10 Derivadas

Propuesta A

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=x^2-4$ en los intervalos $[0,\ 2]$ y [*a*, *a* + *h*].

2. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x)=x^3+1$ en $x=-1$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ en $x=-2$ c) $f(x)=\sqrt{x+2}$ en $x=2$

3. Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas? ¿Cuál es su ecuación?

a) $f(x)=x^2+x-1$ en $x=1$ b) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ en $x=-1$

4. Dadas dos funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) de las que se conoce *f*(2) = 3, *g*(2) = –1, $g'(-1)=-3$, $g'(2)=0$, $g'(3)=5$, $f'(-1)=2$ y $f'(2)=4$, calcula:

a) $(f+g)'(-1)$ b) $(f\cdot g)'(2)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$ d) $(f\circ g)'(2)$ e) $(g\circ f)'(2)$

5. Halla los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea continua y derivable en *x* = 0.

6. Si $f(x)=\dfrac{1}{2x}$, $g(x)=\sqrt{x+1}$, $h(x)=x^2$, calcula:

a) $(g\circ h)'(2)$ b) $(h\circ g\circ f)'(1)$ c) $(f\circ h\circ g)'(4)$ d) $(g\circ f\circ h)'(x)$

7. Se considera la función $f(x)=x^3+x-11$. Calcula la derivada de la función inversa de *f*(*x*) en *x* = –9.

8. Halla la función derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $a(x)=\text{sen}^2(x)$ c) $c(x)=\arccos^2(x)$ e) $e(x)=\text{tg}(2x)$

b) $b(x)=\text{arc sen}(2x)$ d) $d(x)=\arccos\left(x^2\right)$ f) $f(x)=\text{tg}\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

9. Calcula la derivada de las funciones:

a) $a(x)=\ln(x\cdot\cos x)$ c) $c(x)=\cos(x\cdot\ln x)$ e) $e(x)=x\cdot e^x$ g) $g(x)=2^x\cdot x^2$

b) $b(x)=\ln x\cdot\cos x$ d) $d(x)=e^{2x}$ f) $f(x)=e^{\ln x}$ h) $h(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

10. La posición respecto del origen, en metros, de un móvil viene dada por la función $s(t)=3t^2-1$, donde el tiempo *t* viene dado en segundos.

a) Halla la velocidad media del móvil en el intervalo temporal [1, 4].

b) Obtén la velocidad instantánea para *t* = 2 segundos.

11. Teniendo en cuenta que ln(50) ≈ 3,912, calcula mediante aproximación con diferenciales ln(54), ln(46) y ln(40). Compara los resultados obtenidos con los que se obtienen con la calculadora y halla el error relativo que se comete en cada caso. ¿Por qué se comete más error en unos casos que en otros?

12. Se tiene un globo esférico de radio *r* = 2 m. Por efecto de la dilatación de los gases que contiene, su radio aumenta un *dr* = 3 cm. ¿Cuánto ha aumentado su volumen?

Propuesta B

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=x^3$ en los intervalos [–3, 1] y [*a*, *a* + *h*].

2. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indica.

a) $f(x)=x^2-1$ en $x = 3$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ en $x = -2$ c) $f(x)=\sqrt{x}$ en $x = 1$

3. Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje de abscisas? Halla la ecuación de la normal.

a) $f(x)=3x+2$ en $x = 2$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en $x = 0$

4. Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de las que se conoce $f(2) = g(2) = 1$, $g'(1)=-\dfrac{3}{4}$, $g'(2)=-\dfrac{1}{3}$, $f'(1)=2$ y $f'(2)=4$, calcula:

a) $(f+g)'(1)$ b) $(f\cdot g)'(2)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$ d) $(f\circ g)'(2)$ e) $(g\circ f)'(2)$

5. Halla los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1 & \text{si } x\le 1 \\ 2bx-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo **R**.

6. Si $f^{-1}(x)=x\cdot e^x$ en (0, +∞), calcula la derivada de la función $f(x)$ en $x = \ln 4$, es decir, $f'(\ln 4)$, y la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en ese punto.

7. Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $a(x)=\cos^2(x)$ c) $c(x)=\cos(2x)\,\text{tg}(2x)$ e) $e(x)=\text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $b(x)=\text{arcsen}(x^2)$ d) $d(x)=\sec^2 x$ f) $f(x)=\text{arctg}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

8. Calcula la derivada de las funciones:

a) $a(x)=5^{2x}$ c) $c(x)=\ln(e^x)$ e) $e(x)=\text{arctg}\left(\sqrt{x}\right)$ g) $g(x)=\log\left(\dfrac{1}{x^2-3x}\right)$

b) $b(x)=(x-1)e^x$ d) $d(x)=3^x\cdot x^3$ f) $f(x)=\ln\sqrt{x}$ h) $h(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,x}}$

9. La curva de ecuación $x^3+3x^2y+y^2+28=0$ pasa por el punto (–2, –2). Calcula la derivada de la función *y* en ese punto. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la curva en ese punto?

10. Halla la derivada de las funciones siguientes aplicando la derivación logarítmica.

a) $f(x)=\sqrt[x]{5-4x}$ b) $g(x)=(3x+1)^{2x}$

11. Halla la función diferencial de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{-7x+4}{x+5}$ b) $x=A\,\text{sen}(\omega t+\phi_0)$

12. Utiliza diferenciales para aproximar el valor de $3{,}001^5 - 4\cdot 3{,}001^3 - 3\cdot 3{,}001$ y compara el resultado con el número obtenido directamente con la calculadora.