9 Rectas y ángulos

El nacimiento de un signo

Desde que María Tudor había subido al trono, Robert Recorde vivía atemorizado de que alguna denuncia lo llevara a la cárcel, cuando no a la hoguera.

Robert Recorde había desempeñado importantes cargos cuando reinó Eduardo, el hermanastro de María, y aunque continuaba teniendo un buen cargo, sentía que sus enemigos eran ahora muy poderosos.

Sus cavilaciones cesaron cuando abrió la puerta de la imprenta donde trabajaban en su última creación: *La piedra de afilar el ingenio*. El artesano que imprimía el libro se levantó para saludarlo:

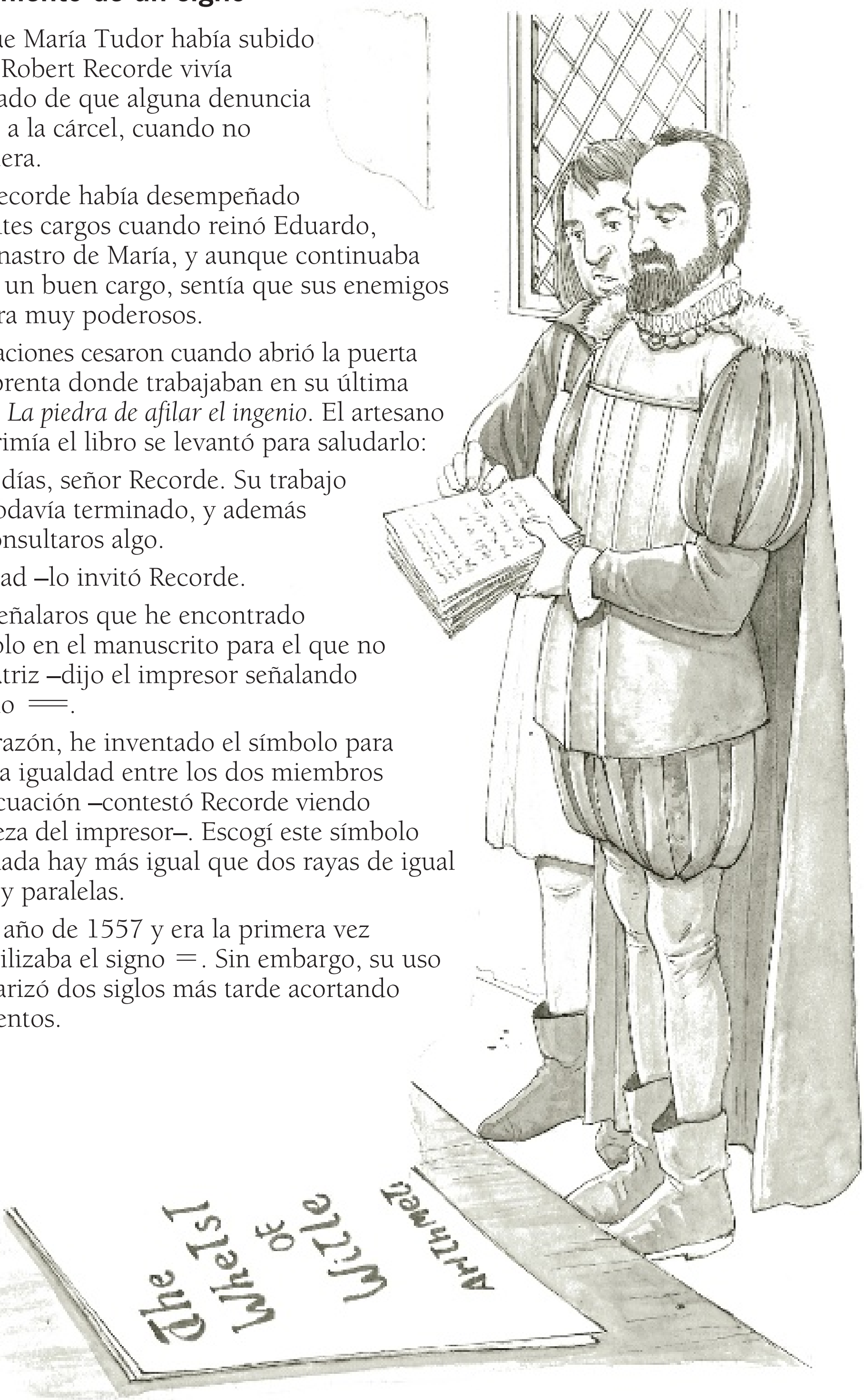
–Buenos días, señor Recorde. Su trabajo no está todavía terminado, y además quería consultaros algo.

