

## 8 Límites de sucesiones y de funciones

### Propuesta A

- Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:
  - 4, 7, 10, 13, 16, ...
  - $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \dots$
  - 1, 4, 9, 16, 25, ...
  - 2, 5, 10, 17, 26, ...
- Dada la sucesión definida por recurrencia:  $a_0 = 2, a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ :
  - Calcula sus cinco primeros términos.
  - Halla su término general.
  - Sabiendo que es convergente, calcula su límite.
  - ¿Está acotada? Si es así, da una cota inferior y una superior.
- Dada la sucesión de término general  $a_n = 3 + \frac{2}{n}$ :
  - Calcula sus tres primeros términos y halla el lugar que ocupa el término  $a_s = \frac{28}{9}$ .
  - Demuestra que es estrictamente decreciente.
  - Calcula su límite y averigua a partir de qué término los siguientes términos se aproximan a 3 con un error menor que  $\varepsilon = 0,001$ .
- Calcula los siguientes límites:
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2n}{n+1} - \frac{n^2 + 2n}{n-1} \right)$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 - 4n + 1}{1 + 3n}$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n} \right)$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+1}{2n-1} \right)^{n+2}$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2}$
- Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?
  - $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$
  - $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-x}$
- Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:
  - $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 31)$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} (x-5)(4-x^2)$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 100x - 2009)$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x)(4+x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 7)$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x^2 + 10)$
- Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:
  - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
  - $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4}$
- Se considera la función:  $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$ , calcula  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Calcula los siguientes límites de funciones racionales:
  - $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$
  - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^3 + 4x}{x^4 - 16}$

## Propuesta B

1. Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) 10, 7, 4, 1, -2, ...    b)  $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$     c) 1, 8, 27, 64, 125, ...    d) 0, 7, 26, 63, 124, ...

2. Se considera la sucesión definida por recurrencia:  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n$ .

- a) Calcula sus cinco primeros términos.  
b) Halla su término general.  
c) Si  $b_n = |a_n|$  y  $c_n = -|a_n|$ , demuestra que  $b_n$  y  $c_n$  son progresiones geométricas. ¿Lo es también  $a_n$ ?  
d) Estudia la monotonía de  $a_n$ .  
e) Halla, si existen, cotas superiores e inferiores para  $a_n$ .  
f) Calcula el límite de  $a_n$ .

3. Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2} \right)$     c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1} \right)$     e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}}$   
b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2}{n+1} \cdot \frac{n+4}{5n^2} \right)$     d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2}{3n+1} \right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$     f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2+1}$

4. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1)$     c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 2)$     e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3)$   
b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + x - 3)$     d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x^2)$     f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5)$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$     b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4}{x + 1}$

6. Calcula los límites laterales de las funciones racionales en los puntos en que no están definidas:

a)  $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$     b)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$     c)  $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x)$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

8. Se considera la función:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$ . Calcula  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .