3 DETERMINANTES

REFLEXIONA Y RESUELVE

Determinantes de orden 2

- **Resuelve los siguientes sistemas y calcula el determinante de cada matriz de coeficientes:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$

Determinantes de orden 3

- **Queremos calcular todos los posibles productos (de tres factores) en los que intervengan un elemento de cada fila y uno de cada columna de esta matriz:**

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Averigua cuántos productos hay y calcúlalos.

b) Hazlo de nuevo para una matriz 3×3 cualquiera.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Determinantes de orden 4

- **En una matriz 4×4, ¿cuántos productos de 4 factores hay en los que intervengan un elemento de cada fila y uno de cada columna?**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Determinantes de orden *n*

- **¿Sabrías decir, en general, en una matriz cuadrada $n \times n$, cuántos productos de n factores, uno de cada fila y uno de cada columna, pueden darse?**

1. **Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:**

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

2. **Calcula el valor de los siguientes determinantes teniendo en cuenta estos datos:**

$$A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix} \qquad |A| = -13$$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ b) $|6A|$ c) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix}$ d) $|A^{-1}|$

1. **Calcula los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2. **Halla el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

3. **Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

4. **Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:**

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{a)} \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

1. **Justifica que los siguientes determinantes valen:**

a) 0

b) 0

c) 96 ó –96

d) 1 ó –1

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 36 \\ 0 & 6 & 2 & 54 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 612 & 704 & 410 & 103 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

1. **Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz M.**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. **Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12}, a_{33} y a_{43} de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. **Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

2. **Dada la matriz** $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$**:**

a) Halla la suma de los productos de cada elemento de la 1.ª fila por el correspondiente adjunto de la 3.ª fila.

b) Halla la suma de los productos de cada elemento de la 3.ª columna por el adjunto de los correspondientes elementos de la 2.ª columna.

c) Justifica por qué los dos resultados anteriores son cero.

3. **Calcula los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

1. **Calcula los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

1. **Calcula el rango de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Determinantes de orden 2 y 3

1 **Calcula el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 15 & 8 \\ -9 & -4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

2 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

b) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x \end{vmatrix} = 6$

s3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$

Propiedades de los determinantes

4 **Si** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$, **razona cuál es el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b+2a \\ c & d+2c \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$

s5 **De las siguientes operaciones con determinantes de orden 2 × 2, señala las que son correctas y, en su caso, enuncia las propiedades que se utilizan:**

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a-1 & a \\ b+2 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2a & a-b \\ 2b & b \end{vmatrix} = 2b\begin{vmatrix} a & a-b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

s6 **Si** $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, **¿cuál es el valor de cada uno de los siguientes determinantes? Justifica las respuestas:**

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

7 **Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

s8 **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, **calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x-a & y-b & z-c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

Determinantes de orden cualquiera

9 **Halla el valor de los siguientes determinantes de orden 4:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

s10 **Calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

Rango de una matriz

s11 **Halla el rango de las siguientes matrices:**

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

s12 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

s13 **Estudia el rango de estas matrices según el valor del parámetro a:**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix}$

PARA RESOLVER

s14 **Justifica, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:**

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

s15 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

16 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro que contienen:**

a) $A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

17 **Estudia, según los valores del parámetro, el rango de cada matriz:**

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix}$

18 **Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t:**

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$

s19 **Halla, en función de a, el valor de los determinantes siguientes:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

s20 **Prueba, sin desarrollarlos, que el valor de los siguientes determinantes es 0:**

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix}$

s21 **Considera la matriz** $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$**, donde** a, b **y** c **son no nulos.**

a) Determina el número de columnas de A **que son linealmente independientes.**

b) Calcula el rango de A**.**

s22 **Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*, *b* y *c*:**

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

s23 **Estudia el rango de la matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

24 **¿Cuál es el valor del determinante de la matriz unidad de orden n? ¿Y el de una matriz triangular de orden n?**

Justifica tus respuestas.

25 **Prueba que el determinante de una matriz de orden 3 es igual al de su traspuesta.**

26 **¿Sabrías decir cuál de estos dos productos puede formar parte del desarrollo de un determinante de orden 4?:**

a) $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$ **b)** $a_{14} \cdot a_{41} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

27 **Comprueba que: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$ siendo A y B dos matrices diagonales de orden 3.**

s28 **Justifica que** $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

☛ ***Ten en cuenta que:*** $A \cdot A^{-1} = I$

29 **Si** A **es una matriz cuadrada de orden 4, ¿puedes saber el valor de:**

$$a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13} + a_{24} A_{14}$$

sin conocer los elementos de la matriz?

s30 **Las matrices** A **y** B **tienen 3 filas y 12 columnas, pero, en el proceso de edición, algunas de estas se han borrado.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -7 & 5 & -2 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