–Preguntad –lo invitó Recorde.

–He de señalaros que he encontrado un símbolo en el manuscrito para el que no tengo matriz –dijo el impresor señalando el símbolo $=\!\!=$.

–Tenéis razón, he inventado el símbolo para denotar la igualdad entre los dos miembros de una ecuación –contestó Recorde viendo la extrañeza del impresor–. Escogí este símbolo porque nada hay más igual que dos rayas de igual longitud y paralelas.

Corría el año de 1557 y era la primera vez que se utilizaba el signo $=$. Sin embargo, su uso se popularizó dos siglos más tarde acortando los segmentos.



DESCUBRE LA HISTORIA...

1 **Robert Recorde nació en Gales en el seno de una familia acomodada. Busca información sobre su vida y su relación con la corte.**

Una pequeña reseña sobre la biografía de Robert Recorde la puedes encontrar en:

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/r/recorde.htm

Una biografía más extensa se encuentra en este enlace inglés:

http://www.100welshheroes.com/en/biography/robertrecorde

2 **¿Qué símbolo utiliza Recorde para expresar la igualdad? ¿Por qué eligió este signo?**

En esta página aparecen múltiples curiosidades sobre el mundo de las matemáticas, la número 15 habla de Robert Recorde:

http://www.elrincondenorbert.com/2008/05/curiosidades-matematicas.html

3 **¿Cuál se considera la principal contribución de Robert Recorde al estudio de las matemáticas?**

Una relación sobre las aportaciones a las matemáticas de Robert Recorde aparece en esta página:

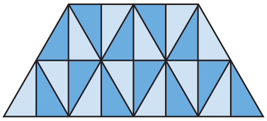
http://es.wikipedia.org/wiki/Robert_Recorde

También se pueden consultar sus aportaciones en esta página inglesa:

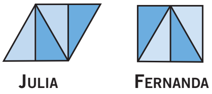
http://www.bbc.co.uk/dna/h2g2/alabaster/A7269690

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Considera esta figura:**



Si las unidades de medida de Julia y Fernanda son:



¿Qué medida ha obtenido cada una de ellas?

JULIA: 24 : 4 = 6 unidades FERNANDA 24 : 4 = 6 unidades

2 **Completa las siguientes igualdades con las unidades adecuadas.**

a) 512,4 D = 5,124 □ = 5 124 □ b) 13,18 C = 0,1318 □ = 131,8 □

a) 512,4 D = 5,124 UM = 5 124 U b) 13,18 C = 0,1318 DM = 131,8 D

3 **Expresa en litros. a) 4,25 kl 3,27 hl 4,81 dl b) 13,4 dal 21,5 ℓ 7,25 dl**

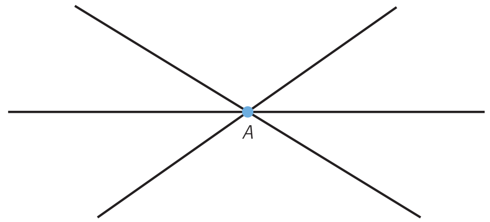
a) 4 250 + 327 + 0,481 = 4 577,481 ℓ

b) 134 + 21,5 + 0,725 = 156,225 ℓ

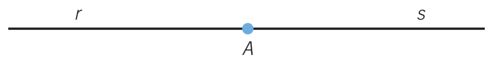
Rectas y ángulos

EJERCICIOS

001 **Dibuja un punto en tu cuaderno y traza tres líneas rectas que lo contengan.**

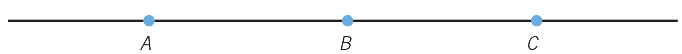


002 **Traza una recta en tu cuaderno, sitúa un punto sobre ella y nombra las dos semirrectas que resultan.**



003 **Dibuja un segmento de 5 cm de longitud y nómbralo señalando sus extremos.**

004 **Traza una recta, marca tres puntos y señala cuántas semirrectas y segmentos se forman. Márcalos con distintos colores y nómbralos.**

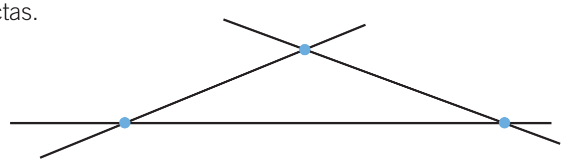


Hay seis semirrectas, ya que cada punto da lugar a dos semirrectas.
Se forman tres segmentos: *AB*, *BC* y *AC*.

