TEMA 3 – DETERMINANTES

CÁLCULO DE DETERMINANTES

EJERCICIO 1 : Calcula el valor de los siguientes determinantes: **a)** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$

Solución:

a) 20

b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 - (1-x) - (1-x) = (1-x)^3 - 2(1-x) = (1-x)\left[(1-x)^2 - 2\right] =$

$= (1-x)\left[1 - 2x + x^2 - 2\right] = (1-x)\left(x^2 - 2x - 1\right) = -x^3 + 3x^2 - x - 1$

EJERCICIO 2 : Halla el valor de los siguientes determinantes. En el apartado b), calcula , además, los posibles valores de *t* para que el determinante sea cero: **a)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix}$

Solución:

a) 1

b) Calculamos el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix} = t^2 + 4(1-t) - 2t(1-t) - t = t^2 + 4 - 4t - 2t + 2t^2 - t = 3t^2 - 7t + 4$

Veamos para qué valores de *t* se anula el determinante: $3t^2 - 7t + 4 = 0 \;\rightarrow\; t = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{6} = \dfrac{7 \pm 1}{6} \;\rightarrow\; \begin{cases} t = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{6}{6} = 1 \end{cases}$

El determinante vale cero cuando $t = \dfrac{4}{3}$ y cuando $t = 1$.

EJERCICIO 3 : a) Calcula el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b) Resuelve la ecuación:** $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

a) -7

b) Desarrollamos el determinante y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm 1 \;\Rightarrow\; \text{Hay dos soluciones:} \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1$$

EJERCICIO 4 : Calcula cuánto vale el primer determinante y halla los valores de *t* que anulan el segundo determinante: **a)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix}$

Solución:

a) 12

b) $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t\left(t^2 - 2\right) = 0 \;\rightarrow\;\rightarrow\; \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; t^2 = 2 \;\rightarrow\; t = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Hay tres soluciones: $t_1 = 0; \quad t_2 = -\sqrt{2}; \quad t_3 = \sqrt{2}$

EJERCICIO 5 : Calcula el valor del determinante propuesto en a) y resuelve la ecuación propuesta en b):

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

a) 1

b) Desarrollamos el determinante e igualamos a cero el resultado:

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{COLUMNAS}}{=} \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \end{array} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \quad \to \quad a = \pm 1 \quad \Rightarrow \text{ Hay dos soluciones: } \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 1$$

(1) Desarrollamos por la 2ª columna.

EJERCICIO 6 : Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \end{vmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 3x & 3y \\ 3a & 3b \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \end{vmatrix} = 2x \cdot \frac{b}{2} - 2y \cdot \frac{a}{2} = xb - ya = \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ Por tanto, la igualdad es verdadera.

b) $\begin{vmatrix} 3x & 3y \\ 3a & 3b \end{vmatrix} = 9xb - 9ay = 9(xb - ay) = 9\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ Luego, es falsa.

EJERCICIO 7 : **Si** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$, **calcula el valor de los siguientes determinantes:** $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$$

$\begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b \\ 2d & d \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 3 = 6$ (1) El segundo determinante es 0, pues tiene dos columnas proporcionales.

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2^2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 = 12$$

EJERCICIO 8 : Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

a) $$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = 2y - 2x \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y - 2x \end{array}\right\} \text{Son iguales} \quad \to \quad \text{La igualdad es cierta.}$$

b) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = a^4 - a^4 = 0 \quad \to \quad$ También es cierta esta igualdad.

EJERCICIO 9 : Si A y B son dos matrices 2 x 2, tales que |A| = 2 y |B| = -4, calcula:

$$|A^2|; \quad |-A|; \quad |2A|; \quad |AB|; \quad |A^t|; \quad |A^{-1}|$$

Solución: Sabemos que, si A y B son dos matrices 2×2, entonces:

1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ 2) $|k \cdot A| = k^2 |A|$ 3) $|A^t| = |A|$

Por tanto:

- $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = 2^2 = 4$
- $|-A| = |(-1) \cdot A| = (-1)^2 |A| = 1 \cdot |A| = |A| = 2$
- $|2A| = 2^2 |A| = 4|A| = 4 \cdot 2 = 8$
- $|AB| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-4) = -8$
- $|A^t| = |A| = 2$

Para hallar $|A^{-1}|$, vamos a tener en cuenta que $A \cdot A^{-1} = I$ y que existe A^{-1}, puesto que $|A| = 2 \neq 0$. Así:

- $|A \cdot A^{-1}| = |I| \;\rightarrow\; |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \;\rightarrow\; |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$

EJERCICIO 10 :

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 4$, **halla el valor de los siguientes determinates:** **a)** $\begin{vmatrix} a & b \\ x-a & y-b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ x & y \end{vmatrix}$

Solución:

a) Sumamos la 2ª fila la 1ª: $\begin{vmatrix} a & b \\ x-a & y-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 4$

b) $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -4$

c) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ x & y \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$

RANGO DE MATRICES

EJERCICIO 11 : **Averigua cuál es el rango de las siguientes matrices:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & -11 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & -11 & 7 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 12 & -11 & 7 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 3 \\ 0 & 14 & -14 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3=F_3-2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango A = 2

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} \underset{F_3=F_3+2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{pmatrix}$$

Rag B = 3

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango C = 3

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Rango D = 3

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango E = 3

<u>EJERCICIO 12</u> : Estudia el rango de las siguientes matrices, según los valores de los parámetros:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&t&3&2\\1&8-3t&3&-2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&a&-3&0\\4&1&a&0\end{pmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}a&1&3&0\\1&a&2&1\\2&2a&5&a\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&4&2\\0&t&4&0\\-1&3&t&-2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&1&\lambda+1&1\\\lambda&0&0&2\\0&\lambda&2&0\end{pmatrix}$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&t&3&2\\1&8-3t&3&-2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&1&3&2\\1&2&3&t\\1&-2&3&8-3t\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&1&3&2\\0&1&0&t-2\\0&-3&0&6-3t\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&1&3&2\\0&1&0&t-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Rango A = 2 para cualquier valor de t

