TEMA 7 – APLICACIONES DE LA DERIVADA

RECTA TANGENTE

<u>EJERCICIO 1</u> **: Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ en $x_0=0$.**

Solución:

•Ordenada del punto: $f(0)=1$

•Pendiente de la recta: $f'(x)=\dfrac{2xe^x-(x^2+1)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x(2x-x^2-1)}{(e^x)^2}=\dfrac{2x-x^2-1}{e^x}\Rightarrow f'(0)=-1$

•Ecuación de la recta tangente: $y-1=-1\,(x-0)\;\rightarrow\; y=-x+1$

<u>EJERCICIO 2</u> **: Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)=x^3+3x^2+9x$ que son paralelas a la recta $y=9x+2$.**

Solución:

- Si son paralelas a la recta $y=9x+2$, tienen la misma pendiente; es decir, ha de ser: $f'(x)=9$

$$f'(x)=3x^2+6x+9=9\;\rightarrow\; 3x^2+6x=0\;\rightarrow\; 3x\,(x+2)=0\;\rightarrow\;\begin{cases}x=0\\ x=-2\end{cases}$$

- Ordenadas en los puntos: $f(-2)=-14$; $f(0)=0$
- Ecuaciones de las rectas tangentes:

- En $x=-2\;\rightarrow\; y+14=9\,(x+2)\;\rightarrow\; y=9x+4$
- En $x=0\;\rightarrow\; y=9x$

<u>EJERCICIO 3</u> **: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\sqrt{x^2+3x+6}$ en el punto de abscisa $x_0=2$.**

Solución:

•Ordenada en el punto: $y(2)=4$

•Pendiente de la recta: $y'=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+6}}\;\rightarrow\; y'(2)=\dfrac{7}{8}$

•Ecuación de la recta tangente: $y-4=\dfrac{7}{8}(x-2)\;\rightarrow\; y=\dfrac{7}{8}x+\dfrac{9}{4}$

ESTUDIO DE FUNCIONES

<u>EJERCICIO 4</u> **: Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función: $f(x)=\dfrac{3x^2-9x+3}{3x-1}$**

Solución:

$$f'(x)=\frac{(6x-9)(3x-1)-(3x^2-9x+3)3}{(3x-1)^2}=\frac{18x^2-6x-27x+9-9x^2+27x-9}{(3x-1)^2}==\frac{9x^2-6x}{(3x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\;\rightarrow\; 9x^2-6x=0\;\rightarrow\; 3x(3x-2)=0\;\rightarrow\;\begin{cases}3x=0\;\rightarrow\; x=0\\ 3x-2=0\;\rightarrow\; x=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
↗	0	↘	$\frac{2}{3}$	↗

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,\,0)\cup\left(\dfrac{2}{3},\,+\infty\right)$; es decreciente en $\left(0,\,\dfrac{2}{3}\right)$.

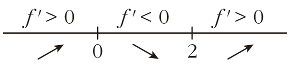
Tiene un máximo en $(0,\,-3)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{2}{3},\,\dfrac{-5}{3}\right)$.

<u>EJERCICIO 5</u> : Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función: $f(x) = 3x^2(x-3)$
Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Solución:

- *Primera derivada:* $f(x) = 3x^3 - 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 18x = 9x(x-2) \Rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

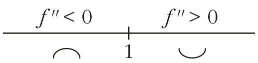
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(0, 2)$.
Tiene un máximo en $(0, 0)$ y un mínimo en $(2, -12)$.

- *Segunda derivada:* $f''(x) = 18x - 18 \Rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow 18x - 18 = 0 \rightarrow x = 1$

Signo de $f''(x)$:



$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 1)$ y es cóncava en $(1, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(1, -6)$.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

<u>EJERCICIO 6</u> : La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Halla los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

Solución:
Llamamos x al primer número, y al segundo y z al tercero. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \quad (x,\ y,\ z > 0) \\ x + 2y + 3z = 120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = 60 - z \\ x + 2y = 120 - 3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = z \\ y = 60 - 2z \end{array}$$

El producto de los tres números es: $P = x \cdot y \cdot z = z \cdot (60 - 2z) \cdot z = z^2(60 - 2z) = f(z),\ z > 0$
Buscamos z para que $f(z)$ sea máximo:

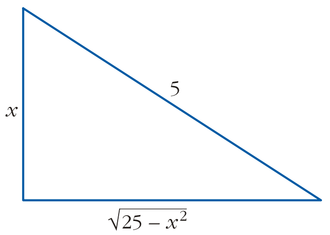
$$f'(z) = 2z(60 - 2z) + z^2 \cdot (-2) = 2z(60 - 2z - z) = 2z(60 - 3z) = 120z - 6z^2$$

$$f'(z) = 0 \rightarrow \begin{cases} z = 0 \ \text{(no vale, pues ha de ser } z > 0). \\ z = 20 \end{cases}$$

Veamos que en $z = 20$ hay un máximo: $f''(z) = 120 - 12z$; $f''(20) = -120 < 0 \rightarrow$ hay un máximo
Por tanto, el producto es máximo para $x = 20,\ y = 20,\ z = 20$.