005 **¿Cuántas rectas puedes dibujar que pasen por dos de los tres puntos?**

a) **b)** 

a) Una sola recta, porque los puntos están alineados.
b) Tres rectas.

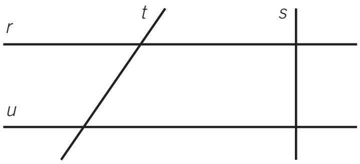


006 **Estudia la posición relativa de las rectas que se determinan en estos casos.**

a) Las vías del tren.
b) Las tres calles que convergen en una rotonda.
c) Los bordes de los peldaños de una escalera.
d) El largo y el ancho de una ventana.
e) Los radios de la rueda de una bicicleta.
f) Las huellas de un trineo en la nieve.

a) Paralelas.
b) Secantes.
c) Paralelas.
d) Perpendiculares.
e) Secantes.
f) Paralelas.

007 Clasifica las siguientes rectas.



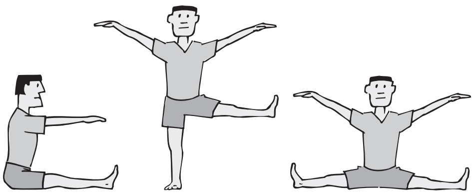
a) ***r*** **y** ***s***
b) ***r*** **y** ***t***
c) ***u*** **y** ***t***
d) ***r*** **y** ***u***

a) Rectas perpendiculares.
b) Rectas secantes.
c) Rectas secantes.
d) Rectas paralelas.

008 ¿Cuántas rectas perpendiculares a una recta dada puedes trazar? ¿Y paralelas?

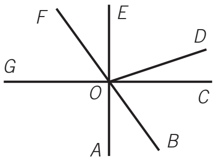
A una recta dada se le pueden trazar infinitas rectas perpendiculares e infinitas rectas paralelas.

009 Señala el nombre de los ángulos que forman las piernas de los gimnastas.



Ángulo nulo. Ángulo recto. Ángulo llano.

010 Indica en esta figura cuáles son los ángulos agudos, rectos y obtusos.



Denominamos O al punto de corte de las rectas.

Ángulos agudos: $\widehat{COD}$; $\widehat{DOE}$; $\widehat{EOF}$; $\widehat{FOG}$; $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$.

Ángulos rectos: $\widehat{COE}$; $\widehat{EOG}$; $\widehat{GOA}$ y $\widehat{AOC}$.

Ángulos obtusos: todos los demás, por ejemplo, $\widehat{COF}$; $\widehat{DOF}$; $\widehat{DOG}$; $\widehat{EOB}$ y $\widehat{FOD}$.

011 Las esquinas de tu clase forman ángulos. ¿De qué tipo son? Pon un ejemplo real con los diferentes tipos de ángulos.

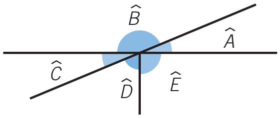
Las esquinas de la clase forman ángulos rectos.

Dos radios consecutivos de una bicicleta forman un ángulo agudo.

Las agujas de un reloj, marcando las doce y veinte, forman un ángulo obtuso.

Rectas y ángulos

012 **Observa la figura.**



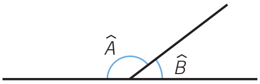
a) Indica qué ángulos son opuestos por los vértices.

b) Señala los ángulos adyacentes.

a) Ángulos opuestos por el vértice: $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$.

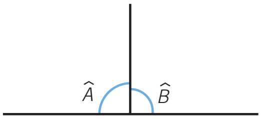
b) Ángulos adyacentes: $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ y $\widehat{B}$.

013 **Observa los siguientes ángulos y contesta.**
¿Son adyacentes $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$? ¿Y suplementarios?



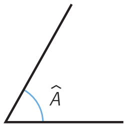
Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son adyacentes y suplementarios.

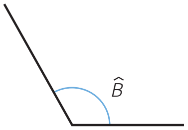
014 **¿Cómo tienen que ser los lados de dos ángulos adyacentes para que sean iguales?**



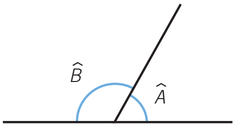
Los lados tienen que ser perpendiculares.

