Soluciones propuesta A

1. a) $S = 1\cdot(f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(1)+f(2)) =$
$= 10+5+2+2+5 = 24$

$s = 1\cdot(f(-2)+f(-1)+f(0)+f(0)+f(1)) = 11$

b) $A = \int_{-3}^{2}(x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-3}^{2} = \frac{50}{3}$ u^2

2. a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx = [\text{sen}\,x]_{-\pi}^{\pi} = \text{sen}\,\pi - \text{sen}(-\pi) = 0$

b) $\int_0^2(2x-1)dx = \left[x^2-x\right]_0^2 = 4-2 = 2$

c) $\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^e = (e\cdot\ln e - e)-(-1) = 1$

Solamente en el caso c la integral representa un área porque en los otros casos la función no es positiva en todo el intervalo de integración.

3. El máximo de $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$ es $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Por tanto, $f(x)\le\frac{3}{2}$ en (0, 1) $\Rightarrow$

$\frac{1}{f(x)}\ge\frac{2}{3}\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx\ge\int_0^1\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}$

4. Por el teorema fundamental del cálculo, será $F'(x)=\frac{1}{1+2\cos x}\ne 0$ para cualquier valor de x, por lo que F no tiene extremos relativos.

5. a) $f(1) = a = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$

b) $\lim_{x\to3^-} g(x) = \lim_{x\to3}(x^2+b) = 9+b$

$\lim_{x\to3^+} g(x) = \lim_{x\to3}(4x+1) = 13 = 9+b \Rightarrow b = 4$

Así, $\int_0^5[f(x)-g(x)]dx = \int_1^3(x-3-x^2)dx+\int_3^5(-3x)dx =$

$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^3+\left[\frac{-3x^2}{2}\right]_3^5 = -\frac{75}{2}$

6. a) $\int_0^4|2x-4|dx = \int_0^2(-2x+4)dx+\int_2^4(2x-4)dx =$

$= \left[-x^2+4x\right]_0^2+\left[x^2-4x\right]_2^4 = 4-(-4) = 8$

b) $\int_0^4\sqrt{x^2-4x+4}\,dx = \int_0^4\sqrt{(x-2)^2}\,dx =$

$= \int_0^4|x-2|dx = \int_0^2(2-x)dx+\int_2^4(x-2)dx =$

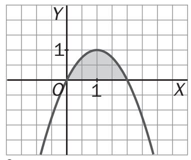
$= \left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4 = 2+(0+2) = 4$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\text{sen}\,x|\,dx =$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,x\,dx = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(0+1) = 2$

Todas representan un área: las funciones son positivas en el intervalo de integración.

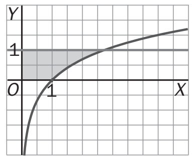
7. La parábola corta al eje de abscisas en los puntos $x = 0$ y $x = 2$, y es continua y positiva en este intervalo.



Por tanto:

$A = \int_0^2(2x-x^2)\,dx = \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$ u^2

8. a) $A = 1+\int_1^e(1-\ln x)dx =$



$= 1+\left[x(2-\ln x)\right]_1^e =$

$= 1+(e-2) = e-1$ u^2

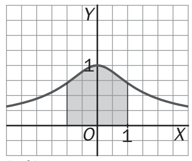
b) $A = \int_0^1 e^y dy = \left[e^y\right]_0^1 = e-1$ u^2

c) $V = \pi\int_0^e 1^2dx-\pi\int_1^e(\ln x)^2dx =$

$= \pi e-\pi\left[x(\ln^2x-2\ln x+2\right]_1^e = 2\pi$ u^3

d) $V = \pi\int_0^1\left(e^y\right)^2dy = \frac{\pi}{2}\left[e^{2y}\right]_0^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{2}$ u^3

9. a) $A = 2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$



Se toma: $x = \text{tg}\,t$

$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec t}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\,dt =$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec t(\sec t+\text{tg}\,t)}{\sec t+tg\,t}dt = 2[\ln(\sec t+\text{tg}\,t)]_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$= 2(\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 1) = 2\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$

b) $V = \pi\int_{-1}^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx = \pi\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2} =$

$= \pi[\text{arctg}\,x]_{-1}^1 = \pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2}$ u^3

c) Se despeja x en función de y: $x = \sqrt{\frac{1}{y^2}-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow V = \pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy = \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}1^2dy+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(\frac{1}{y^2}-1\right)dy =$

$= \pi\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi\left[-\frac{1}{y}-y\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$ u^3

10. a) $L = \int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx =$

$= \int_1^e\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$. Con el cambio $x^2+1 = t^2$

se llega a $L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}\frac{t^2}{t^2-1}dt\approx 2{,}0035$.