¿Puedes averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

Si llamamos C **a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices** A **y** B**, ¿cuál será el rango de** C**?**

31 **Si la matriz** $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ **tiene rango 2, ¿qué rango tendrá la matriz** B**?**

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m-a & n-b & p-c \end{pmatrix}$$

s32 **Dadas la matrices** A **y** B **de orden** 4×4 **con** $|A| = 3$ **y** $|B| = 2$**, calcula** $|A^{-1}|$**,** $|B^t A|$ **y** $|(AB^{-1})^t|$**. Justifica las respuestas.**

s33 **De una matriz cuadrada** A **se sabe que su determinante vale –1, y que el determinante de** $2A$ **vale –8. ¿Cuál es el orden de la matriz** A**? Razona la respuesta.**

s34 **Si llamamos** c_1, c_2, c_3 **a los vectores columna de una matriz** A**, el determinante puede designarse así:**

$$det(A) = det(c_1, c_2, c_3)$$

Si $det(A) = 5$**, ¿cuál será el valor de estos determinantes?**

a) $det(c_1 - 3c_2, c_2, c_3)$

b) $det(c_1, c_2, 2c_3)$

c) $det(c_1, c_1 - c_2, c_3)$

35 **a) Define a qué se llama rango de una matriz.**

b) Indica, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

I) $ran(A) = ran(-A)$ **(**$-A$ **es la matriz opuesta de** A**).**

II) $ran(A) = ran(A^t)$ **(**A^t **es la matriz traspuesta de** A**).**

III) $ran(A + B) = ran(A) + ran(B)$

IV) $ran(A^2) = [ran(A)]^2$

V) $ran(A) = ran(A^{-1})$ **si** A **tiene inversa (**A^{-1} **es la matriz inversa de** A**).**

s36 **Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Demuestra que $det(A) = 0$ o $det(A) = 1$.**

s37 **Escribe dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tales que:**

a) $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

b) $det(A + B) = det(A) + det(B)$

PARA PROFUNDIZAR

s38 **Demuestra, sin desarrollar el determinante, que:**

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

☛ ***Haz $c_1 - c_3$ y $c_2 - c_3$. Así podrás sacar factor común $(a-b)^2$. Después, haz $c_1 - 2c_2$.***

39 **Demuestra, sin desarrollar, que:**

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

☛ ***En el segundo miembro, multiplica y divide la primera fila por a; la segunda, por b, y la tercera, por c.***

40 **Prueba que:** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

☛ ***Este determinante se llama de Vandermonde. Haz $c_2 - c_1$ y $c_3 - c_1$. Extrae el factor $(b-a)$ de la 2.ª columna y $(c-a)$ de la 3.ª columna.***

s41 **Determina las matrices cuadradas de orden 2 cuyos elementos sean números enteros, con determinante igual a –1, y tal que su inversa coincida con su traspuesta.**

☛ ***Haz $A \cdot A^t = I$ y $|A| = -1$.***

Hay 4 soluciones.

s42 **Escribe una matriz con 3 filas y 3 columnas, que tenga 3 elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden 2 sea nulo.**

43 **Calcula el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

44 **Demostración de que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ para determinantes de orden 2:**

$$|AB| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \underset{(1)}{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}} + \underset{(2)}{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}} +$$

$$+ \underset{(3)}{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}} + \underset{(4)}{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}$$

a) Comprueba que los determinantes (1) y (4) son ambos cero.

b) En (2) y en (3) saca factor común los elementos b_{ij}. Llegarás a $|A| \cdot |B|$, como se quería demostrar.

45 **Considera la siguiente matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz (A_{ij}) formada por los adjuntos de los elementos de A.

b) Prueba que $A \cdot (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$.

c) ¿Qué relación hay entre $|A|$ y $|(A_{ij})|$?

46 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con $|A| \neq 0$. Busca la relación que existe entre $|A|$ y $|(A_{ij})|$.**

Para ello, ten en cuenta el apartado b) del problema anterior y que:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

47 **Si A es una matriz cuadrada de orden n, da el valor de $|(A_{ij})|$ en función de $|A|$.**

AUTOEVALUACIÓN

1. **Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:**

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

2. **Calcula el rango de la matriz siguiente:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a**.**

3. **Considera la siguiente matriz:**

$$N = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

Estudia su rango según los valores del parámetro a**.**

4. **Prueba, sin desarrollarlo, que:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

5. **Sean c_1, c_2, c_3 las columnas primera, segunda y tercera de una matriz cuadrada A de orden 3, cuyo determinante vale 6.**

Calcula, indicando las propiedades que utilizas:

a) $|A^3|$ **b)** $|A^{-1}|$ **c)** $|2A|$

d) **El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3c_1 - c_3$, $2c_3$ y c_2.**

6. **Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$?**

Justifica tu respuesta y pon un ejemplo.