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&a&-3&0\\4&1&a&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&a&-3&0\\0&1&a+4&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&a+4&0\\0&a&-3&0\end{pmatrix}\approx$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&a+4&0\\0&0&-a^2-4a-3&0\end{pmatrix}\qquad -a^2-4a-3=0$$

$$a^2+4a+3=0\quad\rightarrow\quad a=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}\quad\begin{cases}a=-1\\a=-3\end{cases}$$

- Si $a\neq-1$ y $a\neq-3\quad\rightarrow\quad \text{ran}(B)=3$
- Si $a=-1$ o $a=-3\quad\rightarrow$ ran (*B*) = 2

$$C=\begin{pmatrix}a&1&3&0\\1&a&2&1\\2&2a&5&a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3&1&a&0\\2&a&1&1\\5&2a&2&a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3&1&a&0\\0&3a-2&3-2a&3\\0&6a-5&6-5a&3a\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3&0&a&1\\0&3&3-2a&3a-2\\0&3a&6-5a&6a-5\end{pmatrix}$$

$$\approx\begin{pmatrix}3&0&a&1\\0&3&3-2a&3a-2\\0&0&2a^2-8a+6&-3a^2+8a-5\end{pmatrix}\qquad 2a^2-8a+6=0$$

$$a^2-4a+3=0\quad\rightarrow\rightarrow\quad a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm2}{2}\quad\begin{cases}a=3\\a=1\end{cases}$$

- Si $a\neq 1, 3\Rightarrow$ Rango C = 3
- Si $a=1\Rightarrow\begin{pmatrix}3&0&1&1\\0&3&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$ Rango C = 2
- Si $a=1\Rightarrow\begin{pmatrix}3&0&1&1\\0&3&-3&7\\0&0&0&-8\end{pmatrix}\Rightarrow$ Rango C = 3

$$D=\begin{pmatrix}1&0&4&2\\0&t&4&0\\-1&3&t&-2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&0&4&t\\-1&-2&t&3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&0&4&t\\0&0&t+4&3\end{pmatrix}$$

$$\approx\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & t \\ 0 & 0 & 0 & -t^2-4t+12 \end{pmatrix} \quad -t^2 - 4t + 12 = 0$$

$$t^2+4t-12=0 \quad \rightarrow \quad t=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2}=\frac{-4\pm 8}{2} \quad \begin{cases} t=2 \\ t=-6 \end{cases}$$

- Si $t\neq 2$ y $t\neq -6$ $\rightarrow$ $\text{ran}\,(D)=3$
- Si $t=2$ o $t=-6$ $\rightarrow$ ran (*D*) = 2.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & -2 & -2\lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & -2 & -2\lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & -2\lambda^2-2\lambda+4 & \lambda^2-2\lambda \end{pmatrix} \quad -2\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \quad \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=-2 \end{cases}$$

- Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -2$ $\rightarrow$ $\text{ran}\,(E)=3$
- Si $\lambda=1$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Rango (E) = 3
- Si $\lambda=-2$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ Rango (E) = 3

Por tanto, ran (E) = 3 para cualquier valor de λ.

CALCULO DE LA INVERSA Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MATRICIALES

<u>EJERCICIO 13</u> : Calcula, si es posible, la inversa de la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$ para los casos en los que *a* = 2 y *a* = 0.

Solución:

Para *a* = 2, queda: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Entonces, $|A|=-2$. En este caso, sí existe A^{-1}. La calculamos:

$$\text{Adj}\,(A)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}\,(A))^t=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Para *a* = 0, queda: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Como las dos primeras filas son iguales, $|A|=0$. Por tanto, en este caso, no existe A^{-1}.

<u>EJERCICIO 14</u> :

a) Calcula para qué valores de λ existe la inversa de la matriz: $A=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$ b)Calcular A^{-1} para $\lambda = 0$

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 4\lambda - 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 3(\lambda+1)^2$

$|A| = 0 \rightarrow 3(\lambda+1)^2 = 0 \rightarrow \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1$ Por tanto, existe A^{-1} para $\lambda \neq -1$.

b) Para $\lambda = 0$, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 3 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla *X* tal que *AX = B*, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución: Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

Despejamos X de la ecuación dada: $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

Hallamos la matriz inversa de A:

$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Obtenemos la matriz X: $X = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -15 & -5 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 16</u>

a) Encuentra los valores de *a* para los que la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **no es inversible. b)Calcula A^{-1} para a=2**

Solución:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2 - (a-2) + a \cdot (a-2) - 2a - 2 = 3a^2 - 5a + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$ Por tanto, la matriz no es inversible para $a = 1$ y para $a = \frac{2}{3}$.

b) Para $a = 2$, tenemos que $|A| = 4$. La matriz A queda:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 17</u> : Halla una matriz, *X*, tal que *AX + B = 0*, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

Despejamos X en la ecuación dada: $AX + B = 0 \rightarrow AX = -B \rightarrow A^{-1}AX = -A^{-1}B \rightarrow X = -A^{-1}B$

Hallamos la matriz inversa de A: $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Obtenemos la matriz X: $X = -A^{-1}B = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 18</u> :

a) Calcula una matriz X que verifique la igualdad: $A \cdot X = B$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

Solución:

a) $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Calculamos A^{-1} (existe, pues $|A| = 1 \neq 0$):

$\alpha_{ij} \rightarrow Adj(A) \rightarrow [Adj(A)]^t \rightarrow \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$

Por tanto: $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = X$

b) Sabemos que el producto de matrices no es conmutativo y que, por tanto, en general, $M \cdot N \neq N \cdot M$. Pero veamos si en este caso se cumple la igualdad. $X \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq B$

Por tanto, X *no* verifica la igualdad $X \cdot A = B$.

