TEMA 2 – ÁLGEBRA DE MATRICES

2.1 – NOMENCLATURA Y DEFINICIONES

2.1.1 - DEFINICIÓN

Las matrices son tablas numéricas rectangulares

2ª columna

3ª fila

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots\dots & a_{3n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Dimensión de la matriz

Esta es una matriz de **m** filas y **n** columnas. Es de **dimensión** m x n.

Los elementos, a_{ij}, son números reales ($a_{ij} \in R$)

Al designar una matriz genérica, como la anterior, cada término tiene dos subíndices que indican la fila y la columna a las que pertenece. El elemento "a_{32}" es el que está en la tercera fila y segunda columna.

Para simplificar, la matriz anterior se puede designar así: $A = (a_{ij})_{m,n}$

2.1.2 – IGUALDAD DE MATRICES

Dos **matrices** son **iguales** cuando son de la misma dimensión y, además, coinciden término a término:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{m,n} \\ B = (b_{ij})_{m,n} \end{array}\right\} \qquad A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

2.1.3 – TIPOS DE MATRICES

- **Matriz fila:** $A_{1\,x\,n} = (a_{11}\;\; a_{12}\;\; \ldots\ldots\; a_{1n})$

- **Matriz columna:** $A_{m\,x\,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

- **Matriz nula:** Matriz cuyos elementos son todos nulos: $O_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz cuadrada:** Si el número de filas es igual al número de columnas (m = n)

$$A_{n\,x\,n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

- **Matriz triangular superior (inferior):** Matriz cuadrada cuyo elementos que están por debajo (encima) de la diagonal principal son nulos.

$$A_{n\,x\,n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal :** Matriz cuadrada en que la todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son nulos.

$$A_{n\,x\,n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz escalar:** Matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal iguales

$$A_{n\times n} = A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- **Matriz unidad o identidad :** Matriz escalar con los elementos de la diagonal principal unos.

$$I_{n\times n} = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz traspuesta de una matriz A = (aij)m,n** es otra matriz A^t = (aji)n,m que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz simétrica:** matriz cuadrada que coincide con su traspuesta ($A = A^t$)

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Matriz antisimétrica:** matriz cuadrada que coincide con menos su traspuesta($A=-A^t$)

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 – OPERACIONES CON MATRICES

2.2.1 – SUMA DE MATRICES

Para que dos **matrices** puedan **sumarse**, es necesario que tengan la misma dimensión. En tal caso, se suman término a término: $(a_{ij})_{m,\,n} + (b_{ij})_{m,\,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,\,n}$

2.2.2 – PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ

Para **multiplicar un número por una matriz**, se multiplica por el número cada elemento de la matriz:
$k.(a_{ij})_{m,\,n} = (ka_{ij})_{m,\,n}$

2.2.3 – PRODUCTO DE UNA MATRIZ FILA POR UNA MATRIZ COLUMNA

El **producto de un vector fila por un vector columna,** ambos de la misma dimensión, es un números que se obtiene multiplicándolos término a término y sumando los resultados:

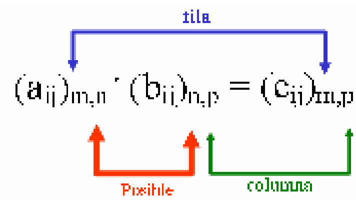
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 + \dots + a_n.b_n$$

2.2.4 – PRODUCTO DE MATRICES

Para que dos **matrices** A y B puedan **multiplicarse**, A.B, es necesario que *el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.*

En tal caso, el producto A.B = C es otra matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando cada vector fila de la primera por cada vector columna de la segunda, del siguiente modo:

$$\left.\begin{matrix} A = (a_{ij})_{m,n} \\ B = (b_{ij})_{n,p} \end{matrix}\right\} \qquad A.B = C \Leftrightarrow (c_{ij})_{m,p}$$



Siendo c_{ij} el producto de la fila i de A por la columna j de B:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \dots + a_{in}.b_{nj}$$

La matriz C resultante tiene tantas filas como A, m, y tantas columnas como B, p.