<u>EJERCICIO 7</u> : Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 metros, determina razonadamente el que tiene área máxima.

Solución:



$$\text{Área} = \frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2} = f(x), \quad 0 < x < 5$$

Buscamos x para que el área sea máxima: $f(x) = \dfrac{\sqrt{25x^2 - x^4}}{2}$

$$f'(x) = \frac{50x - 4x^3}{4\sqrt{25x^2 - x^4}} = \frac{25x - 2x^3}{2\sqrt{25x^2 - x^4}} = \frac{x(25 - 2x^2)}{2x\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

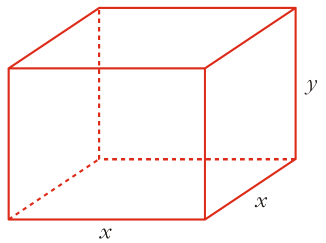
$$f'(x)=0 \quad\rightarrow\quad 25-2x^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2=\frac{25}{2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=-\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (no vale)} \\ x=\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(Como $f'(x)>0$ a la izquierda de $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y $f'(x)<0$ a su derecha, en $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ hay un máximo).

Por tanto, el área es máxima cuando los dos catetos miden $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ metros.

<u>EJERCICIO 8</u> : Se desea construir una piscina de fondo cuadrado, con 32 m^3 de capacidad, de manera que la superficie total (de las paredes más el fondo) sea mínima. ¿Qué dimensiones debe tener la piscina?

Solución:



Llamamos x al lado de la base e y a la altura. El volumen es: $V=x^2y=32\text{ m}^3 \quad\rightarrow\quad y=\frac{32}{x^2}$

La superficie total (paredes más fondo) es: $S=x^2+4xy=x^2+4x\cdot\frac{32}{x^2}=x^2+\frac{128}{x}=f(x) \quad (x>0)$

Buscamos $x>0$ para que la superficie sea mínima: $f'(x)=2x-\frac{128}{x^2}$

$$f'(x)=0 \quad\rightarrow\quad 2x-\frac{128}{x^2}=\frac{2x^3-128}{x^2}=0 \quad\rightarrow\quad 2x^3-128=0 \quad\rightarrow\quad x^3=64 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad x=\sqrt[3]{64}=4 \quad\rightarrow\quad x=4 \quad\rightarrow\quad y=2$$

Veamos que corresponde al mínimo: $f''(x)=2+\frac{256}{x^3};\ f''(4)>0 \quad\rightarrow\quad$ En $x=4$ hay un mínimo.

Por tanto, la piscina debe tener 4 m de lado de la base y 2 m de altura.

<u>EJERCICIO 9</u> : En un colectivo se ha observado que el gasto en cierto producto, $G(x)$ en euros, está relacionado con el salario, x en miles de euros, por medio de la siguiente expresión: $G(x)=\frac{200x}{x^2+1}$ Calcula razonadamente la cuantía del salario a la que corresponde el mayor gasto. ¿Cuál es ese gasto?

Solución:

$$G'(x)=\frac{200(x^2+1)-200x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{200x^2+200-400x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{200-200x^2}{(x^2+1)^2}==\frac{200(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, \quad (x\geq 0)$$

$$G'(x)=0 \quad\rightarrow\quad 1-x^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=-1 \text{ (no vale)} \\ x=1 \end{cases}$$

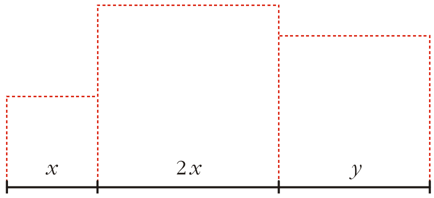
Signo de $G'(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} & G'>0 & & G'<0 & \\ 0 & \nearrow & 1 & \searrow & \end{array}$$

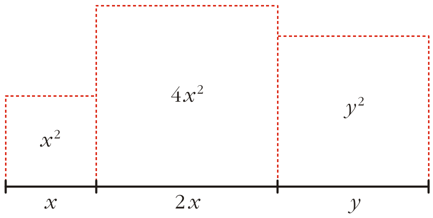
Como $G'(x)>0$ a la izquierda de 1 y $G'(x)<0$ a su derecha; en $x=1$ hay un máximo.

Por tanto, el máximo gasto corresponde a un salario de 1 000 euros. El gasto en este caso es de $G(1)=100$ euros.