<u>EJERCICIO 19</u> : Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $(A - I)^2 \cdot (A - 5I)$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

b) Obtén A^t y razona si existe la inversa de A.

Solución:

a)

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-I)^2 = (A-I)\cdot(A-I) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2 \cdot (A-5I) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$A^t=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\1&1&2\end{pmatrix}\quad \text{Como } |A|=5\neq 0, \text{ si existe } A^{-1}.$$

<u>EJERCICIO 20</u> :

a) Calcula el valor de *x* para que la matriz *A* tenga inversa: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{x}&\mathbf{0}\\\mathbf{x}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **b) Halla A^{-1} para *x* = 2.**

Solución:

a) Para que exista A^{-1} es necesario y suficiente que $|A|\neq 0$. Calculamos $|A|$: $|A|=1\neq 0$ para todo x.
Por tanto, existe A^{-1} cualquiera que sea el valor de x.

b) Para $x=2$, queda: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ |\mathrm{A}|=1$

Hallamos A^{-1} en este caso: $\alpha_{ij}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\-1&0&2\\-2&-1&5\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \mathrm{Adj}(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}2&-1&-4\\1&0&-2\\-2&1&5\end{pmatrix}\ \rightarrow\ [\mathrm{Adj}(\mathrm{A})]^t=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&0&1\\-4&-2&5\end{pmatrix}\ \rightarrow$

$$\rightarrow\ \frac{1}{|\mathrm{A}|}[\mathrm{Adj}(\mathrm{A})]^t=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&0&1\\-4&-2&5\end{pmatrix}=\mathrm{A}^{-1}$$

<u>EJERCICIO 21</u> : Comprueba que la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{a^2-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{a}\end{pmatrix}$ **tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro "a" y calcular A^{-1}**

Solución:

- Utilizando determinantes:

Calculamos el determinante de A: $|A|=\begin{vmatrix}a&a^2-1\\1&a\end{vmatrix}=a^2-(a^2-1)=a^2-a^2+1=1\neq 0$ para cualquier valor de a

Por tanto, como $|A|\neq 0$, existe A^{-1} para todo a.

Hallamos A^{-1}: $Adj\,(A)=\begin{pmatrix}a&-1\\1-a^2&a\end{pmatrix}\ \rightarrow\ (Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}a&1-a^2\\-1&a\end{pmatrix}\ \rightarrow\rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}a&1-a^2\\-1&a\end{pmatrix}$

- Por método de Gauss:

Estudiamos el rango de A: $\begin{pmatrix}a&a^2-1\\1&a\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{array}{c}2^a\\a\cdot 2^a-1^a\end{array}\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ ran\,(A)=2$ para cualquier valor de a.

Por tanto, existe A^{-1} para todo a.

Hallamos A^{-1}: $\left(\begin{array}{cc|cc}a&a^2-1&1&0\\1&a&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow\ \begin{array}{c}\\-a\cdot 2^a+1^a\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}a&a^2-1&1&0\\0&-1&1&-a\end{array}\right)\ \rightarrow$

$$\rightarrow\ \begin{array}{c}1^a+(a^2-1)2^a\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}a&0&a^2&-a(a^2-1)\\0&-1&1&-a\end{array}\right)\ \rightarrow\rightarrow\ \begin{array}{c}\frac{1}{a}1^a\\-2^a\end{array}\begin{pmatrix}a&-(a^2-1)\\-1&a\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}a&1-a^2\\-1&a\end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIO 22</u> : Halla una matriz, *X*, tal que *AX* = *B*, siendo: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{5}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$

Solución:

- Utilizando determinantes:

Despejamos X en la ecuación, multiplicando por la izquierda por A^{-1}: $AX=B\ \rightarrow\ A^{-1}AX=A^{-1}B\ \rightarrow\ X=A^{-1}B$

Comprobamos que $|A|=-2\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&2&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\rightarrow(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&2&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&4&0\\2&2&2\\0&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

- Por método de Gauss:

Calculamos A^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a-3^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&0&0\\0&-1&0&0&1&-1\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\begin{array}{c}1^a+2^a\\2^a\\3^a+2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&-1\\0&-1&0&0&1&-1\\1&0&1&0&1&0\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a\\2\cdot3^a-1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&-1\\0&-1&0&0&1&-1\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 23</u> :

a) Halla los valores de *a* para que los que existe la matriz inversa de: $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\1&1&a\\-2&1&1\end{pmatrix}$ **b)Calcula A^{-1} para *a* = 0**

Solución:

- Utilizando determinantes:

a) Calculamos $|A|=1+1-2a^2+2-a-a=0\rightarrow -2a^2-2a+4=0\begin{cases}a=1\\a=-2\end{cases}$

Por tanto, existe A^{-1} si $a\neq1$ y $a\neq-2$.

b) Para $a=0$ queda $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow |A|=2$

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

- Por método de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a-3^a\\2^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&-1\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\begin{array}{c}1^a+2^a\\2^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&-1\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2\cdot2^a-1^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&-1\\0&2&0&-1&1&1\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a\\2\cdot3^a-2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&-1\\0&2&0&-1&1&1\\0&0&2&1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 24</u> :

a) Estudia para qué valores de λ existe la inversa de la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\\lambda&0&2\\2&-1&0\end{pmatrix}$ **b)Calcular A^{-1} para λ = 0**

Solución:

- Utilizando determinantes:

a) La condición necesaria y suficiente para que exista A^{-1} es que $|A|\neq0$.