2.2.4 – EJEMPLO

Calcular la matriz M = P^2 – 3P – I siendo P = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3. \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3 – PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON MATRICES

2.3.1 – PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

Las matrices de dimensión m x n pueden sumarse, y el resultado es otra matriz m x n. Además, la suma cumple las siguientes propiedades:

1. **Asociativa**: (A + B) + C = A + (B + C)

2. **Conmutativa:** A + B = B + A

3. **Elemento neutro:** La matriz $\mathbf{O}_{m,n}$, cuyos elementos son todos 0 (**matriz nula**), sumada con cualquier otra matriz de dimensión m x n, la deja igual, es decir, A + **O** = **O** + A = A

4. **Elemento opuesto**: Toda matriz A, tiene su opuesta –A. La opuesta de A = (a_{ij}) es –A = $(-a_{ij})$, pues $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) =$ **O**

2.3.2 – PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE NÚMEROS POR MATRICES

Si a, b $\in$ R, y A, B $\in$ $M_{m,n}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. a.(b.A) = (a.b).A

2. (a + b).A = a.A + b.A

3. a.(A + B) = a.A + a.B

4. 1.A = A

2.3.3 – PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

1. **Asociativa**: $(A_{mxn} . B_{nxp}). C_{pxq} = A_{mxn} .(B_{nxp}.C_{pxq})$

2. El producto de matrices **no es conmutativo:** A.B $\neq$ B.A

Como consecuencia, hemos de mantener el orden en que aparezcan las matrices que han de multiplicarse. Por tanto, utilizaremos expresiones del siguiente tipo: “La matriz A está multiplicada *por la izquierda (o por la derecha)* por la matriz B.

3. **Elemento neutro:** $A.I = I.A = A$ siendo I **la matriz identidad o unidad.**

4. **No siempre existe el elemento inverso:** $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$, siendo A^{-1} **la matriz inversa de A**

No todas las matrices tienen inversa:
- Si una matriz tiene inversa se la llama **inversible o regular.**
- Si una matriz no tiene inversa se le llama **singular.**

2.3.4 – PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS

1. **Distributiva a izquierda:** $A.(B + C) = A.B + A.C$

2. **Distributiva a derecha:** $(A + B).C = A.C + B.C$

2.3.5 – PRODUCTOS NOTABLES

1. $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, excepto si A y B son conmutativas

2. $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$, excepto si A y B son conmutativas

3. $(A + B).(A - B) \neq A^2 - B^2$, excepto si A y B son conmutativas

2.3.6 – PROPIEDADES DE LA TRASPOSICIÓN DE MATRICES

1. $(A^t)^t = A$

2. $(A + B)^t = A^t + B^t$

3. $(k.A)^t = k.A^t$

4. $(A.B)^t = B^t.A^t$

5. Si A es una matriz simétrica: $A^t = A$

2.3.7 – PROPIEDADES DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

3. $(k.A)^{-1} = \frac{1}{K}.A^{-1}$

4. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

5. Si I es la matriz identidad o unidad: $I^{-1} = I$

6. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

2.4 – CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

2.4.1 – APLICANDO LA DEFINICIÓN

$A.A^{-1} = I$

Ejemplo:

[1] Hallar la inversa, si existe, de la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 4x+2z & 4y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+z=1 \\ 2y+t=0 \\ 4x+2z=0 \\ 4y+2t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x+z=1 \\ 4x+2z=0 \end{cases} \Rightarrow 0=-2 \Rightarrow \text{No tiene solución} \\ \begin{cases} 2y+t=0 \\ 4y+2t=1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

Solución: No existe la inversa de A

[2] Hallar la inversa, si existe, de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2t=0 \\ 3x+4z=0 \\ 3y+4t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+2z=1 \\ 3x+4z=0 \end{cases} \Rightarrow -2z=-3 \Rightarrow z=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=-2 \\ \begin{cases} y+2t=0 \\ 3y+4t=1 \end{cases} \Rightarrow -2t=1 \Rightarrow t=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

Comprobación: $A.A^{-1} = I$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Está bien

Observación:
- Para hallar la inversa de una matriz 2 x 2 hay que resolver 2 sistemas de 2 ecuaciones
- Para hallar la inversa de una matriz 3 x 3 hay que resolver 3 sistemas de 3 ecuaciones
- Para hallar la inversa de una matriz 4 x 4 hay que resolver 4 sistemas de 4 ecuaciones

….

