Soluciones propuesta A

1. El dominio $D(f) = \{x \in \mathbf{R},\ x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.

2. La función es composición del valor absoluto y funciones polinómicas; por tanto, es continua en todo **R** y derivable excepto, quizás, en $x = 0$ y en $x = 3$, valores que anulan el polinomio afectado por el valor absoluto.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3+3x^2+5x}{x} = 5$$

En $x = 3$ se estudian las derivadas laterales.

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{-x^3+3x^2+5x-15}{x-3} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(5-x^2)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(5-x^2) = -4$$

$$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+5x-15}{x-3} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+5)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x^2+5) = 14$$

Por tanto, f es derivable en $\mathbf{R} - \{3\}$.

3. $m = f'(a) \Rightarrow 3 = 2a - 5 \Rightarrow a = 4$

$f(a) = f(4) = 2$. El punto de tangencia es (4, 2) y la recta tangente $y - 2 = 3(x-4)$.

4. La función $f(x)$ es continua y derivable porque es polinómica, por tanto, existe $c \in [1, 3]$ tal que $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{36-4}{2} = 16 = f'(c) = 6c + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 2 \in (1, 3)$

5. La función debe ser continua en $[k, 1]$ y derivable en $(k, 1)$. Basta con estudiar en $x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow 3 = n$

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 0 = m$

Además $f(k) = f(1) \Rightarrow 3k^2 + 3 = 4 \Rightarrow k = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

El valor de c que verifica la tesis es $c = 0$, ya que $0 \in \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 1\right)$ y $f'(0) = 0$.

6. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \frac{a}{-2} = 1 + b$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow \frac{-a}{4} = 2 \Rightarrow a = -8$, $b = 3$

$\frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{7-2}{3} = \frac{5}{3} = f'(c)$.

Hay dos posibilidades: $\frac{5}{3} = \frac{8}{(c-3)^2} \Rightarrow c = 3 \pm \sqrt{\frac{24}{5}}$

Pero solo $c = 3 - \sqrt{\frac{24}{5}} \in (-1, 1)$

De la otra posibilidad, $\frac{5}{3} = 2c \Rightarrow c = \frac{5}{6} \notin (1, 2)$

7. a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-4x^2-12x}{x^2-6x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-8x-12}{2x-6} = 2$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}-e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}-e^{x}-1}{2e^{2x}} = -1$

c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2e^x(e^x-1)} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2e^x(e^x-1)+2e^xe^x} = \frac{1}{2}$

8. $S = \frac{r^2\alpha}{2}$. Pero $2r + \alpha r = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4-2r}{r}$

$S = \frac{1}{2}r^2\frac{4-2r}{r} = 2r - r^2 \Rightarrow S' = 2 - 2r$

El dominio de la función es (0, 2) y la derivada se anula para $r = 1$ y $S''(1) < 0$, por lo que hay un máximo relativo para $r = 1$ y $\alpha = 2$.

9. El dominio es $D(f) = [0, 32]$ ya que no puede haber una producción negativa. La derivada es $Q'(x) = 3(x+1)(21-x)$, que se anula para $x = 21 \in D(f)$. Como $Q(0) = 32$, $Q(21) = 5324$ y $Q(32) = 0$, la máxima producción es 5324 kg y se consigue a 21 ºC.

10. a) $D(f) = (0, +\infty)$

$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$

$f''(x) = \frac{-4+3x}{x^3}$

	0 → $\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$ → $+\infty$
f''	–	+
f	∩	∪

Punto de inflexión: $\frac{4}{3}$

b) $D(f) = \mathbf{R}$

$f'(x) = \frac{2x-x^2-1}{e^x}$

$f''(x) = \frac{x^2-4x+3}{e^x}$

	$-\infty$ → 1	1 → 3	3 → $+\infty$
f''	+		+
f	∪	∩	∪

Ptos. de inflexión:1, 3

11. a) $D(f) = (0, +\infty)$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

	0 → e	e → $+\infty$
f'	+	–
f	crece	decrece

Máximo relativo: e

b) $D(f) = \mathbf{R}$

$f(x) = \sqrt{x^2-2x+5}$

$f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

	$-\infty$ → 1	1 → $+\infty$
f'	–	+
f	decrece	crece

Mínimo relativo: 1

Soluciones propuesta B

1. El dominio, $D(f) = \{x \in \mathbf{R},\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$, está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.

