Soluciones propuesta A

1. a) $r(A,\vec{u}):\begin{cases}A(0,1,-3)\\ \vec{u}=(2,0,-1)\end{cases}$, $s(B,\vec{v}):\begin{cases}B(9,-5,0)\\ \vec{v}=(-3,2,1)\end{cases}$

b) $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{7}{\sqrt{70}}\Rightarrow\alpha=33^{\circ}12'39''$

c) El plano XY tiene ecuación $z=0$, por lo que $r\cap XY=P(-6,1,0)$, $s\cap XY=B(9,-5,0)$.

d) $d(r,s)=\dfrac{\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$, $\begin{cases}\vec{u}\times\vec{v}=(2,1,4)\\ \overrightarrow{AB}=(9,-6,3)\end{cases}$

$d(r,s)=\dfrac{|18-6+12|}{\sqrt{4+1+16}}=\dfrac{24}{\sqrt{21}}$ u

2. El plano está determinado por un punto, A, y su vector normal. $\pi(A,\vec{w}):\begin{cases}A(0,4,0)\\ \vec{w}=(1,-1,1)\end{cases}$

La recta es $r(B,\vec{v}):\begin{cases}B(2,0,-1)\\ \vec{v}=(-1,3,2)\end{cases}$

a) Como $\vec{v}\cdot\vec{w}=-1-3+2\neq 0$, la recta y el plano no son paralelos; luego se cortan.

b) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{14}\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=17^{\circ}58'31''$

c) Se halla el plano $\sigma:\begin{cases}r\subset\sigma\\ \pi\perp\sigma\end{cases}\Rightarrow\sigma(B,\vec{v},\vec{w})$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & x-2\\ 3 & -1 & y\\ 2 & 1 & z+1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\sigma:5x+3y-2z=12$$

$$r'=\pi\cap\sigma=\begin{cases}x-y+z+4=0\\ 5x+3y-2z-12=0\end{cases}=\begin{cases}x=\lambda\\ y=4-7\lambda\\ z=-8\lambda\end{cases}$$

d) $\alpha=\arccos\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\arccos\dfrac{38}{\sqrt{1596}}=17^{\circ}58'31''$

e) Si $P=r\cap\pi=P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{15}{2},4\right)$, entonces la recta es $s(P,\vec{v}\times\vec{w})$. Como $\vec{v}\times\vec{w}=(5,3,-2)$,

$s:\left(x=-\dfrac{1}{2}+5t,\ y=\dfrac{15}{2}+3t,\ z=4-2t\right)$

3. a) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{22}$, $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{59}$

b) $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{20^2+16^2+60^2}=2\sqrt{266}$

c) Se halla:

$\pi_{BCD}(B,\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}):5x+4y+15z+2=0$

$h=d(A,\pi_{BCD})=\dfrac{|45+2|}{\sqrt{25+16+225}}=\dfrac{47}{\sqrt{266}}$ u

d) Se hallan $\overrightarrow{AB}=(2,-3,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-5,2,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(0,7,-5)$, $\vec{n}_1=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(12,19,-11)$, $\vec{n}_2=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(36,10,14)$

$\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{468}{\sqrt{996592}}\Rightarrow\alpha=62^{\circ}2'37''$

e) $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\dfrac{1}{3}S_{BCD}\cdot h=\dfrac{94}{3}$ u^3

4. a) $r:\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\\ z=-2-3t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P'(1+2t,\ t,\ -2-3t)\\ \vec{u}=(2,1,-3)\end{cases}$

$\overrightarrow{PP'}=(-3+2t,\ t-4,-8-3t)$, y como $\overrightarrow{PP'}\perp\vec{u}$,

$\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow 14t+14=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow P'(-1,-1,1)$

b) $d(P,r)=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\sqrt{5^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$ u

c) $s:\begin{cases}x=4+5t\\ y=4+5t\\ z=6+5t\end{cases}$, o también $s:\begin{cases}x=-1+t\\ y=-1+t\\ z=1+t\end{cases}$

5. a) $r:\begin{cases}x=1\\ y=-3+t\\ z=-2-t\end{cases}\Rightarrow C(1,-3+t,-2-t)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,-3,6)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-6+t,-1-t)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(39-3t,\ 5-t,\ 9-t)$

$S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{235}\Rightarrow 11t^2-262t+687=0$

Una solución es $t=3$, de donde $C(1,0,-5)$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0\Rightarrow t=\dfrac{11}{9}\Rightarrow P\left(1,-\dfrac{16}{9},-\dfrac{20}{9}\right)$

c) $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|=\dfrac{\sqrt{91430}}{18}\approx 16{,}8$ u^2

6. a) $r(A,\vec{u}):\begin{cases}A(1,-1,-2)\\ \vec{u}=(3,1,0)\end{cases}\Rightarrow\pi\left(P,\vec{u},\overrightarrow{AP}\right)$

$$\begin{vmatrix}3 & -4 & x+3\\ 1 & 2 & y-1\\ 0 & 2 & z\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-3y+5z+6=0$$

b) $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=(2,-6,10)$, $d(P,r)=\dfrac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{14}$ u

c) Se halla la proyección de P sobre la recta.

