5 Planos y rectas en el espacio

Propuesta A

1. En cada uno de los siguientes casos calcula las coordenadas del vector libre, sabiendo que uno de sus representantes fijos tiene como origen el punto *A* y por extremo el punto *B*.

a) $A(2, 3, -1)$ y $B(4, 5, 2)$ b) $A(-1, 2, 0)$ y $B(4, -3, -2)$

2. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos $A(2, 3, -2)$ y $B(-4, 3, -2)$.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta *r* que cumple:

a) Pasa por el punto $A(-1, 3, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2, 4)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, 4)$ y $B(-3, 4, -7)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$.

4. Dado el segmento de extremos $A(1, 2, -3)$ y $B(-4, 12, 2)$, calcula las coordenadas de un punto interior a dicho segmento de manera que la distancia que lo separa de *A* sea $\frac{2}{5}$ de la longitud del segmento *AB*.

5. Se considera la recta de ecuación implícita $r: \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Determina:

a) Un punto y el vector director. b) La ecuación en forma paramétrica. c) La ecuación en forma continua.

6. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(4, 0, -1)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (0, -2, 3)$ y $\vec{v} = (5, -1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $A(3, -2, 1)$, $B(0, 0, -2)$ y $C(1, 1, 1)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y contiene a la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{x+3}{-1}$.

7. Decide en cada uno de los siguientes casos si los puntos *A*, *B* y *C* están alineados o forman un triángulo:

a) $A(1, 3, -1)$, $B(-1, 4, -3)$ y $C(3, 2, 1)$ b) $A(1, 2, -2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(0, 4, -4)$

8. Calcula la ecuación del plano simétrico de $\pi: x - 11y + 2z + 3 = 0$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.

9. Calcula *m* para que $A(-1, m - 1, 0)$, $B(0, m + 2, 1)$ y $C(1, 5, 2)$ pertenezcan a una recta. ¿Cuál es su ecuación?

10. Tres aristas concurrentes en el vértice $A(2, 0, 0)$ de un paralelepípedo son *AB*, *AC* y *AD*. Sabiendo que $B(5, 0, 1)$, $C(3, 1, -3)$ y $D(1, 10, 3)$, determina:

a) Los otros cuatro vértices. b) El volumen del paralelepípedo. c) Comprueba que es un ortoedro.

11. Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi_1: ax - y + z = 0$
$\pi_2: x + ay = 0$
$\pi_3: 2x + az = 0$

Propuesta B

1. a) Del vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 3, -1)$ se sabe que *P*(−1, 2, 3). Calcula las coordenadas del extremo *Q*.

b) Del vector $\overrightarrow{RS} = (-1, 3, -2)$ se sabe que *S*(−2, 8, −1). Calcula las coordenadas del origen *R*.

2. El punto *M*(−6, 5, 1) es el punto medio del segmento *AB*. Halla el punto *A* si el punto *B* es (10, −7, 0).

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta *r* que cumple:

a) Pasa por el punto *A*(6, −1, −2) y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (3, 1, 0)$.

b) Pasa por los puntos *A*(5, 2, −1) y *B*(5, 4, −1).

c) Pasa por el punto *A*(−3, 4, 0) y es paralela a la recta $s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{1}$.

4. Dado el segmento de extremos *A*(−3, 4, 4) y *B*(1, 12, 0), calcula las coordenadas de tres puntos *P*, *Q* y *R* que dividan al segmento en cuatro partes iguales.

5. Se define la recta *r* como intersección de los planos $\pi: 2x - 3y + z = 3$ y $\sigma: x - z = 6$. Determina de *r:*

a) Un punto y el vector director. b) La ecuación en forma paramétrica. c) La ecuación en forma continua.

6. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto *A*(1, 2, −2) y tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

b) Pasa por los puntos *A*(−1, 2, −1), *B*(−1, 0, 3) y *C*(−1, 2, 3).

c) Pasa por el punto *A*(−3, 4, 0) y uno de sus vectores normales es $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto *P*(−1, 1, 2) y contiene a la recta $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = z$.

8. a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de *A*(2, 1, 3) respecto de *P*(−2, 1, 0).

b) Halla la ecuación en forma paramétrica de la recta simétrica de $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -2 - t \end{cases}$ respecto de *P*(−2, 1, 0).

9. Un cubo tiene un vértice en el punto *A*(1, 1, 1) y el centro en el punto *C*(2, 2, 2).

¿Cuál es su volumen?

10. Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi_1: 3x - y + 2z = 1$

$\pi_2: x + 4y + z = b$

$\pi_3: 2x - 5y + az = -2$