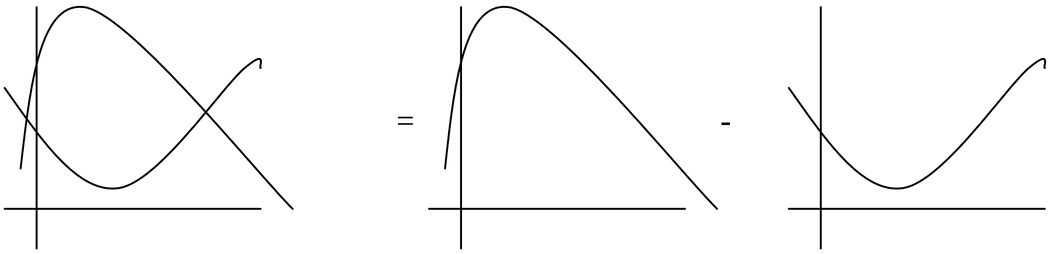
- Si $f(x) < 0$, $x \in [a,b]$
  $A = -\int_a^b f(x)dx$

- Si f(x) cambia de signo en [a,b]
  $x \in [a,c]$ $f(x) \geq 0$
  $x \in [c,b]$ $f(x) < 0$

  $A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$

- Cálculo:
  - Hallar los puntos de corte de la función con el eje OX (y = 0)
  - Hallar una tabla de valores entre los puntos de corte
  - Representar la función (extremos relativos, puntos de inflexión)
  - Hallar la integral, teniendo en cuenta cuando la función está por encima del eje y cuando por debajo.

[2] Cálculo del área encerrada entre varias curvas



$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Es decir, la integral definida entre la resta de la función que esta por encima menos la que está por debajo entre los puntos de corte de ambas.

- <u>Cálculo</u>:
  - Puntos de corte entre las dos funciones. Resolver el sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$
  - Hallar una tabla de valores entre los puntos de corte
  - Representar cada función (extremos relativos, puntos de inflexión)
  - Hallar la integral, cual es la función que está por encima y cuál es la que está por debajo.