6 Propiedades métricas

Propuesta A

1. Dadas las rectas $r:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{-1}$ y $s:\begin{cases}x+y+z-4=0\\x+2y-z+1=0\end{cases}$, determina:

a) Un punto y el vector director de cada una.

b) El ángulo que forman.

c) El punto de corte de cada una de las rectas con el plano *XY*.

d) La distancia entre las dos rectas.

2. Sean el plano $\pi: x-y+z+4=0$ y la recta $r:(2-t,\ 3t,\ -1+2t)$. Determina:

a) Su posición relativa.

b) El ángulo que forma la recta con el plano.

c) La ecuación de la recta r' que se obtiene al proyectar ortogonalmente la recta sobre el plano.

d) El ángulo que forma la recta *r* con su proyección r'.

e) La ecuación de otra recta *s* que corta perpendicularmente a *r* y está contenida en el plano π.

3. Los puntos $A(0, 0, 3)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-5, 2, 1)$ y $D(0, 7, -2)$ son los vértices de un tetraedro, calcula:

a) La longitud de las aristas *AB* y *CD*.

b) El área de la cara *BCD*.

c) La altura del tetraedro sobre la cara *BCD*.

d) La medida del diedro que determinan las caras *ABC* y *ABD*.

e) El volumen del tetraedro.

4. Se considera la recta $r:\begin{cases}x-2y=1\\3y+z=-2\end{cases}$ y el punto $P(4, 4, 6)$. Halla:

a) El punto de la recta más cercano a *P*.

b) La distancia del punto *P* a la recta *r*.

c) La ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el punto *P*.

5. Los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(-1, 0, 5)$ son vértices de un triángulo de área $S=\sqrt{235}$. El tercer vértice *C* pertenece a la recta de ecuación $r:\frac{x-1}{0}=y+3=\frac{z+2}{-1}$. Determina:

a) Las coordenadas del vértice *C*.

b) Las coordenadas de otro punto $P\in r$ de manera que el triángulo *APB* sea rectángulo en *A*.

c) El área del triángulo *APB*.

6. Dados el punto $P(-3, 1, 0)$ y la recta $r:(1+3t,\ -1+t,\ -2)$, determina:

a) La ecuación del plano que los contiene.

b) La distancia del punto a la recta.

c) Las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

Propuesta B

1. El plano $\pi: 2x+2y+z-4=0$ forma con los planos de coordenadas *XY*, *XZ*, *YZ* un tetraedro de vértices *O*, *A*, *B*, *C*. Determina:

a) Las coordenadas de *A*, *B* y *C*.

b) El área de la cara *ABC* del tetraedro.

c) El ángulo que forman las caras *ABC* y *OAB*.

d) La distancia del vértice *O* al plano π.

e) La ecuación paramétrica de la recta donde π corta al plano *XZ*.

2. Se considera el plano $\pi: x-y-z+1=0$, la recta $r: \frac{x}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-1}$ y el punto $P(4, -6, 5)$.

Determina las distancias del punto al plano y a la recta.

3. Se consideran las rectas de ecuaciones $r: \begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $s: \frac{x+2}{0}=y-5=z+1$.

a) Confirma que son rectas paralelas.

b) Halla la ecuación del plano que las contiene.

c) Halla la distancia entre las dos rectas.

4. El volumen del tetraedro de vértices $A(-2, 5, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(0, 4, 0)$ y $D(k, -3, 2)$ es 10 u^3.

a) Determina el valor de *k*.

b) Para el valor de *k* hallado, ¿cuánto mide la altura del tetraedro desde *D*?

c) Comprueba, utilizando la altura hallada, que el volumen de un tetraedro es $V=\frac{1}{3}A_{\text{Base}}\cdot h$.

5. Dados los puntos $P(-5, 1, -1)$, $Q(-9, 7, -4)$ y el plano $\pi: 3x-y+z-5=0$, determina las coordenadas de un punto *T* del plano π para que la suma de las distancias *PT* + *TQ* sea la menor posible.

Calcula cuánto es la suma de las dos distancias.

Toma otro punto cualquiera *X* del plano y comprueba que la suma de distancias *PX* + *XQ* es mayor que la hallada anteriormente.

6. Determina la ecuación de tres planos que contienen a la recta $r: \begin{cases} x-2y+z=5 \\ x-z=-2 \end{cases}$ y que dividen al segmento *MN*, de extremos $M(-1, 5, 2)$, $N(7, 1, -10)$, en cuatro partes iguales.

¿Qué ángulos forman los tres planos entre sí?