- Para hallar la inversa de una matriz n x n hay que resolver n sistemas de n ecuaciones
  Por tanto *este método sólo es aconsejable para matrices de dimensión 2 x 2.*

2.4.2 – APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS

(A | I) ~ (I | A)

Pasos:
1. Hacemos ceros debajo de la diagonal principal (de izquierda a derecha)
2. Hacemos ceros encima de la diagonal principal (de derecha a izquierda)
3. Arreglamos la diagonal principal (dividiendo cada fila por el número correspondiente)

Nota: Si al hacer ceros una fila o columna es toda cero $\Rightarrow$ No existe la inversa

Ejemplo:

[1] Hallar la inversa, si existe, de la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 \overset{\approx}{=} F_2 - 2F_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{No existe la inversa de A}$$

[2] Hallar la inversa, si existe, de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 \overset{\approx}{=} F_2 - 3F_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) F_1 \overset{\approx}{=} F_1 + F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_2 \overset{\approx}{=} F_2 /(-2) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Comprobación: $A.A^{-1} = I$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Está bien

[3] Hallar la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F_3 \overset{\approx}{=} F_3 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) F_3 \overset{\approx}{=} 2F_3 + F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1 \overset{\approx}{=} 7F_1 + F_3 \\ F_2 = 7F_2 - 3F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & 6 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1 \overset{\approx}{=} F_1 / 7 \\ F_2 = F_2 / 14 \\ F_3 = F_3 / 7 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/7 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/7 & 2/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 7 & -2/7 & 1/7 & 2/7 \end{array}\right)$$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & 2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

Comprobación: $A.A^{-1} = I$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & 2/7 & -3/7 \\ -2/7 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Bien

Observación: Para hallar la inversa de una matriz por el método de Gauss, se pueden cambiar filas pero en (A | I) no antes, pero nunca columnas.

[4] Hallar la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.4.3 – POR DETERMINANTES (Ver tema 3)

2.5 – EJERCICIOS TÍPICOS DE MATRICES

2.5.1 – POTENCIA N-ÉSIMA DE UNA MATRIZ

Para calcular la potencia n-ésima de una matriz, A^n, se calcula $\mathbf{A, A^2, A^3, A^4}$,…. hasta que descubramos la ley de formación de las sucesiones que la forman o lleguemos a la matriz Identidad
Ejemplos:

[1] Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A.A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A.A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

....

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[2] Calcular A^{128} siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^4 = A.A^3 = A.I = A$

Sólo hay tres posibles resultados : A, A^2, A^3 (el resto se repiten)

Dividimos 128 entre 3 y nos quedamos con el resto: $128 = 3.42 + 2 \Rightarrow$

$$A^{128} = A^{3.42+2} = (A^3)^{42}.A^2 = I^{42}.A^2 = I.A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.5.2 – APLICACIONES DE LA INVERSAS: RESOLVER ECUACIONES MATRICIALES

Propiedades: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$; $A.I = A$

Ejemplos:

[1] $A.X = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \Rightarrow I.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$

[2] $X.A = B \Rightarrow X.A.\ A^{-1} = B.\ A^{-1} \Rightarrow X.I = B.\ A^{-1} \Rightarrow X = B.\ A^{-1}$

[3] $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.(B - C) \Rightarrow I.X = A^{-1}.(B - C) \Rightarrow X = A^{-1}.(B - C)$

[4] $XA^{-1} + B = C \Rightarrow X.\ A^{-1} = C\text{-}B \Rightarrow X.\ A^{-1}.A = (C\text{-}B).A \Rightarrow X.I = (C\text{-}B).A \Rightarrow X = (C\text{-}B).A$

[5] $AXB + C = I \Rightarrow AXB = (I - C) \Rightarrow A^{-1}.A.X.B.B^{-1} = A^{-1}.(I - C).B^{-1} \Rightarrow I.X.I = A^{-1}.(I - C).B^{-1} \Rightarrow$
$.X = A^{-1}.(I - C).B^{-1}$

2.5.3 – RESOLVER SISTEMAS MATRICIALES

Se aplica el método de reducción para despejar las matrices incógnita.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema matricial $\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 2Y = B \end{cases}$ siendo A y B matrices conocidas

$\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases}$ Multiplicamos la primera ecuación por -2 y las sumamos: 8Y = B – 2A $\Rightarrow$

$Y = \frac{1}{8}(B - 2A)$ (Calculamos Y)

X = 3Y + A (Calculamos X)

2.5.4 – HALLAR LAS MATRICES QUE CONMUTAN CON UNA DADA

Conmutar significa que AX = XA

Ejemplo: Hallar las matrices que conmutan con la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A.X = X.A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2x + y \\ z & 2z + t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = x \\ y + 2t = 2x + y \\ z = z \\ t = 2z + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = t \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = t \end{cases}$$

Dos ecuaciones con cuatro incógnitas (2 g.l.) $\Rightarrow$ z = 0, x = α, t = α, y = β

$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $\forall\ \alpha, \beta \in R$

