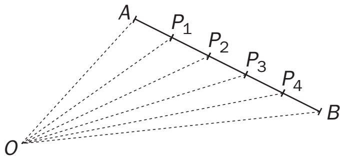
Soluciones

1. $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{OP_1} = (7, -3, 8) + \frac{1}{5}(-15, 5, -10) = (4, -2, 6) \Rightarrow P_1(4, -2, 6)$

$\overrightarrow{OP_2} = (7, -3, 8) + \frac{2}{5}(-15, 5, -10) = (1, -1, 4) \Rightarrow P_2(1, -1, 4)$

Análogamente, $P_3(-2, 0, 2)$ y $P_4(-5, 1, 0)$.

2. $\frac{x+10}{2} = 3 \Rightarrow x = -4$, $\quad \frac{y+6}{2} = 5 \Rightarrow y = 4$

$\frac{z+3}{2} = -1 \Rightarrow z = -5$. El punto es $A(-4, 4, -5)$.

3. a) $M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(4, 1, -\frac{1}{2}\right)$

b) $G\left(\frac{1+7-2}{3}, \frac{2+0+4}{3}, \frac{3-4-2}{3}\right) = (2, 2, -1)$

c) $\overrightarrow{CG} = (4, -2, 1)$, $\overrightarrow{GM} = \left(2, -1, \frac{1}{2}\right)$

Luego $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GM}$.

4. $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$

En forma implícita: $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x - z = -5 \end{cases}$.

5. a) Se suman las ecuaciones y se obtiene:

$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \\ 3x - 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $A(2, 5, 0)$, $\vec{u} = (1, 1, 1)$

6. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 2, -6) \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 3, -4)$.

El plano pedido es $\pi(A, \vec{u}, \vec{v})$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & y+1 \\ -6 & -4 & z-5 \end{vmatrix} = 0$

Operando, $10x + 2y + 4z = 18 \Leftrightarrow 5x + y + 2z = 9$.

7. $A(-2, 0, 3)$ pertenece a la recta y al plano.

$\pi(P, \vec{u}, \overrightarrow{AP})$: $\begin{vmatrix} 5 & 8 & x-6 \\ -2 & 5 & y-5 \\ 1 & -5 & z+2 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando, resulta $5x + 33y + 41z = 113$.

8. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-7, 3, 2)$

$\vec{w} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \Rightarrow (-7, 3, 2) \cdot (x - 3, y - 3, z - 3) = 0$ y se obtiene $-7x + 3y + 2 = -6$.

9. $\vec{w} = (-1, 2, 1)$ y como pasa por $O(0, 0, 0)$, la ecuación pedida es $-x + 2y + z = 0$.

10. El vector normal del plano es $\vec{w} = (1, 1, -1)$.

$r(A, \vec{w})$: $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -2+\lambda,\ A' = r \cap \pi \\ z = 2-\lambda \end{cases}$

$(2 + \lambda) + (-2 + \lambda) - (2 - \lambda) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

El punto A' es $(1, -3, 3)$.

De forma análoga, para B se obtiene $\lambda = -\frac{11}{3}$ y $B\left(-\frac{20}{3}, \frac{13}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Longitud $= \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{1014}$.

11. Se calcula $\pi(P, \vec{u})$, donde $\vec{u} = (1, 0, 2)$ es el vector director de r. π: $(1, 0, 2) \cdot (x - 5, y - 2, z - 2) = 0$, es decir, π: $x + 2z = 9$.

$P' = r \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 0 \\ z = 3+2\lambda \\ x + 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P'(-1, 0, 5)$

12. Se halla el plano σ que verifica $\begin{cases} \{y = 0, z = 0\} \subset \sigma \\ \sigma \perp \pi \end{cases}$ y la recta pedida es $r = \pi \cap \sigma$.

σ: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & -3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y - z = 0$

r: $\begin{cases} x - y - 3z = 5 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+10\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

13. Vector director: $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 4)$

La recta es: r: $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{4}$.

14. Un punto genérico de s es $A(3 - \lambda, 1 + 2\lambda, -3 + \lambda)$ y tiene que cumplirse que $\vec{u} \perp \overrightarrow{AP}$, donde A es la proyección de P sobre la recta; por tanto,

$(-1, 2, 1) \cdot (-2 + \lambda, -1 - 2\lambda, 2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$.

La proyección de P sobre la recta es $P'\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ y la recta buscada es la que pasa por P y P', es decir, r: $(1 + \mu, \mu, -1 - \mu)$.

15. $P = r_1 \cap r_2 = (13, 11, 6)$

π: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & x-13 \\ 2 & 2 & y-11 \\ 1 & 1 & z-6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - 2z + 1 = 0$

16. Hallando el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 7 & -1 & n \end{pmatrix}$ se obtiene: $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 3$ para todo m y n. Se cortan para cualquier valor de m y n.

Se cortan en $P(1, 1, 4)$ para $m = -4$ y $n = 4$.