14 Integral definida

Propuesta A

1. Considera la función $f(x) = x^2 + 1$ definida en el intervalo [–3, 2] y la partición *P* del mismo formada por los puntos de abscisas –3, –2, –1, 0, 1 y 2.

a) Determina utilizando dicha partición una aproximación por exceso y otra por defecto al área encerrada entre la curva de *f* y el eje *X*.

b) Obtén el valor exacto del área anterior usando la regla de Barrow.

2. Calcula las siguientes integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y señala cuáles de ellas representan un área y cuáles no.

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$ b) $\int_0^2 (2x-1)\,dx$ c) $\int_1^e \ln x\, dx$

3. Demuestra que $\dfrac{2}{3} \le \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

4. Halla los máximos y mínimos relativos, si es que existen, de la función $F(x) = \int_0^1 \dfrac{1}{1+2\cos t}\,dt$.

5. Calcula los valores de *a* y de *b* que hacen continua las siguientes funciones en todo **R** y determina para los valores hallados $\int_0^5 [f(x)-g(x)]\,dx$.

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2+b & \text{si } x < 3 \\ 4x+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

6. Calcula las integrales definidas siguientes y justifica si representan un área o no.

a) $\int_0^4 |2x-4|\,dx$ b) $\int_0^4 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\,dx$

7. Representa y calcula el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $y = 2x - x^2$.

8. La gráfica de la función $y = \ln x$, la recta *y* = 1 y los ejes de coordenadas delimitan un recinto con forma de trapecio mixtilíneo. Determina:

a) El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable *x*.

b) El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable *y*.

c) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *X*.

d) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *Y*.

9. Sea el recinto acotado y limitado por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, las rectas *x* = 1, *x* = –1 y el eje *X*.

a) Determina el área del recinto.

b) Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *X*.

c) Calcula el volumen del sólido de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *Y*.

10. Se considera la función $y = 2\ln x$ definida para valores de $x \in [1, e]$. Determina:

a) La longitud del arco de curva.

b) El área del recinto limitado por el arco y su cuerda.

Propuesta B

1. Sea la función $y = \frac{2}{x+1}$ definida en el intervalo [2, 4], en el que se toma una partición *P* dividiéndolo en cuatro partes iguales.

a) Obtén el área encerrada por la curva de *f* y el eje *X* en el intervalo usando la regla de Barrow.

b) Determina una aproximación por exceso y otra por defecto al área anterior usando la partición *P*.

2. Calcula las integrales definidas mediante la aplicación de la regla de Barrow y justifica cuáles de ellas representan un área y cuáles no.

a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ b) $\int_{-2}^{2} (2x+2)\, dx$ c) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\, dx$

3. Determina para qué valores de los parámetros *a* y *b* la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ x + 9 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$ es continua en toda la recta real. Para los valores obtenidos calcula $\int_{-\pi}^{6} f(x)\, dx$.

4. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^5} \int_0^x t^2 \ln(1+4t^3)\, dt$.

5. Halla la derivada de la función $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt$.

6. Calcula las siguientes integrales definidas y justifica si representan un área o no.

a) $\int_0^4 |x-4|\, dx$ b) $\int_0^3 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\, dx$ c) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

7. Representa y calcula el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$.

8. La gráfica de la función *y* = arctg *x*, la recta $y = \frac{\pi}{4}$ y el eje *Y* delimitan un recinto con forma de triángulo mixtilíneo. Determina:

a) El área de dicho recinto utilizando la integración respecto de la variable *x*.

b) El área del recinto utilizando la integración respecto de la variable *y*.

c) El volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto anterior al girar alrededor del eje *Y*.

9. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje *X*, el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x \operatorname{sen} x}$ y el eje de abscisas en el intervalo [0, π].

10. a) Calcula por integración el volumen de un paraboloide de altura *a* y radio de la base *R*.

b) Calcula el área del recinto plano limitado por una parábola y una cuerda de la parábola de longitud 2*L* perpendicular a su eje y a una distancia *d* del vértice.