$M(1+3t,-1+t,-2)$, $\overrightarrow{PM}=(4+3t,-2+t,-2)$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PM}=0\Rightarrow 10t=-10\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(-2,-2,-2)$

Luego $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PM}\Rightarrow P'(-1,-5,-4)$

Soluciones propuesta B

1. a) El plano π interseca a los ejes en los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 4)$.

b) Como $\overrightarrow{AB}=(-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC}=(-2, 0, 4)$ y $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8, 8, 4)$, el área del triángulo ABC es:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+8^2+4^2}=6\ \text{u}^2$$

c) Los vectores normales a las caras ABC y AOB son $\vec{w}=(2, 2, 1)$ y $\vec{k}=(0, 0, 1)$.

$$\alpha=\arccos\frac{\left|\vec{w}\cdot\vec{k}\right|}{\left|\vec{w}\right|\left|\vec{k}\right|}=\arccos\frac{1}{3}\approx 70^\circ 31'44''$$

d) $$d(O,\pi)=\frac{\left|0+0+0-4\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{4}{3}\ \text{u}$$

e) $$\begin{cases} y=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=4-2\lambda \end{cases}$$

2. $$d(P,\pi)=\frac{\left|4+6-5+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\ \text{u}$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\left|(-9, 39, 33)\right|}{\left|(5, 2, -1)\right|}=\sqrt{\frac{897}{10}}\ \text{u}$$

3. a) $r(A,\vec{u}):\begin{cases} A(1, 0, 3) \\ \vec{u}=(0, 1, 1) \end{cases}$ y $s(B,\vec{v}):\begin{cases} B(-2, 5, -1) \\ \vec{v}=(0, 1, 1) \end{cases}$

Tienen la misma dirección: son paralelas.

b) $$\begin{vmatrix} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 5 & y \\ 1 & -4 & z-3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x+y-z=0$$

c) $$d(r,s)=d(A,s)=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=3\frac{\sqrt{22}}{2}$$

4. a) $$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right]\right|=10\ \text{u}^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ k & -7 & 2 \end{vmatrix}=60\Rightarrow 2k+17=60\Rightarrow k=\frac{43}{2}$$

b) $$\pi\left(A,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right): 2x-y+5z+4=0$$

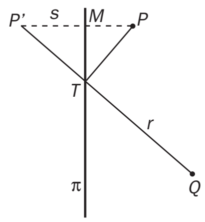
$$h=d(D,\pi)=\frac{\left|43+3+10+4\right|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{60}{\sqrt{30}}=2\sqrt{30}\ \text{u}$$

c) $$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4+1+25}=\frac{1}{2}\sqrt{30}\ \text{u}^2$$

$$V=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{30}\,2\sqrt{30}=10\ \text{u}^3$$

5. Los puntos dados están al mismo lado del plano π, por ello no es útil trazar la recta que pasa por P y Q. En este caso se traza la recta que pasa por Q y por el simétrico de P respecto del plano.

$$s(P,\vec{w}):\begin{cases} x=-5+3\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$$



$M=s\cap\pi\Rightarrow 11\lambda-22=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow M(1, -1, 1)$

Como M es el punto medio de PP', se obtiene $P'(7, -3, 3)$.

$$r(Q,\overline{QP'}):\begin{cases} x=-9+16\lambda \\ y=7-10\lambda \\ z=-4+7\lambda \end{cases},\quad T=r\cap\pi$$

Resolviendo el sistema, $T\left(\frac{103}{65},\frac{25}{65},\frac{41}{65}\right)$

$$PT+TQ=\left|\overrightarrow{PT}\right|+\left|\overrightarrow{TQ}\right|=\frac{\sqrt{5}}{65}(198+387)=9\sqrt{5}$$

Si se toma otro $X\in\pi$, por ejemplo $X(0, -2, 3)$, se obtiene:
$PX+XQ=\sqrt{50}+\sqrt{211}\approx 21{,}6>20{,}12\approx 9\sqrt{5}$

6. Los planos pertenecen al haz de planos de arista la recta r, cuya ecuación es:
$(1+\lambda)x-2y+(1-\lambda)z+(2\lambda-5)=0$

Los puntos que dividen el segmento MN en cuatro partes iguales son: $P_1(1, 4, -1)$, $P_2(3, 3, -4)$ y $P_3(5, 2, -7)$. Los planos del haz que pasan por esos puntos se obtienen con:

$$\lambda_1=\frac{13}{4},\ \lambda_2=\frac{4}{3},\ \lambda_3=\frac{11}{14}$$

y son: $\begin{cases} 17x-8y-9z+6=0 \\ 7x-6y-z-7=0 \\ 25x-28y+3z-48=0 \end{cases}$

Los ángulos que forman son:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2\right|}{\left|\vec{w}_1\right|\left|\vec{w}_2\right|}=\frac{176}{\sqrt{434}\sqrt{86}}\Rightarrow\alpha=24^\circ 21'22''$$

$$\cos\beta=\frac{\left|\vec{w}_2\cdot\vec{w}_3\right|}{\left|\vec{w}_2\right|\left|\vec{w}_3\right|}=\frac{340}{\sqrt{86}\sqrt{1418}}\Rightarrow\beta=13^\circ 11'19''$$

$$\cos\gamma=\frac{\left|\vec{w}_1\cdot\vec{w}_3\right|}{\left|\vec{w}_1\right|\left|\vec{w}_3\right|}=\frac{622}{\sqrt{434}\sqrt{1418}}\Rightarrow\gamma=37^\circ 32'40''$$