

TEMA 7 – APLICACIONES DE LA DERIVADA

7.1 – RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UNO DE SUS PUNTOS

Si $f(x)$ es derivable en x_0 , **la ecuación de la recta tangente** a la gráfica de $y = f(x)$ en x_0 es: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Práctica :

[1] Si nos dan el punto de tangencia $x = x_0$:

Hallamos $f(x_0)$, $f'(x) \Rightarrow f'(x_0)$ y aplicamos la fórmula: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

[2] Si nos dan la pendiente de la recta tangente m :

$m = f'(x) \Rightarrow$ Resolvemos la ecuación y obtenemos x_0 y procedemos como en [1]

7.2 – INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA PRIMERA DERIVADA

7.2.1 – CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES

f creciente en x_0 \Leftrightarrow Existe un entorno del punto x_0 ($x_0 - a$, $x_0 + a$) tal que:

Si $x_0 - a < x < x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$

Si $x_0 < x < x_0 + a$, entonces $f(x) > f(x_0)$

f decreciente en x_0 \Leftrightarrow Existe un entorno del punto x_0 ($x_0 - a$, $x_0 + a$) tal que:

Si $x_0 - a < x < x_0$, entonces $f(x) > f(x_0)$

Si $x_0 < x < x_0 + a$, entonces $f(x) < f(x_0)$

7.2.2 – RELACIÓN DEL CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN CON EL VALOR DE SU DERIVADA

$f(x)$ derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

$f(x)$ derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

7.2.3 – CRITERIO PARA IDENTIFICAR TRAMOS CRECIENTES O DECRECIENTES A PARTIR DEL SIGNO DE LA DERIVADA

Si $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en x_0

Si $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en x_0

7.2.4 - MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS. DEFINICIÓN

f tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x_0 \Leftrightarrow$ Existe un número a tal que si $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ entonces $f(x) < f(x_0)$

f tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x_0 \Leftrightarrow$ Existe un número a tal que si $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ entonces $f(x) > f(x_0)$

7.2.5 - CONDICIÓN NECESARIO DE MÁXIMO O MÍNIMO RELATIVO EN FUNCIONES DERIVABLES

Si $f(x)$ es derivable en x_0 y tiene un máximo o mínimo en él, entonces $f'(x_0) = 0$. Es decir: $f(x)$ máximo o mínimo en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

7.2.6 - REGLA PARA IDENTIFICAR EXTREMOS RELATIVOS

Para saber si un punto singular ($f'(x_0) = 0$) es máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión, estudiaremos el signo de la derivada en las proximidades del punto, a su izquierda y a su derecha.

Máximo: $f' > 0$ a su izquierda $f' < 0$ a su derecha
 Mínimo: $f' < 0$ a su izquierda $f' > 0$ a su derecha
 Inflexión: f' tiene el mismo signo a ambos lados del punto.

7.3 – INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA SEGUNDA DERIVADA

7.3.1 - DEFINICIÓN DE CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTO DE INFLEXIÓN

Tenemos una curva $y = f(x)$. Trazamos la recta tangente a ella en un punto P, cuya ecuación es $y = t(x)$. Entonces:

- Si en las cercanías de P es $f(x) > t(x)$, la curva es **convexa** en P.
- Si en las cercanías de P es $f(x) < t(x)$, la curva es **cóncava** en P.
- Si la tangente atraviesa la curva en P, es decir, si a la izquierda de P es $f(x) < t(x)$ y a la derecha $f(x) > t(x)$, o viceversa, P es un **punto de inflexión**.

7.3.2 - RELACIÓN DE LA CURVATURA CON LA SEGUNDA DERIVADA

Si f tiene segunda derivada en x_0 , se cumple que:

- f **convexa** en $x_0 \Rightarrow f'$ es creciente en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$
- f **cóncava** en $x_0 \Rightarrow f'$ es decreciente en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$
- f tiene un **punto de inflexión** en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

7.3.3 - CRITERIO PARA DETECTAR EL TIPO DE CURVATURA

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es **convexa** en x_0

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es **cóncava** en x_0

$f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un **punto de inflexión** en x_0

7.3.4 - APLICACIÓN A LA IDENTIFICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Si $f'(x_0) = 0$ y existe $f''(x_0)$, entonces:

- Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Es un mínimo relativo en x_0
- Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Es un máximo relativo en x_0
- Si $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$????

7.4 – OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Con mucha frecuencia aparecen problemas físicos, geométricos, económicos, biológicos,... en los que se trata de optimizar una función (hacer máximo un volumen, unos beneficios, una población; hacer mínimos unos costes o un área,...).

- Calculamos la función a optimizar (normalmente dependerá de dos variables) $f(x,y)$
- Buscamos una relación entre las variables: Ecuación $g(x,y) = 0$
- Despejamos una incógnita de la ecuación ($g(x,y) = 0$) y la sustituimos en la función $f(x,y)$ con lo cual la función ya sólo dependerá de una variable $f(x)$
- Optimizamos la función $f(x)$: $f'(x) = 0$ y comprobamos si son máximos o mínimos.

EXTREMOS ABSOLUTOS: CÁLCULO DE LOS EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN $f(x)$ EN UN INTERVALO $[a,b]$

- a) **Si f es derivable en $[a,b]$** , los máximos y mínimos absolutos están entre los puntos singulares ($f'(x) = 0$) y los correspondientes extremos del intervalo:
 - Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$
 - Seleccionamos la raíces x_1, x_2, \dots que están entre a y b
 - Se calcula: $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(b)$
 - El valor máximo será el máximo y el valor mínimo será el mínimo.
- b) **Si hay algún punto en $[a,b]$ en el que la función no sea derivable**, aunque si continua, calcularemos, además, el valor de f en ese punto, pues podría ser un extremo.
- c) **Si f no es continua en algún punto x_0 de $[a,b]$** , estudiaremos el comportamiento de la función en las cercanías de x_0 .