Calculamos $|A|$: $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda + 4 + 2 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 6 \Rightarrow$ Por tanto, existe A^{-1} si $\lambda = 6$.

b) Para $\lambda = 0$ la matriz es $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |\mathrm{A}| = 6$

$$\mathrm{Adj}(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (\mathrm{Adj}(\mathrm{A}))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

• Por método de Gauss:

a) Estudiamos el rango de A:

$$\begin{array}{c} 1^{a} \\ 3^{a} \\ 2^{a} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} - 2\cdot 1^{a} \\ 3^{a} - \lambda\cdot 1^{a} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ -3\cdot 3^{a} + \lambda\cdot 2^{a} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 6$, $ran(A) = 2 \;\rightarrow\;$ No existe A^{-1}

Si $\lambda \neq 6$, $ran(A) = 3 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}

b) Para $\lambda = 0$ la matriz es $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 3^{a} \\ 2^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} - 2\cdot 1^{a} \\ 3^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 3\cdot 1^{a} + 2^{a} \\ 2^{a} + 3^{a} \\ 3^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} -2\cdot 1^{a} + 3\cdot 3^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIO 25</u> : Resuelve matricialmente el siguiente sistema: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Así, tenemos que $A \cdot X = B$. Hemos de calcular $X = A^{-1} \cdot B$.

Hallamos A^{-1} (existe, pues $|A| = 1 \neq 0$):

$$\alpha_{ij} \quad\rightarrow\quad Adj(A) \quad\rightarrow\quad [Adj(A)]^t \quad\rightarrow\quad \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{-1}$$

Por tanto: $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ *Solución:* $x = 2$; $y = -3$; $z = 2$.

<u>EJERCICIO 26</u> : Expresa y resuelve en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 6 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 2y + z = 7 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y - 2z = 5 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = -4 \\ x - y + z = -1 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} 4x + 2y - z = 6 \\ x \qquad + z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} -3x + y - z = -5 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x \qquad + z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

*a) E*xpresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}\quad\to\quad\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}\quad\to\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1}: $|A|=\left|\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\right|=-1\neq 0\quad\to\quad \text{Existe } A^{-1}$

Calculamos la inversa de A:

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\quad\to\quad(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\-3&1&1\end{pmatrix}\quad\to\to\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

Despejamos X: $AX=C\quad\to\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad\to\quad X=A^{-1}C\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: x =2, $y=-1$, $z=3$

b) Expresamos el sistema en forma matricial:

Si llamamos: $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&1&-2\\0&1&2\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}7\\5\\0\end{pmatrix}\quad\to\quad\begin{pmatrix}2&3&1\\1&1&-2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\\0\end{pmatrix}\quad\to\quad AX=C$

Para resolverlo, despejamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1}: $AX=C\quad\to\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad\to\quad X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=3\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}4&-2&1\\-5&4&-2\\-7&5&-1\end{pmatrix}\quad\to\quad(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}4&-5&-7\\-2&4&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}\quad\to\to\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-5&-7\\-2&4&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}$$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-5&-7\\-2&4&5\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\5\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Por tanto la solución del sistema es:$x=1$; $y=2$; $z=-1$

c) Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\3&-1&2\\1&-1&1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}\quad\to\quad\begin{pmatrix}-1&2&-1\\3&-1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}\quad\to\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$, para ver si existe A^{-1}: $|A|=\begin{vmatrix}-1&2&-1\\3&-1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\quad\to\quad\text{Existe } A^{-1}$

Calculamos la inversa de A:

$$Adj\,(A)=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&0&1\\3&-1&-5\end{pmatrix}\quad\to\quad(Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-1\\-2&1&-5\end{pmatrix}\quad\to\to\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\1&0&1\\2&-1&5\end{pmatrix}$$

Despejamos X: $AX=C\quad\to\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad X=A^{-1}C\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\1&0&1\\2&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x=-2$, $y=0$, $z=1$

d) Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}4&2&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}4&2&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}: $|A|=\begin{vmatrix}4&2&-1\\1&0&1\\2&1&1\end{vmatrix}=-3\neq 0\quad\rightarrow\quad \text{Existe } A^{-1}$

Calculamos la inversa de A:

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-3&6&0\\2&-5&-2\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-1&-3&2\\1&6&-5\\1&0&-2\end{pmatrix}\quad\rightarrow\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1&-3&2\\1&6&-5\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

Despejamos X: $AX=C\quad\rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad\rightarrow\quad X=A^{-1}C\Rightarrow X=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1&-3&2\\1&6&-5\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$

e) Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\1&2&1\\2&0&1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}-3&1&-1\\1&2&1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad AX=C$$

Calculamos $|A|$ para ver si existe A^{-1}: $|A|=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\1&2&1\\2&0&1\end{pmatrix}=-1\neq 0\quad\rightarrow\quad \text{Existe } A^{-1}$

Calcula la inversa de A:

$$Adj\,(A)=\begin{pmatrix}2&1&-4\\-1&-1&2\\3&2&-7\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad(Adj\,(A))^t=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&-1&2\\-4&2&-7\end{pmatrix}\quad\rightarrow\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-2&1&-3\\-1&1&-2\\4&-2&7\end{pmatrix}$$

Despejamos X: $AX=C\quad\rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}C\quad\rightarrow\quad X=A^{-1}C\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2&1&-3\\-1&1&-2\\4&-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

<u>EJERCICIO 27</u> : Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r}x+y-z=3\\-x+2y-z=1\\2x-y+z=2\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r}2x-y+3z=1\\-x+y-z=2\\x+y+3z=3\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r}x-y+2z-t=3\\2x+y-z+t=2\\-x+y+z-t=1\end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r}x-2y=3\\-x+3y=-1\\-x+6y=2\\x-y=5\end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r}3x-4y+z=1\\-x+2y-z=3\\x\qquad -z=7\end{array}\right\}$

