11 Funciones derivables

Propuesta A

1. La función $f(x)=\sqrt{\ln(\cos x)}$ existe para infinitos valores de *x*, pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?

2. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\left|x^3-3x^2\right|+5x-3$ haciendo un estudio especial en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.

3. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y=x^2-5x+6$ que sea paralela a la recta de ecuación $3x-y+1=0$. ¿Cuál es el punto de tangencia?

4. Dada la función $f(x)=3x^2+4x-3$, halla el valor medio establecido por el teorema de Lagrange en el intervalo [1, 3].

5. Calcula el valor de *m, n* y *k*, con $k < 0$, para que la función $f(x)=\begin{cases}3x^2+3 & \text{si } x\le 0\\ x^3+mx+n & \text{si } x>0\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [*k*, 1] y determina el valor $x = c$ que verifica la tesis del teorema.

6. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x-3} & \text{si } x<1\\ x^2+b & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [–1, 2] y halla el valor intermedio correspondiente.

7. Calcula los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3-4x^2-12x}{x^2-6x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\cos x}{1-\cos^2 x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^{2x}-e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}$

8. De todos los sectores circulares de perímetro 4, determina la amplitud y el radio del que tiene área máxima.

9. La producción de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura del mismo, según la expresión $Q(x)=(x+1)^2(32-x)$ en donde *x* representa la temperatura en ºC y *Q*(*x*) la producción de hortalizas en kg. Se prevé que la temperatura no pueda bajar de 0 ºC para evitar las heladas.

a) ¿Cuál deberá ser la temperatura óptima del invernadero para obtener la mayor cantidad de hortalizas?

b) ¿Qué cantidad de hortalizas se obtendrá en este último caso?

10. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x)=x-\dfrac{2}{x}-3\ln x$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$

11. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

Propuesta B

1. La función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$ existe para infinitos valores de *x*, pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?

2. Determina el valor de *k* para que la función $f(x) = \begin{cases} kx - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x^3 - 3x^2 + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea derivable en *x* = 2 y, si fuera posible, calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en ese punto.

3. Desde el punto *P*(1, 0) se trazan las tangentes a la curva de ecuación $y = x^2 + 2$. Determina los puntos de tangencia y las ecuaciones de dichas tangentes.

4. Determina la ecuación de la parábola que pasa por los puntos *A*(0, 1), *B*(2, 3) y *C*(–2, 7) y halla un punto en el segmento de parábola de extremos *A* y *B* en el que la tangente a la curva sea paralela a la cuerda determinada por *A* y *B.*

5. Calcula el valor de *a, b* y *k*, con *k* > 1, para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 + b(x-1) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, *k*] y determina el valor *x* = *c* que verifica la tesis del teorema.

6. Demuestra que para cualquier número real *p,* la ecuación $2x^5 + x + p = 0$ tiene una y solamente una solución real.

7. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{3x^2 + 6x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \operatorname{sen} 2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

8. Dado un segmento $\overline{AC} = a$, divídelo en dos partes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de modo que construyendo un cuadrado *ABED* sobre $\overline{AB}$ y un triángulo equilátero *BCF* sobre $\overline{BC}$ la suma de sus áreas sea mínima.

9. Halla, utilizando métodos de optimización de funciones, la distancia del punto *P*(2, 1, 6) a la recta de ecuación $r: \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -2 + k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$. Determina el punto de la recta más próximo al punto *P.*

10. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

11. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$

b) $f(x) = x - \dfrac{2}{x} - 3\ln x$