# Soluciones propuesta A

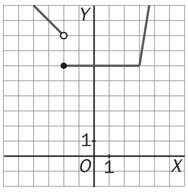
**1.** El dominio es $D(f) = \mathbf{R} - \{3\}$.

Como $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-3)} = 4$,
en $x = 3$ hay límite; la función tiene una discontinuidad evitable y $f(3) = 4$ es su verdadero valor.

**2.** Para $x \neq -2$ y $x \neq 3$, la función es continua al estar definida por polinomios. Falta estudiar lo que ocurre en $x = -2$ y en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (6 - x) = 8$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (6) = 6$




En x = –2 hay una discontinuidad inevitable de salto finito igual a

6 – 8 = = –2.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (6) = 6$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3) = 6$

En $x = 3$ la función es continua.

**3.** Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 1$, ya que fuera de este punto es continua al estar definida por polinomios.

Como $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax - 1) = a - 1$ y

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^3 - 1) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

**4.** Para ser continua, los límites laterales en $x = 0$ y en $x = 2$ han de coincidir.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow 2 = \sqrt{b} \Rightarrow b = 4$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow \sqrt{2a + 4} = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2a + 4} = \sqrt{2} \Rightarrow a = -1$.

**5.** El verdadero valor debe coincidir con el límite de la función en ese punto.

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+9} - 3} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+9} + 3\right)}{x\left(\sqrt{x+1} + 1\right)} = \frac{\sqrt{9} + 3}{\sqrt{1} + 1} = 3$$

**6.** a) $f(0) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$

En $x = 0$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$. Es continua en $x = 1$ ya que $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

$f(3) = 5$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 7$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 5$

Es discontinua en $x = 3$ con una discontinuidad inevitable de salto finito.

**7.** El dominio de la función es $D(f) = [2, 6) \cup (6, +\infty)$, por lo que hay que estudiar su límite en $x = 6$.

$$\lim_{x \to 6} \left( \frac{x - 6}{2 - \sqrt{x - 2}} \right) = \lim_{x \to 6} \frac{(x - 6)(2 + \sqrt{x - 2})}{6 - x} = -4$$

Como tiene límite, la discontinuidad es evitable y su verdadero valor es $f(6) = -4$. Así, la función es continua en el intervalo $[2, +\infty)$.

**8.** La función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ es continua y tiene distinto signo en los extremos de $[-1, 3]$, ya que $f(-1) = -6 < 0$ y $f(3) = 14 > 0$. Por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c \in (-1, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

Este razonamiento no es válido para la función $g$, ya que no es continua en el intervalo $[-1, 3]$ puesto que no está definida en $x = 2$; sin embargo, se puede observar directamente que la función corta al eje de abscisas:

$$0 = \frac{x^3 - 2}{x - 2} \Rightarrow x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \in [-1, 3]$$

**9.** Se estudia la continuidad de la función en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 - 1\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x - 1) = -1, \quad f(0) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ continua en $[-2, 2] \Rightarrow f$ acotada. Por el teorema de Weierstrass $f$ alcanza en dicho intervalo su máximo y su mínimo absolutos.

Como la función decrece en $(-2, 0)$ y crece en $(0, 2)$, basta con hallar $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$.

$f(-2) = 3$, $f(0) = -1$ y $f(2) = 3$, por lo que el máximo es 3 y se alcanza en los extremos del intervalo. El mínimo, –1, se da en $x = 0$.

**10.** Se estudia la función en los valores que anulan el denominador: $|x| - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{-x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{-x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$

$f$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$ con una discontinuidad inevitable de salto infinito.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-x-1} = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

**11.** Si se cortan $\Rightarrow \exists c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = g(c)$.

Se construye la función $F(x) = f(x) - g(x)$ que es continua en el intervalo $[0, 2]$ y además $F(0) = -4 < 0$ y $F(2) = 8 > 0$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in (0, 2)$ que anulará la función, $F$, es decir $F(c) = f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$.

# Soluciones propuesta B

**1.** El dominio de $f$ es $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 2\}$.

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable, pues:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

El verdadero valor es $f(2) = \dfrac{5}{3}$.

En $x = -1$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1^-}\frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1^-}\frac{x+3}{x+1} = -\infty$$

**2.** La función es continua en $\mathbf{R} - \{a, b, c, d\}$.

$x = a$: discontinuidad inevitable de salto finito.

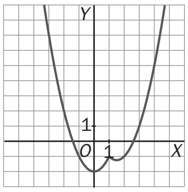
$x = b$: discontinuidad evitable ya que los límites laterales coinciden pero son distintos de $f(b)$.

$x = c$, $x = d$: discontinuidades inevitables de salto infinito.

**3.** Para $x \neq 1$, $f$ es continua pues está definida por polinomios. Para $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2-2) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2-3x+1)$$




Como $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = -1$, la función es continua en $\mathbf{R}$.

**4.** Para que la función sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 2$;

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+a-1) = 3+3a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\ln(x-1) = \ln 1 = 0\end{array}\right. \Rightarrow a = -1$$

**5.** Para que la función sea continua en todo $\mathbf{R}$, ha de ser continua en $x = 0$ y en $x = 3$,

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+ax+b) = b = 0\end{array}\right. \Rightarrow b = 0$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2+ax) = 9+3a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+9) = 12\end{array}\right. \Rightarrow a = 1$$

**6.** El verdadero valor es, si existe, el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\cos x}{\operatorname{sen} x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\cos x(1+\cos x) = 2$$

Luego el verdadero valor es $f(0) = 2$.

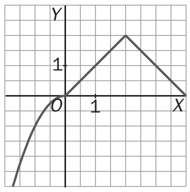
**7.** Posibles discontinuidades en $x = 1$ y $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x|x| = 1$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$; $f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x = 2$;

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(4-x) = 2$; $f(2) = 2$




Por tanto, la función es continua en todo $\mathbf{R}$.

**8.** a) Para que sea continua en $x = 1$

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

b) Para que sea continua en $x = 3$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 13;\quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 9-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 9-a \Rightarrow a = -4$$

**9.** La función es continua en su dominio, $D = \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow$ es continua en el intervalo $[1, 4]$.

Como verifica las condiciones del teorema de Weierstrass, se puede asegurar que la función está acotada en ese intervalo; sin embargo, no está acotada en el dominio, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+1}{e^x-1} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{e^x-1} = +\infty.$$

La función $f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$ es continua en toda la recta real y como $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-e^x}{1+e^x} = 1$

y $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow f$ está acotada.

**10.** Se considera la función continua en toda la recta real $f(x) = 2^x - 4x$, y como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -2 < 0$, por el teorema de Bolzano se puede asegurar que $\exists c \in (0, 1)$ que verifica $f(c) = 0$, es decir, $x = c$ es una solución de la ecuación $2^x - 4x = 0$. Además, $x = 4$ es otra solución porque $2^4 - 4\cdot 4 = 0$.

**11.** $\forall y_0 \in (0, 3)$ se construye $g(x) = f(x) - y_0$, que es continua. $g(-1) = f(-1) - y_0 = 0 - y_0 < 0$;

$g(2) = f(2) - y_0 = 3 - y_0 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (-1, 2) \,/\, g(x_0) = 0$

$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$

Además, $f(-1) = 0$ y $f(2) = 3$.