# Soluciones

**1.** a) $D(f) = \mathrm{R} - \{0, 3\}$

b) $D(g) = [-2, 3)$

c) $D(k) = \{x \in \mathrm{R} \ / \ \mathrm{sen}(2x) > 0\}$

$2x \in \{\text{I, II cuadrantes}\} \Rightarrow D = \left(0 + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

**2.** a) $f(x) = 1 + \mathrm{sen}\, x \begin{cases} Y\text{: } (0, 1) \\ X\text{: } \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ 0\right) \end{cases}$

$f$ es siempre positiva excepto en los puntos de corte con el eje $X$.

b) $g(x) = \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} \begin{cases} Y\text{: } (0, 3) \\ X\text{: No tiene} \end{cases}$

$g(x) < 0$ si $x > \ln 2$; $g(x) > 0$ si $x < \ln 2$.

c) $h(x) = 1 - (\ln(3 + x)) \begin{cases} Y\text{: } (0, 1 - \ln 3) \\ X\text{: } (e - 3, 0) \end{cases}$

$h(x) < 0$ si $x > e - 3$; $h(x) > 0$ si $x < e - 3$.

d) $k(x) = \dfrac{e^x}{x}$. No corta a ninguno.

$k(x) < 0$ si $x < 0$; $k(x) > 0$ si $x > 0$.

**3.** a) $f(x) = \mathrm{sen}^2\, x$. Período: $T = \pi$, porque
$\mathrm{sen}^2(x + \pi) = \mathrm{sen}(x + \pi) \cdot \mathrm{sen}(x + \pi) =$
$= (-\mathrm{sen}\, x) \cdot (-\mathrm{sen}\, x) = \mathrm{sen}^2\, x$

b) $g(x) = 4\cos\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)$, $T = 2\pi$: $\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$

**4.** a) $f(x) = \ln|x^2 - 5|$. Es una función par: $f(-x) = f(x)$

b) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -g(x)$.

Es una función impar.

c) $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$. Es impar, ya que $h(-x) = -h(x)$.

**5.** a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{4}{5}$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \ln 1 = 0$; $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = -\infty$

**6.** a) Vertical: $x = \ln 2$, porque $\lim\limits_{x \to \ln 2} \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} = \infty$

Horizontales: $y = \pm 1$, porque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^{-x} + 1}{2e^{-x} - 1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

b) Oblicuas: $y = \pm x$, porque $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = 1$

$n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x}\right) = 0$

**7.** $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$; $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$\begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 4b + 2c = -12 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 4b + c = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Creciente.

$f'(x) < 0 \ \forall x \in (0, 2)$. Decreciente.

En $x = 0$ hay un máximo relativo.

**8.** a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$

Cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$.

Punto de inflexión para $x = 0$.

b) $g(x) = \mathrm{sen}\, x - \cos x$; $g''(x) = -\mathrm{sen}\, x + \cos x$

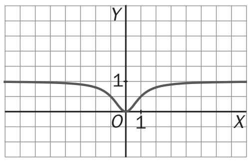
Período: $T = 2\pi$, se estudia $g(x)$ en $[0, 2\pi)$.

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ o $x = \dfrac{5\pi}{4}$, en los que hay inflexión.

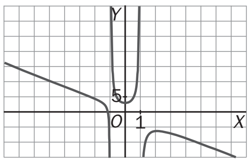
Cóncava hacia arriba en $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, 0\right]$.

Cóncava hacia abajo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

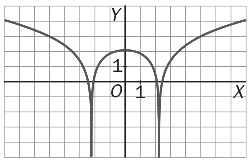
**9.** a)



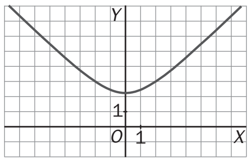
b)



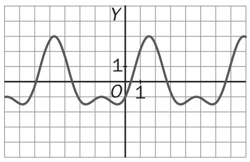
c)



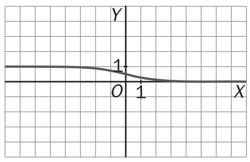
d)



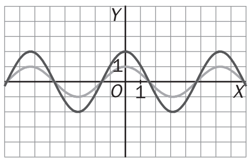
e)



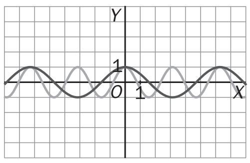
f)



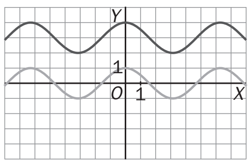
**10.** a)



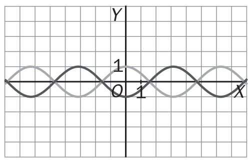
b)



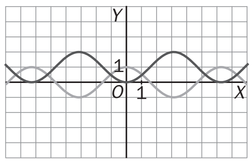
c)



d)



e)



f)