2.6 – DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

2.6.1 – COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ vectores y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ números, al vector formado del siguiente modo: $a_1 . \vec{v}_1 + a_2 . \vec{v}_2 + a_3 . \vec{v}_3 + \ldots + a_n \vec{v}_n$

Se le llama **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$

Ejemplo: Escribir el vectores (0,3,-3) como combinación lineal de los vectores:
$\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (2,-1,3)$

$(0,3,-3) = \alpha.\vec{v}_1 + \beta.\vec{v}_2$

$(0,3,-3) = \alpha.(1,1,0) + \beta.(2,-1,3)$

$(0,3,-3) = (\alpha + 2\beta, \alpha - \beta, 3\beta) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta \\ 3 = \alpha - \beta \\ -3 = 3\beta \end{cases}$

De la tercera ecuación $\beta = -1$

Sustituimos en la segunda ecuación: $3 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 2$

Comprobamos que se cumple la primera: $0 = 2 + 2.(-1)$. Como se cumple se puede poner como combinación lineal $(0,3,-3) = 2.\vec{v}_1 - 1.\vec{v}_2$ (Si no se cumpliese, no se podría poner y el ejercicio no tendría solución)

2.6.2 – DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE VECTORES

Un conjunto de vectores: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ se dice que son **linealmente dependientes** (L.D.) si alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

Un conjunto de vectores: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ se dice que son **linealmente independientes** (L.I.) si ninguno de alguno de ellos se puede poner como combinación lineal de los demás.

En la práctica: Para saber si un conjunto de vectores son linealmente dependientes o independientes lo que se hace es una combinación de ellos igualada al vector cero

$$a_1.\vec{v}_1 + a_2.\vec{v}_2 + a_3.\vec{v}_3 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

- Si todos los a_i son cero $\Rightarrow$ Los vectores son linealmente independientes
- Si algún a_i es no nulo $\Rightarrow$ Los vectores son linealmente dependientes

2.7 – RANGO DE UNA MATRIZ

2.7.1 – DEFINICIÓN

Llamamos **rango de una matriz** al número de filas o columnas linealmente independientes.

2.7.2 – CÁLCULO

Para estudiar el rango de una matriz:

1 – Hacemos ceros debajo de la diagonal principal.

2 – El número de filas no nulas es el rango

Ejemplo: Hallar el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 = 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 = 3F_3 - 5F_1}}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 19 & -26 & 53 \\ 0 & -38 & 52 & -106 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3 + 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 19 & -26 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango A = 2

Para estudiar el rango de una matriz con parámetros

- Se lleva el parámetro lo más abajo y a la derecha posible.
- Se hacen ceros debajo de la diagonal principal (la fila que cambiamos no se puede multiplicar por el parámetro.
- Se igualan, por separado, los elementos de la diagonal principal a cero
- Un caso más que el números de parámetros (se estudia cada caso)

Ejemplo: Hallar el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 = -2F_2 + F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3 + aF_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

2 = 0 $\Rightarrow$ No tiene solución

-1 = 0 $\Rightarrow$ No tiene solución

$1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

Dos valores de a $\Rightarrow$ Tres casos:

- CASO 1 : a = 1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango A = 2

- CASO 2 : a = -1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango A = 2

- CASO 3 : a $\neq \pm$ 1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango A = 3

2.7.3 – UTILIZAR EL RANGO PARA ESTUDIAR LA DEPENDENCIA O INDEPENDENCIA DE VECTORES

Para estudiar si un conjunto de vectores son linealmente dependientes o independientes se colocan como si fuesen las filas de una matriz, se estudia el rango de la matriz (ceros debajo de la diagonal principal)

- Si alguna fila es toda nula $\Rightarrow$ Son linealmente dependientes
- Si ninguna fila es nula $\Rightarrow$ Son linealmente independientes

Ejemplos:
[1] Estudiar si son L.I. o L.D. los vectores (2,3,0,5), (0,0,-1,2), (4,0,1,0) y (12,0,2,2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \approx \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 - 6F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & -18 & 2 & -28 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -18 & 2 & -28 \end{pmatrix} \underset{F_4 = F_4 - 3F_2}{\approx}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_4 = F_4 - F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Linealmente Dependientes}$$

[2] Estudiar si los vectores (1,6,4), (2,0,-1), (5,6,3) son L.I o L.D.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \approx \\ F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -12 & -9 \\ 0 & -24 & -17 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3 - 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -12 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{L. Independientes}$$

2.8 – FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A.X = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \Rightarrow I.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B$