2. Para que sea derivable ha de ser continua.
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2k - 4 = 2 \Rightarrow k = 3$
Para $k = 3$, $f'(2^-) = -1$ y $f'(2^+) = 0$, f no es derivable en $x = 2 \Rightarrow$ no tiene tangente.

3. Las tangentes en el punto $A(a, f(a))$ tienen una pendiente $m = f'(a) = 2a$, luego su ecuación es $y = 2a(x - 1)$ ya que pasa por el punto (1, 0). La intersección de la tangente con la curva tiene que ser un único punto.
$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2a(x-1) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2ax + 2(a+1) = 0$. Como la solución es doble, el discriminante es cero: $4a^2 - 8(a+1) = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$

Para $a = 1 + \sqrt{3}$, el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente,
$A(1+\sqrt{3},\ 6+2\sqrt{3})$ e $y = \left(2+2\sqrt{3}\right)(x-1)$.

Para $a = 1 - \sqrt{3}$ el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente,
$A(1-\sqrt{3},\ 6-2\sqrt{3})$ e $y = \left(2-2\sqrt{3}\right)(x-1)$.

4. La ecuación será $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 4a - 2b + c = 7 \end{cases}$

se obtiene $f(x) = x^2 - x + 1$.

$\frac{3-1}{2-0} = f'(c) \Rightarrow 1 = 2c - 1 \Rightarrow c = 1 \in (0,\ 2)$

5. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = a + 4 \Rightarrow a = -1$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 3 = -2 + b \Rightarrow b = 5$

$f(-2) = f(k) \Rightarrow -6 = -k^2 + 5(k-1) + 4 \Rightarrow k = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$

$f'(c) = 0 \Rightarrow -2c + 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in \left(-2,\ \frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)$

6. Si se considera la función $f(x) = 2x^5 + x + p$ cuya derivada, $f'(x) = 10x^4 + 1 > 0\ \ \forall x$, indica que es monótona creciente. Como
$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2x^5 + x + p\right) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2x^5 + x + p\right) = +\infty$, la función corta solo una vez al eje de abscisas.

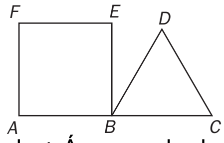
7. a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{3x^2 + 6x} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{3x^2 + 8x + 4}{6x + 6} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \operatorname{sen} 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sec^2 2x - 1}{1 - 2\cos 2x} = -1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln \frac{a}{b}$

8. Llamando $x = BC$,
$AB = a - x$
Lado del cuadrado:
$l = a - x$



Área total = Área triángulo + Área cuadrado:
$S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + (a - x)^2$, con $D = (0,\ a)$

$S' = \frac{\sqrt{3}}{2} x - 2(a - x) = 0 \Rightarrow x_a = \frac{4a}{4+\sqrt{3}}$. Como

$S(0) = a^2 > S(a) = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} > S(x_a) = \frac{4\sqrt{3}+9}{(4+\sqrt{3})^2} a^2$

Área mínima: $AB = \frac{\sqrt{3}a}{4+\sqrt{3}}$, $BC = \frac{4a}{4+\sqrt{3}}$

9. Punto genérico de r: $A(1-2k,\ -2+k,\ 2+2k)$.
Hay que minimizar
$d(k) = \left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{(-1-2k)^2 + (-3+k)^2 + (-4+2k)^2}$

$d'(k) = \frac{9(k-1)}{\sqrt{9k^2 - 18k + 26}} = 0 \Rightarrow k = 1$, que da el mínimo de $d(k)$: $d(P, r) = \sqrt{17}$ y $A(-1,\ -1,\ 4)$.

10. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 5)^2}}$

$f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2 - 2x + 5)^3}} > 0\ \ \forall x \in \mathbf{R}$

f no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia arriba ($\cup$) en todo **R**.

b) $D(f) = (0,\ +\infty)$

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

$f''(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$

	$-\infty$ $\sqrt{e^3}$	$+\infty$
f''	–	+
f	$\cap$	$\cup$

Inflexión: $\sqrt{e^3}$

11. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{-(x-1)^2}{e^x} \le 0\ \ \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ siempre decrece y no tiene extremos relativos.

b) $D(f) = (0,\ +\infty)$

$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$

	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
f'	+	–	+
f	crece	decrece	crece

Máximo relativo: 1
Mínimo relativo: 2