Solución:

a) $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\-1&2&-1&1\\2&-1&1&2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\0&3&-2&4\\0&-3&3&-4\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&3\\0&3&-2&4\\0&0&1&-0\end{array}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Rango } A=3\\\text{Rango } A^*=3\\\text{Nº Incog}=3\end{array}\right]\overset{R-F}{\Rightarrow}\text{ Sistema Compatible Determinado}$

b) $B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\2&-1&3&1\\-1&1&-1&2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&-3&-3&-5\\0&2&2&5\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&-3&-3&-5\\0&0&0&5\end{array}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Rango } B=2\\\text{Rango } B^*=3\end{array}\right]\overset{R-F}{\Rightarrow}\text{ Sistema Incompatible}$

c) $C=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&3\\2&1&-1&1&2\\-1&1&1&-1&1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&3\\0&3&-5&3&-4\\0&0&3&-2&4\end{array}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Rango } C=3\\\text{Rango } C^*=3\\\text{Nº Incog}=4\end{array}\right]\overset{R-F}{\Rightarrow}\text{ Sistema Compatible Indeterminado}$

d) $D = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Rango } D = 2 \\ \text{Rango } D^* = 3 \end{bmatrix} \overset{R-F}{\Rightarrow}$ Sistema Incompatible

e) $E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & 4 & -20 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Rango } E = 2 \\ \text{Rango } E^* = 2 \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{bmatrix} \overset{R-F}{\Rightarrow}$ Sistema Compatible Indeterminado

<u>EJERCICIO 28</u> : Resuelve, aplicando la regla de Cramer, si es posible:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=-5 \\ 5x+y=1 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -3x+y+z=-5 \\ x-y+3z=5 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} -x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\}$ **g)** $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 3x+y=5 \end{array}\right\}$ **h)** $\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ 3x+y+z=6 \end{array}\right\}$ **i)** $\left.\begin{array}{r} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{array}\right\}$ **j)** $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x+2y=3 \\ 2x-y=-1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad |A| = -1$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{-1}{-1} = 1; \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3$ La solución del sistema es: *x* = 1, *y* = 3

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=1 \\ x-3y-2z=-3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1; \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{0}{-2} = 0; \; z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

La solución del sistema es: *x* = 1, *y* = 0, *z* = 2

c) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=-5 \\ 5x+y=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = -7$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \dfrac{-7}{-7} = 1; \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \dfrac{28}{-7} = -4$ La solución del sistema es: *x* = 1, *y* = –4

d) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -3x+y+z=-5 \\ x-y+3z=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 22$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \dfrac{44}{22} = 2; \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{22} = \dfrac{0}{22} = 0; \; z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{22} = \dfrac{22}{22} = 1$

La solución del sistema es: *x* = 2, *y* = 0, *z* = 1

e) $\left.\begin{array}{r} -x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = -4$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{-8}{-4} = 2; \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{4}{-4} = -1$ La solución del sistema es: *x* = 2, *y* = –1

f) $\left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ x-3y+z=-3 \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3; \; z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-14}{-3} = \frac{14}{3}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{4}{3}; \quad y = 3; \quad x = \frac{14}{3}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 3x+y=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = 5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

La solución del sistema es: *x* = 1, *y* = 2

h) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -x+2y+z=4 \\ 3x+y+z=6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{12} = \frac{24}{12} = 2; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

La solución del sistema es: *x* = 1, *y* = 2, *z* = 1

i) $\left.\begin{array}{r} -x+4y=-6 \\ 2x-3y=7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc:c} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{array}\right); \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad |A| = -5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$$

La solución del sistema es: *x* = 2, *y* = –1

j) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \\ x-y+3z=6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 17$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-15}{17}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17}; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{-15}{17}, \quad y = \frac{45}{17}, \quad z = \frac{54}{17}$

<u>EJERCICIO 29</u> : Estudia la compatibilidad de estos sistemas y resuélvelos si tienen solución:

a) $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+2y+z-t=-2} \\ \mathbf{2x+y-2z+2t=3} \\ \mathbf{-x-y+z+t=5} \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{-3x+4y-z=-3} \\ \boldsymbol{x+2y+z=5} \\ \boldsymbol{x+y+3z=6} \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+2z=6} \\ \boldsymbol{3x-y+z=5} \\ \boldsymbol{-x+2y-z=1} \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x+2y+z-t=8} \\ \boldsymbol{x+y-z+t=1} \\ \boldsymbol{-x+2y+z+2t=2} \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{-x+y-2z=-5} \\ \boldsymbol{x+3y+z=-4} \\ \boldsymbol{7x+5y+11z=8} \end{array}\right\}$

Solución:

a) A = $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 16 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \text{Rango } A = 3 \\ \text{Rango } A^* = 3 \\ \text{Nº Incog} = 4 \end{array}\right] \overset{R-F}{\Rightarrow}$ Sistema Compatible Indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones

$$\left.\begin{array}{l} t=\alpha \\ z=8-2\alpha \\ y=-13+4\alpha \\ x=16-5\alpha \end{array}\right] \Rightarrow (x,y,z,t)=(16-5\alpha,-13+4\alpha,8-2\alpha,\alpha) \quad \forall\alpha\in R$$

b) Número ecuaciones = Número incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la Regla de Cramer

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=-22\neq 0 \rightarrow ran\,(A)=3 \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-22}=\frac{-44}{-22}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{-22}=\frac{-22}{-22}=1;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-22}=\frac{-22}{-22}=1$$

La solución al sistema es: (x,y,z) = (2,1,1)

c) Número ecuaciones = Número incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la Regla de Cramer

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=11\neq 0. \text{ Por tanto, } ran\,(A)=3. \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{11}=\frac{22}{11}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{11}=\frac{22}{11}=2;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{11}=\frac{11}{11}=1$$

