7 Lugares geométricos en el espacio

Propuesta A

1. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico.

I) $\begin{cases} x = 3 + 4\,\text{sen}\,t \\ y = 2 + 4\cos t \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = 3 + 4\cos t \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\,t \end{cases}$

a) Elimina el parámetro en cada una y determina sus ecuaciones cartesianas.

b) Determina los lugares geométricos de los que se trata y represéntalos gráficamente.

c) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

2. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(1, 5)$ y radio $r = 5$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ y represéntalos.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la elipse de focos $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$ y eje mayor $2a = 10$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ y represéntalos.

4. La superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z - 11 = 0$ es tangente a un plano de ecuación $2x + y - 2z + m = 0$. Halla:

a) El centro, radio y el área de la superficie esférica.

b) El valor o valores de m.

c) Las coordenadas del punto o de los puntos de tangencia.

5. Completa la siguiente tabla calculando las coordenadas de los puntos dados en los tres sistemas de coordenadas:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(0, 1, 1)$		
	$Q(2, 30°, -2)$	
		$T(5, 60°, 90°)$

6. Escribe en coordenadas cartesianas y en polares las ecuaciones de las siguientes curvas.

a) Circunferencia de centro $C(2, 1)$ y radio $r = 2$.

b) Elipse de centro el origen y semiejes $a = 5$ y $b = 3$.

c) Hipérbola de centro $C(0, 0)$, eje real $a = 2$ y excentricidad $e = 2$.

d) Parábola de vértice el origen y foco $F(0, 3)$.

7. Escribe las ecuaciones paramétricas de la superficie cónica formada por todas las rectas que pasan por el vértice $V(-1, 0, 2)$ y se apoyan en la directriz $C: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \\ z = 2\cos t \end{cases}$.

8. La curva $B: \begin{cases} x = 2a \cdot \text{cotg}\,\alpha \\ y = 0 \\ z = 2a \cdot \text{sen}^2\,\alpha \end{cases}$, con $a \neq 0$, se llama “Bruja de Agnesi” y está contenida en el plano XZ. Halla las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución engendrada por la Bruja cuando gira en torno al eje Z.

Propuesta B

1. Cada una de las ecuaciones paramétricas siguientes corresponde a un lugar geométrico.

I) $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2+\lambda \end{cases}$ II) $\begin{cases} x = \ \ 2+2\cos t \\ y = -1+2\,\text{sen}\, t \end{cases}$

a) Elimina el parámetro en cada una y determina sus ecuaciones cartesianas.

b) Determina los lugares geométricos de los que se trata y represéntalos gráficamente.

c) Halla las coordenadas de los puntos comunes a ambos lugares geométricos.

2. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(-4, 0)$ y radio $r = 4$.

Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = -\frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{4\pi}{3}$ y represéntalos.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la hipérbola de focos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y eje mayor $2a = 6$.

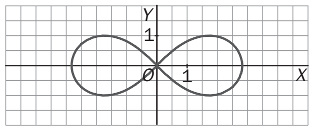
Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro, en las ecuaciones paramétricas, $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = -\frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{3}$, y represéntalos.

4. Se define la lemniscata de Bernoulli como el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijos, los focos, tienen un producto constante e igual a c^2, siendo c la semidistancia focal.

a) Halla su ecuación en coordenadas cartesianas suponiendo que los focos son los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

b) Halla su ecuación en coordenadas polares.

c) Si la semidistancia focal es $c = 2$, demuestra que los vértices horizontales son los puntos $A'(-2\sqrt{2}, 0)$ y $A(2\sqrt{2}, 0)$.



5. Completa la siguiente tabla calculando las coordenadas de los puntos dados en los tres sistemas de coordenadas:

Cartesianas	Cilíndricas	Esféricas
$P(3, \sqrt{3}, 3)$		
	$Q(4, 180^\circ, 4)$	
		$T(3\sqrt{2}, 270^\circ, 135^\circ)$

6. Halla la ecuación implícita de la superficie cilíndrica de directriz la curva $C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \\ z = 2 \end{cases}$ y de generatrices paralelas al vector $\vec{v} = (-1, 0, -1)$.

7. Escribe la ecuación de la superficie formada por todos los puntos pertenecientes a las rectas que se apoyan en el eje Z y en la recta de ecuación $r: \begin{cases} x = 4+t \\ y = 12+3t \\ z = t \end{cases}$ y cuya dirección es perpendicular al vector $\vec{u} = (0, 0, 1)$.

8. La superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2-2x+6z+d=0$ tiene un área de 36π unidades cuadradas. Halla:

a) El radio de la misma y el valor del término independiente d.

b) La ecuación de otra superficie esférica concéntrica con esta y tangente al plano $\pi: x-2y+2z=0$.

c) Los puntos de corte de la superficie esférica con los ejes de coordenadas.