Soluciones propuesta A

1. a) $\begin{cases} x = 3 + 4\,\text{sen}\,t \\ y = 2 + 4\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,t = \dfrac{x-3}{4} \\ \cos t = \dfrac{y-2}{4} \end{cases}$

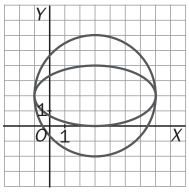
Como $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$,

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$\begin{cases} x = 3 + 4\cos t \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x-3}{4} \\ \text{sen}\,t = \dfrac{y-2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

b) Se trata de una circunferencia de centro $C(3, 2)$ y radio 4, y de una elipse con el mismo centro y semiejes $a = 4$ y $b = 2$.



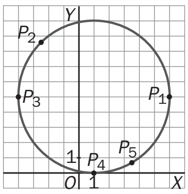
c) Los puntos comunes se obtienen al igualar las ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{sen}\,t = \cos\lambda \\ 2\cos t = \text{sen}\,\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{sen}^2 t + 4\cos^2 t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cos^2 t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ t_2 = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(7, 2) \\ B(-1, 2) \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x = 1 + 5\cos t \\ y = 5 + 5\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

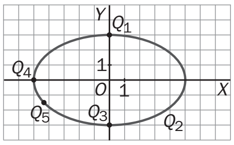
t	P_i
0	(6, 5)
$\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(\dfrac{2-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{10+5\sqrt{2}}{2}\right)$
π	(–4, 5)
$\dfrac{3\pi}{2}$	(1, 0)
$\dfrac{5\pi}{3}$	$\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{10-5\sqrt{3}}{2}\right)$



3. $\begin{cases} x = 5\,\text{sen}\,t \\ y = 3\cos t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

t	Q_i
0	(0, 3)
$\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$
π	(0, –3)

$\dfrac{3\pi}{2}$	(–5, 0)
$\dfrac{5\pi}{3}$	$\left(\dfrac{-5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$



4. a) Centro: $C(3, 2, -1)$.

Radio: $r = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2 - (-11)} = \sqrt{25} = 5$

b) $d(C, \pi) = r \Rightarrow \dfrac{|6+2+2+m|}{3} = 5 \Rightarrow |10+m| = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = 5$, $m_2 = -25$.

c) Los puntos de tangencia son intersección entre la recta perpendicular al plano que pasa por C y el plano. Sus ecuaciones son: $\{x = 3 + 2\lambda,\ y = 2 + \lambda,\ z = -1 - 2\lambda\}$

Sustituyendo en la ecuación del plano π y dando a m los valores obtenidos en b:

$$m_1 = 5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$m_2 = -25 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3} \Rightarrow A\left(\frac{19}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{13}{3}\right)$$

5. Aplicando las relaciones entre los tres tipos de coordenadas se llega a:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P\ (0, 1, 1)$	$P\left(1, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$	$P\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$
$Q\left(\sqrt{3}, 1, -2\right)$	$Q(2, 30^\circ, -2)$	$Q\left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$
$T\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}, 0\right)$	$T\ (5, 60^\circ, 0)$	$T\ (5, 60^\circ, 90^\circ)$

6. a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ $\quad r = 2$

b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ $\quad r = \dfrac{15}{\sqrt{9 + 16\,\text{sen}^2\theta}}$

c) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ $\quad r = \sqrt{\dfrac{12}{3 - 4\,\text{sen}^2\theta}}$

d) $x^2 = 12y$ $\quad r = \dfrac{12\,\text{sen}\,\theta}{1 - \text{sen}^2\theta}$

7. La ecuación vectorial de la superficie es $\vec{x} - \vec{a} = s(\vec{c} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + s(\vec{c} - \vec{a})$ y las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + s(2t+1) \\ y = 0 + s(2\,\text{sen}\,t) \\ z = 2 + s(2\cos t - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + s + 2st \\ y = 2s \cdot \text{sen}\,t \\ z = 2 - 2s + 2s \cdot \cos t \end{cases}$$

8. Las ecuaciones de la superficie pedida son:

$$\begin{cases} x = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \cdot \cos s - 0 \cdot \text{sen}\,s \\ y = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \cdot \text{sen}\,s + 0 \cdot \cos s \Rightarrow \\ z = 2a \cdot \text{sen}^2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \cdot \cos s \\ y = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \cdot \text{sen}\,s \\ z = 2a \cdot \text{sen}^2\alpha \end{cases}$$

donde s es el ángulo de giro.