La solución del sistema es: (x,y,z) = (2,2,1)

d) $D=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Rango A}=3 \\ \text{Rango A*}=3 \\ \text{Nº Incog}=4 \end{array}\right] \overset{R-F}{\Rightarrow} \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow \text{Existen infinitas soluciones}$$

$\Rightarrow$ (x,y,z,t) = (2 + α, 1 - α, 2 + α, α) $\forall$ α $\in$ R

e) Número ecuaciones = Número incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la Regla de Cramer

$$E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow |E|=0 \Rightarrow \text{No podemos aplicar la Regla de Cramer}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 7 & 5 & 11 & 8 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -9 \\ 0 & 12 & -3 & -27 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{c} \text{Rango E}=2 \\ \text{Rango E*}=2 \\ \text{Nº Incog}=3 \end{array}\right] \overset{R-F}{\Rightarrow} \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ (x,y,z) = $\left(\frac{11-7\alpha}{4},\frac{-9+\alpha}{4},\alpha\right)$ $\forall\alpha\in R$

<u>EJERCICIO 30</u> : Discute los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros:

a) $\begin{cases} \mathbf{x-y+2z=1} \\ \mathbf{2x+y+az=0} \\ \mathbf{x+y-z=a} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{mx+y=2-2m} \\ \mathbf{x+my=m-1} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{x+y+z=1} \\ \mathbf{x+2y+2z=1} \\ \mathbf{x+(a+1)y+2az=-7} \end{cases}$

Solución:

a) Nº ecuaciones = Nº incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la regla de Cramer

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=-2a-1$$

$$|A|=0 \rightarrow -2a-1=0 \rightarrow a=\frac{-1}{2}$$

o Si $a\neq\frac{-1}{2} \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow \text{ran}(A)=\text{ran}(A')=\text{nº incógnitas}=3$ El sistema es *compatible determinado.*

- Si $a = \frac{-1}{2}$, queda: $A' = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \neq 0$

  ran (*A*) = 2 < *ran* (*A'*) = 3 $\Rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

b) Nº de ecuaciones = Nº incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la regla de Cramer

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow |A| = m^2 - 1 \qquad |A| = 0 \rightarrow m^2 - 1 = 0 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m \neq -1$ y $m \neq 1$ $\Rightarrow$ *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = nº incógnitas = 2. El sistema es *compatible determinado*.
- Si $m = -1$, queda: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Rango A} = 1 \\ \text{RangoA*} = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible
- Si m = 1, queda: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 1 \\ \text{RangoA*} = 1 \\ \text{Nº Incog} = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

c) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & (a+1) & 2a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a - 1 \quad |A| = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

- Si $a \neq 1$ $\Rightarrow$ ran (A) = ran (A') = nº incógnitas = 3. El sistema es compatible determinado.
- Si a = 1 $\Rightarrow$ Queda: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

  El sistema es *incompatible*.

<u>EJERCICIO 31</u> : Estudia, según los valores del parámetro, los siguientes sistemas. Resuélvelos en los casos en los que sea posible:

a) $\begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$ **c)** $\left.\begin{aligned} y + az &= 1 \\ x + a^2z &= 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z &= 2a \end{aligned}\right\}$ ***d)*** $\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 2 \\ x + my &= 1 \\ x + my + mz &= 1 \end{aligned}\right\}$ **e)** $\left.\begin{aligned} ax + y &= a \\ (a+1)x + 2y + z &= a + 3 \\ 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Nº ecuaciones = Nº Incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la Regla de Cramer

(Hemos simplificado la 1ª ecuación, dividiéndola entre 4). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a^2 - a - 2 = -(a^2 + a + 2)$

$|A| = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución $\rightarrow |A| \neq 0$ para cualquier valor de *a*.

$\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Además, como el sistema es homogéneo, tiene como solución única la solución trivial: (x,y,z) = (0,0,0), cualquiera que sea el valor de *a*.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3k-2 & -5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3k-2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Igualamos, por separado, los elementos de la diagonal a cero: -3k -2 = 0 $\Rightarrow k = \frac{-2}{3}$

- Si $k \neq \frac{-2}{3} \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') =$ nº incógnitas = 2. El sistema es compatible *determinado*. Lo resolvemos

  aplicando la regla de Cramer: $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & k \end{vmatrix}}{3k+2} = \frac{k+4}{3k+2}$; $y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3k+2} = \frac{5}{3k+2}$ Solución : $(x, y) = (\frac{k+4}{3k+2} ; \frac{5}{3k+2})$

- Si $k = \frac{-2}{3}$, queda: $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ *ran* (*A*) = 1 < *ran* (*A*') = 2 El sistema es *incompatible*.

c) Nº de ecuaciones = Nº de incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la Regla de Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = 0 \text{ para cualquier valor de } a. \Rightarrow \text{No podemos aplicarlo.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a^2-a & 2a \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -a & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 2 \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ (x,y,z) = (2^a+1-$a^2\alpha$, 1-aα,α) $\forall\ \alpha \in$ R

d) Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = m^3 - m = m(m^2-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ y $m \neq -1$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Para cada valor de m, distinto de 0, 1 y –1, tenemos un sistema diferente, todos ellos con solución única:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{m(m^2-1)} = \frac{m(2m-1)}{m(m^2-1)} = \frac{2m-1}{m^2-1};\ y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{m(m^2-1)} = \frac{m(m-2)}{m(m^2-1)} = \frac{m-2}{m^2-1};\ z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{m(m^2-1)} = 0$$

$$\textit{Solución}: \left(\frac{2m-1}{m^2-1}, \frac{m-2}{m^2-1}, 0\right)$$

- Si $m = 0$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 2 \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

  $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ (x,y,z) = (1, 2 - α, α) $\forall\ \alpha \in$ R

- Si $m = 1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

  $\Rightarrow$ No existe solución

- Si $m = -1$, queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Incompatible