Soluciones propuesta B

1. a) $A=\int_2^4 \frac{2dx}{x+1}=2\left[\ln|x+1|\right]_2^4=2\ln\left(\frac{5}{3}\right)\approx 1{,}02$

b) $S=\frac{1}{4}\left(f(2)+f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{7}{2}\right)\right)=\frac{275}{504}$

$s=\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{5}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{7}{2}\right)+f(4)\right)=\frac{1207}{2520}$

$S\approx 0{,}55;\ \ s\approx 0{,}479$

2. a) $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$

b) $\int_{-2}^{2}(2x+2)\,dx=\left[x^2+2x\right]_{-2}^{2}=8$

c) $\int_{-1}^{1}e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$

La a y la c representan un área porque las dos funciones son positivas en el intervalo de integración, mientras que la b no.

3. a) Para que f sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x=0$ y en $x=3$;

$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}0=0\\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+ax+b)=b=0\end{cases}\Rightarrow b=0$$

$f(3)=\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^+}f(x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2+ax)=9+3a\\ \lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x+9)=12\end{cases}\Rightarrow a=1$$

b) $\int_{-\pi}^{6}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}x\,dx+\int_0^3(x^2+x)\,dx+$

$+\int_3^6(x+9)\,dx=\left[-\cos x\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^3+$

$+\left[\frac{x^2}{2}+9x\right]_3^6=-2+9+\frac{9}{2}+\left(72-\frac{9}{2}-27\right)=52$

4. Llamando $F(x)=\int_0^x t^2\ln(1+4t^2)\,dt$, hay que calcular $L=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{5x^4}=$

$=\lim_{x\to o}\frac{x^2\ln(1+4x^3)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{10x(1+4x^3)}=\frac{4}{5}$

Se han aplicado la regla de L'Hôpital dos veces y el teorema fundamental del cálculo.

5. Aplicando el teorema fundamental del cálculo y teniendo en cuenta que los límites de integración son funciones de x,

$F'(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}x^2}\cdot 2x-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot 1=\frac{2x}{\operatorname{sen}x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}$

6. a) $\int_0^4|x-4|\,dx=\int_0^4(4-x)\,dx=\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8$

b) $\int_0^3\sqrt{x^2-2x+1}\,dx=\int_0^3|x-1|\,dx=$

$=\int_0^1(1-x)\,dx+\int_1^3(x-1)\,dx=$

$=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

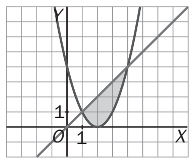
c) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx=\left[\operatorname{sen}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+$

$+\left[-\operatorname{sen}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1+1=2$

Las tres representan un área porque las funciones son positivas en el intervalo de integración.

7. Se hallan los puntos de corte entre f y g: $f(x)=g(x)\Rightarrow(1,\,1),\,(4,\,4)$



Al ser $g>f$ en $[1,\,4]$, el área buscada es:

$A=\int_1^4\left[x-\left(x^2-4x+4\right)\right]dx=$

$=\int_1^4(-x^2+5x-4)\,dx=$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4\approx 4{,}83\ \text{u}^2$

8. a) $A=\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}x\right)dx=$

$=\left[\frac{\pi}{4}x-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1\approx 0{,}35\ \text{u}^2$

b) $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}y\,dy=\left[-\ln(\cos y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\approx 0{,}35\ \text{u}^2$

c) $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2y\,dy=\pi\left[\operatorname{tg}y-y\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\ \text{u}^3$

9. $V=\pi\int_0^{\pi}(x\operatorname{sen}x)\,dx=\pi\left[-x\cos x+\operatorname{sen}x\right]_0^{\pi}=\pi^2\ \text{u}^3$

10. a) De acuerdo a la figura, la parábola que engendra el paraboloide es $y^2=2px$. Al pasar por $P(a,\,R)\Rightarrow 2p=\frac{R^2}{a}\Rightarrow y^2=\frac{R^2}{a}x$

$V=\pi\int_0^a\left(\frac{R^2}{a}x\right)dx=\frac{\pi R^2}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{\pi R^2a}{2}$

b) En este caso la parábola es:

$y^2=\frac{L^2}{d}x\Rightarrow y=\pm\frac{L}{\sqrt{d}}\sqrt{x}$ y el área:

$A=2\int_0^d\left(\frac{L}{\sqrt{d}}\sqrt{x}\right)dx=\frac{2L}{\sqrt{d}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^d=\frac{4}{3}Ld$