<u>EJERCICIO 10</u> : Dividir un segmento de 14 metros en tres partes, dos de las cuales sean tales que una tenga el doble de longitud que la otra; de modo que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre ellas sea mínima:



Solución:



Sabemos que $x + 2x + y = 14 \;\rightarrow\; y = 14 - 3x$

La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada parte es: $S = x^2 + 4x^2 + y^2 = 5x^2 + (14 - 3x)^2 = f(x)$

Buscamos x, $0 \le x \le 14/3$, para que $f(x)$ sea mínima: $f'(x) = 10x + 2\,(14 - 3x)\cdot(-3) = 10x - 84 + 18x = 28x - 84$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 28x - 84 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{84}{28} = 3 \;\rightarrow x = 3$$

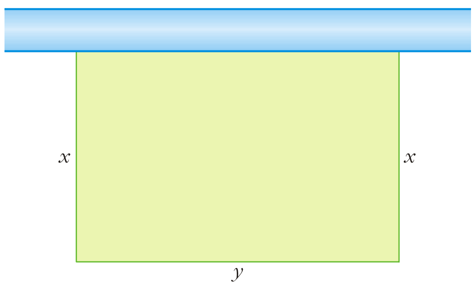
Veamos que se trata de un mínimo: $f''(x) = 28$; $f''(3) > 0 \;\rightarrow\;$ En $x = 3$ hay un mínimo.

$$f(0) = 196;\quad f(3) = 70;\quad f\left(\frac{14}{3}\right) \approx 108{,}89$$

Por tanto, la suma de las áreas será mínima cuando $x = 3$ m, $2x = 6$ m, $y = 5$ m (en este caso, dicha suma será de 70 m^2).

<u>EJERCICIO 11</u> : Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180 000 m^2 para producir suficiente forraje para su ganado.
¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?

Solución:



$$\text{Área} = xy = 180\,000 \text{ m}^2 \;\rightarrow\; y = \frac{180\,000}{x}$$

Cantidad de valla necesaria: $f(x) = 2x + y = 2x + \dfrac{180\,000}{x}$, $x > 0$

Buscamos $x > 0$ que haga $f(x)$ mínima: $f'(x) = 2 - \dfrac{180\,000}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - 180\,000 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 90\,000 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -300 \text{ (no vale)} \\ x = 300 \end{cases}$$

Veamos que en $x = 300$ hay un mínimo: $f''(x) = \dfrac{360\,000}{x^3}$; $f''(300) > 0 \;\rightarrow\;$ hay un mínimo

Por tanto, han de ser: $x = 300$ m, $y = 600$ m

<u>EJERCICIO 12</u> : La cantidad de agua recogida en un determinado año (en millones de litros) en cierto pantano, como función del instante de tiempo (en meses), viene dada a través de la expresión:

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2+1}, \quad 0 \le t \le 12$$

a) ¿En qué instante se obtuvo la cantidad máxima de agua?
b) ¿Cuál fue esa cantidad máxima?

Solución:

a) $f'(t) = \dfrac{-10 \cdot 2(t-6)}{[(t-6)^2+1]^2} = \dfrac{-20(t-6)}{[(t-6)^2+1]^2}$

$f'(t) = 0 \;\rightarrow\; t - 6 = 0 \;\rightarrow\; t = 6$

Signo de $f'(t)$:

$f' > 0$ $\quad$ $f' < 0$

0 $\nearrow$ 6 $\searrow$ 12

Como $f'(t) > 0$ para $t \in (0, 6)$ y $f'(t) < 0$ para $t \in (6, 12)$, en $t = 6$ hay un máximo.

$f(0) \approx 0{,}27$; $\quad f(6) = 10$; $\quad f(12) \approx 0{,}27$

Por tanto, la máxima cantidad de agua se obtuvo en el 6º mes, es decir, en junio.

b) $f(6) = 10 \;\rightarrow\;$ 10 millones de litros

CÁLCULO DE PARÁMETROS

<u>EJERCICIO 13</u> : Halla a, b y c en f(x) = ax^3 + bx^2 + cx – 4 de modo que f tenga un máximo en x = 1 y un mínimo en (2,-10/3)

Solución: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Máximo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Mínimo en $(2,-10/3) \Rightarrow f(2) = -10/3 \Rightarrow 8a + 4b + 2c - 4 = -10/3$

$\Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$

Resolviendo el sistema (Por Gauss) obtenemos: $a = 1/3$, $b = -3/2$, $c = 2$

<u>EJERCICIO 14</u> : Halla a, b y c en f(x) = ax^3 + bx^2 + cx – 4 de forma que la gráfica de g tenga tangente horizontal en x = 1 y x = 2, y pase por el punto (6,26)

Solución: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Tangente horizontal en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Tangente horizontal en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$

Pase por el punto $(6,26) \Rightarrow f(6) = 26 \Rightarrow 216a + 36b + 6c - 4 = 26$

Resolviendo el sistema (Por Gauss) obtenemos: $a = 1/3$, $b = -3/2$, $c = 2$

<u>EJERCICIO 15</u> : Calcula los coeficientes de la parábola f(x) = ax^2 + bx + c, que es tangente a la recta 2x – y – 2 = 0 en el punto (3,4), y que pasa por el origen de coordenadas.

Solución: $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$

Tangente a la recta $y = 2x - 2$ *en el punto* $(3,4) \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow 9a + 3b + c = 4$

$f'(3) = 2 \Rightarrow 6a + b = 2$

Pase por el punto $(0,0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Resolviendo el sistema (Por Gauss) obtenemos: $a = 2/9$, $b = 2/3$, $c = 0$