  $\Rightarrow$ No existe solución

e) Nº de ecuaciones = Nº de incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la regla de Cramer

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = 2a - 2a - (a+1) = -(a+1) = 0 \quad \rightarrow \quad a = -1$$

- Si $a \neq -1$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Existe una única solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = \frac{-a-1}{-a-1} = 1;\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0;\ z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = \frac{-2(a+1)}{-(a+1)} = 2 \Rightarrow \text{(x,y,z) = (1, 0, 2)}$$

- Si $a = -1$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 2 \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema compatible

  indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ (x,y,z) = ($\left(\frac{4-\alpha}{2}, \frac{2-\alpha}{2}, \alpha\right)$ $\forall \alpha \in$ R

<u>EJERCICIO 32</u> : Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado: $\left.\begin{aligned} \lambda x - y + 2z &= 0 \\ -x + \lambda y + 2z &= 0 \\ 2x + \lambda y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Nº ecuaciones = Nº incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la regla de Cramer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda+1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema compatible determinado y homogéneo $\Rightarrow$ Solo tiene una solución, la trivial, (x,y,z) = (0,0,0)

Si λ = –1, quedaría: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & | & 0 \\ -1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 2 \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$

Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ (x,y,z) = (α, α, α) $\forall \alpha \in$ R

<u>EJERCICIO 33</u> : Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ. Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado: $\left.\begin{aligned} \lambda x \qquad + 2z &= 0 \\ (\lambda-2)y + z &= 0 \\ (\lambda-1)x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Nº ecuaciones = Nº Incógnitas $\Rightarrow$ Aplicamos la Regla de Cramer

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -3\lambda^2 + 7\lambda - 4 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{4}{3} \end{cases}$

- Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \frac{4}{3}$ $\rightarrow$ Sistema compatible determinado y homogéneo $\Rightarrow$ Existe una única solución, la trivial : (x, y, z) = (0,0,0)
- Para λ = 1, queda: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 2 \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ (x,y,z) = (-2, α, α) $\forall \alpha \in$ R
- Para $\lambda = \frac{4}{3}$, queda: $\begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & | & 0 \\ 1/3 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 \\ 1 & 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & -12 & 18 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{RangoA} = 2 \\ \text{RangoA*} = 2 \\ \text{Nº Incog} = 3 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Existen infinitas soluciones $\Rightarrow$ (x,y,z) = $\left(-\frac{3\alpha}{2}, -\frac{3\alpha}{2}, \alpha\right)$ $\forall \alpha \in$ R

<u>EJERCICIO 34</u> : Expresa y resuelve los siguientes sistemas en forma matricial:

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= -3 \\ 3x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y &= 1 \\ x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ -x + y - z &= 1 \\ 2x + y &= -4 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 10 \\ x + 2y + z &= 5 \\ -x + 2Z &= -3 \end{aligned}\right\}$ e) $\left.\begin{aligned} -x - y + 2z &= 4 \\ 2x + y - 2z &= -3 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a)

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ AX=C$$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1}: $AX=C\ \rightarrow\ A^{-1}AX=A^{-1}C\ \rightarrow\ X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=2\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&2&3\\3&-4&-5\end{pmatrix}\ \rightarrow\ (\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&2&-4\\-4&3&-5\end{pmatrix}\ \rightarrow\rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&2&-4\\-4&3&-5\end{pmatrix}$$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&2&-4\\-4&3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Por tanto la solución del sistema es: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$

- Por método de Gauss:

Calculo de A^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\3&1&1&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow\ \begin{array}{c}1^a\\2^a-3\cdot1^a\\3^a-1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-5&4&-3&1&0\\0&-3&2&-1&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow$

$\rightarrow\ \begin{array}{c}1^a\\2^a\\3^a-3\cdot2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-5&4&-3&1&0\\0&0&-2&4&-3&5\end{array}\right)\ \rightarrow\rightarrow\ \begin{array}{c}2\cdot1^a-3^a\\2^a+2\cdot3^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&4&0&-2&3&5\\0&-5&0&5&-5&10\\0&0&-2&4&-3&5\end{array}\right)\ \rightarrow$

$\rightarrow\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}10&0&0&10&-5&15\\0&-5&0&5&-5&10\\0&0&-2&4&-3&5\end{array}\right)\ \rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&2&-4\\-4&3&-5\end{pmatrix}$

b)

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&0\\1&1&2\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ AX=C$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1}: $AX=C\ \rightarrow\ A^{-1}AX=A^{-1}C\ \rightarrow\ X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=-1\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}4&-6&1\\-1&1&0\\-2&3&-1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ (\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-6&1&3\\1&0&-1\end{pmatrix}\ \rightarrow\rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-4&1&2\\6&-1&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\begin{pmatrix}-4&1&2\\6&-1&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

- Por método de Gauss:

Calculo de A^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\3&2&0&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow\ \begin{array}{c}1^a\\2^a-3\cdot1^a\\3^a-1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&-3&-3&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow$

$\rightarrow\ \begin{array}{c}1^a+2^a\\2^a+3\cdot3^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-2&1&0\\0&-1&0&-6&1&3\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow\rightarrow\ \begin{array}{c}1^a+2\cdot3^a\\2^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-4&1&2\\0&-1&0&-6&1&3\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-4&1&2\\6&-1&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}$

c)

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial:

Si llamamos: $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $AX=C$

Para resolverlo, despejamos X multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$AX=C \quad\rightarrow\quad A^{-1}AX=A^{-1}C \quad\rightarrow\quad X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=-1\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\2&-4&-5\\0&-1&-1\end{pmatrix}\rightarrow(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&-4&-1\\-3&-5&-1\end{pmatrix}\rightarrow\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&4&1\\3&5&1\end{pmatrix}$$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&4&1\\3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x=-2$, $y=0$, $z=1$

- Por método de Gauss:

Calculo de A^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\-1&1&-1&0&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a\\3^a-2\cdot1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&1\\0&-1&1&0&1&0\\0&5&-4&-2&0&1\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a\\3^a+5\cdot2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\0&0&1&3&5&1\end{array}\right)\rightarrow\rightarrow\begin{array}{c}1^a-2\cdot2^a\\2^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-2&0\\0&-1&1&0&1&0\\0&0&1&3&5&1\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a-3^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-2&0\\0&-1&0&-2&-4&-1\\0&0&1&3&5&1\end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&4&1\\3&5&1\end{pmatrix}$

d)

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial.

