Soluciones propuesta A

1.

$$\begin{cases}3x-2y+z=-4\\x+y-z=-2\\2x+3y=4\end{cases}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\begin{cases}x+y-z=-2\\3x-2y+z=-4\\2x+3y=4\end{cases}\rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1}\begin{cases}x+y-z=-2\\-5y+4z=2\\y+2z=8\end{cases}\xrightarrow{F_2+5F_3}\begin{cases}x+y-z=-2\\14z=42\\y+2z=8\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=-2-y+z=-1\\y=8-2z=2\\z=3\end{cases}$$

2. Si x = n.º de serpientes, y = n.º de lagartos y z = n.º de cacatúas, el sistema es:

$$\begin{cases}4y+2z=2(x+y+z)\\2z=4y\\-y+z=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-y=0\\2y-z=0\\-y+z=3\end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}. \text{ Como } |A|=1\neq 0:$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$$

Luego hay 3 serpientes, 3 lagartos y 6 cacatúas (al comienzo del problema; al final, solo quedan 3).

3. a) $\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&-2&-1\\-1&1&3\end{vmatrix}=0$. No es de Cramer.

b) La matriz es cuadrada y regular: $|A|=13\neq 0$

$$x=\frac{A_x}{13}=\frac{\begin{vmatrix}6&1&-1\\1&-1&-1\\-4&2&-3\end{vmatrix}}{13}=3,\quad y=\frac{A_y}{13}=1,\quad z=\frac{A_z}{13}=1$$

4. $A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&k+1&k\\1&-1&1\end{pmatrix}$; $|A|=2k^2+k-3=0\Rightarrow k=\begin{cases}1\\ \dfrac{-3}{2}\end{cases}$

Si $k\neq 1$ y $k\neq -\dfrac{3}{2}$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3\Rightarrow$ S. C. D.

Si $k=1$, S. C. I., porque:

$$\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2;\quad \begin{vmatrix}1&1&4\\1&2&5\\1&-1&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

Si $k=\dfrac{-3}{2}$, S. I., porque $\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$ y

$$\begin{vmatrix}1&1&-6\\ \dfrac{-1}{2}&\dfrac{-3}{2}&\dfrac{5}{2}\\-1&1&\dfrac{-1}{2}\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

5. Se realiza el cambio de variable $x=\text{sen}\,\alpha$, $y=\cos\beta$, $z=\text{tg}\,\gamma$, y el sistema queda:

$$\begin{cases}x+y+z=4t\\x-y-z=0\\2x-y+z=0\end{cases},$$

cuya solución es $\begin{cases}x=2t\\y=3t\\z=-t\end{cases}$

Para que el sistema tenga solución al deshacer el cambio, debe ser:

$$\begin{cases}-1\leq \text{sen}\,\alpha\leq 1\\-1\leq\cos\alpha\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leq 2t\leq 1\\-1\leq 3t\leq 1\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{3}\leq t\leq\frac{1}{3}$$

6.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&1\\4&-5&a\end{pmatrix}$$

$$A^*=\begin{pmatrix}2&1&2&b\\1&1&1&0\\4&-5&a&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2&1&-2\\1&1&1\\4&-5&a\end{vmatrix}=a-4=0\Rightarrow a=4$$

Si $a\neq 4\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3\Rightarrow$ S. C. D. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow(x,\ y,\ z)=\left(\frac{b(a+5)}{a-4},\ -b,\ \frac{-9b}{a-4}\right)$$

Si $a=4$:

$$\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2,\quad \begin{vmatrix}2&1&b\\1&1&0\\4&-5&0\end{vmatrix}=-9b$$

$$\begin{cases}\text{Si } b\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3\Rightarrow \text{S. I.}\\ \text{Si } b=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2\Rightarrow \text{S. C. I., } (x,y,z)=(-\lambda,0,\lambda)\end{cases}$$

7. Si x = n.º de habitaciones triples, y = n.º de habitaciones dobles y z = n.º de habitaciones sencillas, el sistema es:

$\begin{cases}x+y+z=11\\3x+2y+z=30\end{cases}$, que es un sistema compatible indeterminado.

Sus soluciones son $(x,y,z)=(\lambda+8,\ -2\lambda+3,\ \lambda)$.

Dado que el hotel tiene habitaciones de los tres tipos, $x>0$, $y>0$ y $z>0$. De la segunda inecuación, $-2\lambda+3>0$, se deduce que $\lambda=1$.

Luego la solución es $(x,y,z)=(9,\ 1,\ 1)$: hay 9 habitaciones triples, 1 doble y 1 sencilla.

Soluciones propuesta B

1. $\begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 2x+y+3z=10 \\ -3x+y-z=-1 \end{cases} \xrightarrow[F_3+3F_1]{F_2-2F_1} \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 5y+5z=20 \\ -5y-4z=-16 \end{cases} \rightarrow$

$\xrightarrow{F_3+F_2} \begin{cases} x-2y-z=-5 \\ 5y+5z=20 \\ z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-5+2y+z=-1 \\ y=4-z=0 \\ z=4 \end{cases}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0;\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$

Para que sea S. C. I. debe ser $\text{rg}(A^*)=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k-25=0 \Rightarrow k=5$

3. a) Es de Cramer: la matriz de coeficientes es cuadrada y regular, $|A|=19\neq 0$.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{19}=\frac{38}{19}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{19}=\frac{19}{19}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{19}=\frac{19}{19}=1$$

b) No es de Cramer: la matriz de coeficientes no es regular, $|A|=0$.

c) No es de Cramer: la matriz de coeficientes no es cuadrada (es 4×3).

4. Para que sea S. C. I. debe cumplirse que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)<\text{n.º de incógnitas}=3$, es decir,

$|A|=0$ y $\text{rg}(A^*)=2$.

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = 14a-14=0 \Rightarrow a=1$

$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$. Luego $a=1$

5. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2-k+2=0 \Rightarrow k=\begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Si $k\neq 1$ y $k\neq -2 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S. C. D. Al ser homogéneo, $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Si $k=1$, coinciden la primera y tercera ecuaciones, luego es S. C. I.:

$\begin{cases} x-y=-z \\ x+2y=4z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{2\lambda}{3},\frac{5\lambda}{3},\lambda\right)$

Si $k=-2$, la segunda ecuación es -2 veces la primera, luego es S. C. I.:

$\begin{cases} x-y=2z \\ x-y=-z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(\lambda,\lambda,0)$

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3-3a+2=0 \Rightarrow a=\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Si $a\neq 1$ y $a\neq 2 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{n.º de incógnitas}=3 \Rightarrow$ S. C. D.

$(x,y,z)=\left(\frac{-a}{a+2},\frac{-a}{a+2},\frac{a^2+2a+2}{a+2}\right)$

Si $a=1$, las tres ecuaciones coinciden:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(1-\lambda-\mu,\ \lambda,\ \mu)$

Si $a=2$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2,$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3 \Rightarrow$ S. I.

7. Si x = n.º de jóvenes, y = n.º de mayores de 65 años y z = n.º de espectadores que no son de los anteriores, el sistema es:

$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 5{,}5x+6y+7{,}5z=3600 \\ y=2x \end{cases} \xrightarrow[2F_2]{\text{Sust. } F_3 \text{ en } F_1 \text{ y } F_2}$

$\begin{cases} 3x+z=500 \\ 35x+15z=7200 \end{cases} \xrightarrow{15F_1-F_2} 10x=300 \rightarrow x=30$

La solución es $(x,\ y,\ z)=(30,\ 60,\ 410)$, es decir, había 30 jóvenes, 60 mayores de 65 años y 410 espectadores distintos de los anteriores.