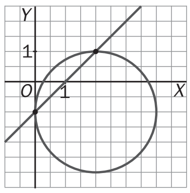
Soluciones propuesta B

1. a) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow x - 3 = y - 2 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

$$\begin{cases} x = \ \ 2 + 2\cos t \\ y = -1 + 2\,\text{sen}\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x-2}{2} \\ \text{sen}\, t = \dfrac{y+1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

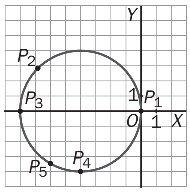
b) Se trata de una recta y de una circunferencia.



c) Para hallar los puntos de corte se resuelve el sistema: $P_1\,(2,\ 1)$ y $P_2\,(0,\ –1)$

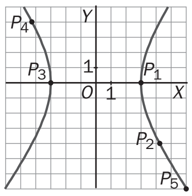
2. $\begin{cases} x = –4 + 4\ \cos t \\ y = \ \ 0 + 4\ \text{sen}\, t \end{cases} \Rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 16$

t	P_i
0	(0, 0)
$-\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(-4-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$
π	(–8, 0)
$\dfrac{3\pi}{2}$	(–4, –4)
$\dfrac{4\pi}{3}$	$\left(-6, -2\sqrt{3}\right)$



3. $\begin{cases} x = 3\sec t \\ y = 4\,\text{tg}\, t \end{cases} \Rightarrow \sec^2 t - \text{tg}^2\, t = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

t	Q_i
0	(3, 0)
$\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(3\sqrt{2}, -4\right)$
π	(–3, 0)
$-\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(-3\sqrt{2}, 4\right)$
$\dfrac{5\pi}{3}$	$\left(6, -4\sqrt{3}\right)$



4. a) Tomando un punto genérico $P(x, y)$ de la curva, se tiene que $d(P, F) = d(P, F') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$$

b) $r^2 = 2c^2 \cos^2 \theta$

c) Haciendo $y = 0$ se obtienen tres soluciones: $x = 0$, $x = \pm c\sqrt{2} \Rightarrow$ Vértices: $(\mp c\sqrt{2}, 0)$.

5. Aplicando las relaciones entre los tres tipos de coordenadas se llega a: $(3\sqrt{2},\ 270°,\ 135°)$

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(3,\ \sqrt{3},\ 3)$	$P\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}, 3\right)$	$P\left(\sqrt{21}; \dfrac{\pi}{6}; 0{,}857\right)$
$Q\ (–4,\ 0,\ 4)$	$Q(4,\ 180°, 4)$	$Q\left(4\sqrt{2},\ \pi,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$
$T\ (0,\ –3,\ –3)$	$T\ (3,\ 270°,\ −3)$	$T(3\sqrt{2}, 270°, 135°)$

6. Ecuaciones paramétricas de la superficie:

$$\begin{cases} x = 2\cos t - s \\ y = 2\,\text{sen}\, t \\ z = 2 - s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x+s}{2} \\ \text{sen}\, t = \dfrac{y}{2} \\ s = 2 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+2-z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

7. Se toma un punto genérico A del eje Z y otro B de la recta r.

$A\ (0,\ 0,\ s)$, $B\ (4 + t,\ 12 + 3t,\ t)$

Para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} = (0,\ 0,\ 1)$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow t - s = 0 \Rightarrow t = s$$

La superficie está formada por las rectas que pasan por $A\ (0,\ 0,\ t)$ y $B\ (4 + t,\ 12 + 3t,\ t)$:

$$s: \begin{cases} x = s(4+t) \\ y = s(12+3t) \\ z = t \end{cases}$$. Eliminando los parámetros:

$$s = \frac{x}{4+t} = \frac{y}{12+3t}; \quad t = z \Rightarrow \frac{x}{4+z} = \frac{y}{12+3z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x - 4y + 3xz - yz = 0$$

8. a) $S = 4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r = 3$

Centro: $C(1,\ 0,\ –3)$ y $d = 1^2 + (–3)^2 – 3^2 = 1$

b) $r_2 = d(C,\ \pi) = \dfrac{|1-6|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{5}{3}$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \frac{25}{9}$$

c) Eje X: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $x^2 - 2x + 9 = 0$

Sin solución real.

Eje Y: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,\ 1,\ 0) \\ B(0,\ 9,\ 0) \end{cases}$

Eje Z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $z^2 + 6z + 9 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow z = -3 \Rightarrow C(0,\ 0,\ -3)$