$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&2&1\\-1&0&2\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}10\\5\\-3\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&2&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\5\\-3\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $AX=C$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1}: $A^{-1}AX=A^{-1}C \quad\rightarrow\quad X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=5\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-2&4&-1\\5&-5&5\end{pmatrix}\rightarrow(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}4&-2&5\\-3&4&-5\\2&-1&5\end{pmatrix}\rightarrow\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-2&5\\-3&4&-5\\2&-1&5\end{pmatrix}$$

Obtenemos X: $X=A^{-1}C=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-2&5\\-3&4&-5\\2&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\5\\-3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x=3$, $y=1$, $z=0$

- Por método de Gauss:

Calculo de A^{-1}:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&1&-2&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\-1&0&2&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}2^a\\1^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&1&0\\3&1&-2&0&1&0\\-1&0&2&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a-3\cdot1^a\\3^a+1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&1&0\\0&-5&-5&1&-3&0\\0&2&3&0&1&1\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a\\5\cdot3^a+2\cdot2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&1&0\\0&-5&-5&1&-3&0\\0&0&5&2&-1&5\end{array}\right)\rightarrow\rightarrow\begin{array}{c}1^a\\2^a+3^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&0&1&0\\0&-5&0&3&-4&5\\0&0&5&2&-1&5\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow\begin{array}{c}5\cdot1^a-3^a\\2^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&10&0&-2&6&-5\\0&-5&0&3&-4&5\\0&0&5&2&-1&5\end{array}\right)\rightarrow\rightarrow\begin{array}{c}1^a+2\cdot2^a\\2^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&0&0&4&-2&5\\0&-5&0&3&-4&5\\0&0&5&2&-1&5\end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-2&5\\-3&4&-5\\2&-1&5\end{pmatrix}$

e)

- Utilizando determinantes:

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\2&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}-1&-1&2\\2&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ AX=C$$

Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda por A^{-1}: $AX=C \ \rightarrow\ A^{-1}AX=A^{-1}C \ \rightarrow\ X=A^{-1}C$

Comprobamos que $|A|=3\neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}3&-4&1\\3&-3&0\\0&2&1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ (\mathrm{Adj}\,(A))^t=\begin{pmatrix}3&3&0\\-4&-3&2\\1&0&1\end{pmatrix}\ \rightarrow\rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&3&0\\-4&-3&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Obtenemos *X*: $X=A^{-1}C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&3&0\\-4&-3&2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$

- Por método de Gauss:

Calculo de A^{-1}: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&2&1&0&0\\2&1&-2&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow\ \begin{array}{c}1^a\\2^a+2\cdot1^a\\3^a+1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&2&1&0&0\\0&-1&2&2&1&0\\0&0&3&1&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow$

$$\rightarrow\ \begin{array}{c}1^a-2^a\\3\cdot2^a-2\cdot3^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&-1&-1&0\\0&-3&0&4&3&-2\\0&0&3&1&0&1\end{array}\right)\ \rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&3&0\\-4&-3&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

<u>EJERCICIO 35</u> : Un aficionado a los pájaros tiene un total de 30, entre canarios, periquitos y jilgueros. Tiene el doble de jilgueros que de canarios:

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de canarios que tiene?

b) Si, además, se sabe que tiene el triple de canarios que de periquitos, ¿cuántos pájaros de cada tipo tiene?

Solución:

a) Si llamamos *x* al número de canarios, *y* al número de periquitos y *z* al número de jilgueros, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=30\\z=2x\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}x+y+z=30\\2x-z=0\end{array}\right\}$$

Este sistema tiene dos ecuaciones y tres incógnitas; es compatible indeterminado. Solo con estos datos, no se puede saber el número de canarios que tiene.

b) Si añadimos a las dos ecuaciones anteriores otra ecuación con los nuevos datos, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=30\\2x-z=0\\x=3y\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}x+y+z=30\\2x-z=0\\x-3y=0\end{array}\right\}$$

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&30\\2&0&-1&0\\1&-3&0&0\end{array}\right)\ \rightarrow\ |A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&-1\\1&-3&0\end{vmatrix}=-10$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}30&1&1\\0&0&-1\\0&-3&0\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-90}{-10}=9;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&30&1\\2&0&-1\\1&0&0\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-30}{-10}=3;\ z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&30\\2&0&0\\1&-3&0\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-180}{-10}=18$$

Por tanto, tiene 9 canarios, 3 periquitos y 18 jilgueros.

<u>EJERCICIO 36</u> : En una reunión hay 60 personas entre altas, medias y bajas. Se sabe que entre las bajas y las medianas duplican el número de altas. También se sabe que las altas y el doble de las medianas son el doble de las bajas. ¿Cuál es el número de personas altas, medianas y bajas? Justifica la respuesta.

Solución:

Si llamamos *x* al número de personas altas, *y* al número de personas medianas y *z* al número de personas bajas,

tenemos que: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ y+z=2x \\ x+2y=2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 2x-y-z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{array}\right\}$

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 12$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{240}{12} = 20; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{180}{12} = 15; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{300}{12} = 25$$

Por tanto, hay 20 personas altas, 15 medianas y 25 bajas.