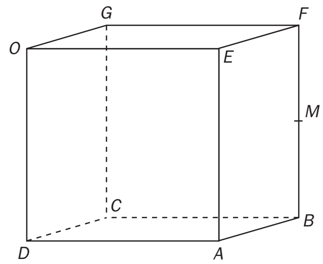
4 Vectores en el espacio

Propuesta A



1. En el cubo de la figura, *M* es el punto medio de *BF*. Expresa los vectores $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FO}$ y $\overrightarrow{DM}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{g}=\overrightarrow{OG}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$ y $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$.

2. Calcula el valor de *k* para que el vector $\vec{a}=(7,-6,2)$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{b}=(1,0,5)$ y $\vec{c}=(2,-2,k)$.

3. Dados los vectores $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ y $\vec{v}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El seno del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

4. Determina el valor del parámetro λ para que los vectores $\vec{u}=\lambda\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{v}=-\vec{i}+\lambda\vec{j}+\vec{k}$ sean:

a) Ortogonales. b) Paralelos.

5. Halla un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}=(4,6,-1)$ y $\vec{v}=(2,3,-2)$.

6. Demuestra vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

7. Sean $\vec{u}=\vec{u}_1+2\vec{u}_2-\vec{u}_3$; $\vec{v}=2\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$; $\vec{w}=5\vec{u}_1-5\vec{u}_2-5\vec{u}_3$. Estudia las soluciones de las ecuaciones vectoriales:

a) $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{v}$ c) $\vec{v}\,x=\vec{u}$

b) $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{w}$ d) $\vec{v}\times\vec{u}=x\,\vec{w}$

8. Si $\vec{u}=(3,0,-1)$, $\vec{v}=(-5,2,3)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$, comprueba que $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.

9. Se consideran los vectores de coordenadas $\vec{u}=(-1,1,1)$ y $\vec{v}=(4,2,x)$.

a) Calcula el valor de *x* que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Para el valor de *x* calculado en el apartado anterior, expresa el vector $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}$ como producto de un número real por el vector $\vec{v}$.

10. Determina todos los posibles valores del parámetro *k* que hacen que el triángulo de vértices $A(3,4,-1)$, $B(1,0,3)$ y $C(k,5,-2)$ sea rectángulo.

Propuesta B

1. Un minero hace un recorrido por una mina bajo una llanura: baja 10 m en ascensor, camina 20 m hacia el norte por una galería, 15 m hacia el oeste, 5 m hacia el sur, sube 5 m en ascensor y camina 10 m hacia el noreste. En ese momento se produce un derrumbe, y el minero queda atrapado. Logra comunicar su posición a sus compañeros en la superficie y, tras analizar la situación, estos deciden cavar un pozo vertical para rescatarlo.

a) ¿En qué posición de la superficie (relativa a la bocamina) deben perforar?

b) ¿A qué profundidad se encuentra el minero atrapado?

c) ¿Cuál es la distancia en línea recta entre el minero y la bocamina?

2. El vector $\vec{a} = (-3, -1, 2)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{b} = (1, 5, -4)$ y $\vec{c} = (k, -2, 3)$. ¿Cuál es el valor de *k*?

3. Dados los vectores $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

4. Sean $\vec{u} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$; $\vec{v} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$; $\vec{w} = 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 8\vec{u}_3$. Estudia las soluciones de las ecuaciones vectoriales:

a) $\vec{u}\,x = \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{w}$ c) $(\vec{u} + \vec{v})\,x = \vec{w}$ d) $\vec{v} \cdot \vec{x} = 1$

5. Se llaman cosenos directores de un vector $\vec{u}$ a los cosenos de los ángulos que determina el vector $\vec{u}$ con cada uno de los vectores de la base. Halla los cosenos directores del vector $\vec{u} = (2, 2, 1)$.

6. Demuestra la igualdad vectorial $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$.

7. Simplifica la expresión $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{u} - \vec{v} - \vec{w})$, sabiendo que el vector $\vec{w}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

8. Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 0)$. Demuestra que los sistemas de vectores siguientes son linealmente independientes:

a) $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}\}$ b) $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}\}$

9. Se considera el vector de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$.

a) Halla, con la ayuda de los parámetros necesarios, la expresión de todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$.

b) Escribe el vector $\vec{a} = (-3, 0, 3)$ como suma de dos vectores, uno de ellos paralelo a $\vec{u}$ y el otro ortogonal a $\vec{u}$.

10. Se consideran los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + x\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + x\vec{j}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + x\vec{k}$.

a) Calcula los posibles valores de *x* que hacen que el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores sea igual a 10.

b) Estudia si existe algún valor de *x* que haga que los tres vectores sean coplanarios.