015 **Suma estos ángulos:**

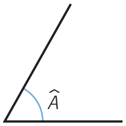


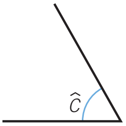


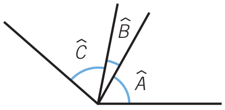
Puedes usar la regla y el compás para dibujarlos en tu cuaderno.



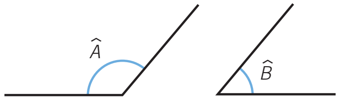
016 **Suma en tu cuaderno los ángulos.**







017 **Dibuja dos ángulos suplementarios.**

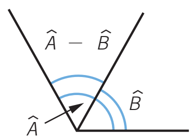


$\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son suplementarios.

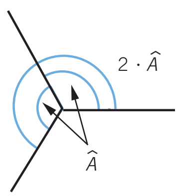
018 **Dibuja estos ángulos en tu cuaderno, y realiza las operaciones que se indican.**

a) $\widehat{A} - \widehat{B}$ **b)** $2 \cdot \widehat{A}$ **c)** $2 \cdot (\widehat{A} - \widehat{B})$

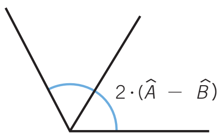
a)



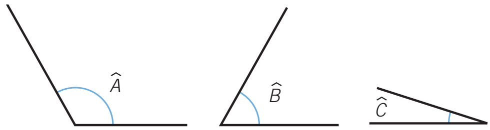
b)

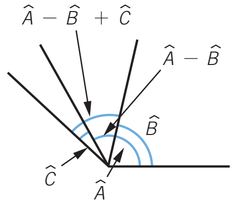


c)



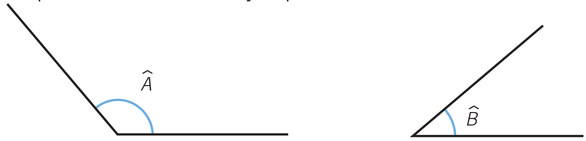
019 **Dibuja en tu cuaderno estos ángulos y halla** $\widehat{A} - \widehat{B} + \widehat{C}$.





020 **Dibuja dos ángulos** $\widehat{A}$ **y** $\widehat{B}$, **tales que** $\widehat{A} - \widehat{B}$ **sea un ángulo recto.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



021 **Expresa en minutos.**

a) 90° **b)** 45° **c)** 150° **d)** 75° **e)** 280° **f)** 140°

¿Cuántos segundos son?

a) $90° = 5\,400' = 324\,000''$
b) $45° = 2\,700' = 162\,000''$
c) $150° = 9\,000' = 540\,000''$
d) $75° = 4\,050' = 270\,000''$
e) $280° = 16\,800' = 1\,008\,000''$
f) $140° = 8\,400' = 504\,000''$

Rectas y ángulos

022 **Expresa en segundos.**

a) 2° 3′ 40″ **b) 3° 42″**

a) $2 \cdot 3\,600 + 3 \cdot 60 + 40 = 7\,420''$

b) $3 \cdot 3\,600 + 42 = 10\,842''$

023 **Expresa en forma compleja estas medidas de ángulos.**

a) 14 824″ **b) 832′** **c) 18,5°** **d) 24,8′**

a) $4°\ 7'\ 4''$

b) $13°\ 52'$

c) $18{,}5° = 1\,110' = 18°\ 30'$

d) $24{,}8' = 1\,488'' = 24'\ 48''$

024 **Un ángulo mide 2 710″ y otro mide 1 506″. ¿Cuántos grados, minutos y segundos mide más el primero que el segundo?**

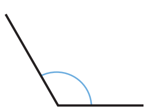
$2\,710 - 1\,506 = 1\,204''$

$1\,204'' = 20'\ 4''$

El primero mide más que el segundo 20′ 4″.

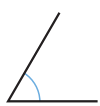
025 **Mide con tu transportador estos ángulos.**

a)



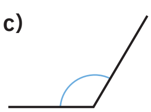
120°

b)



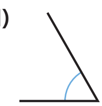
60°

c)



120°

d)

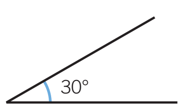


60°

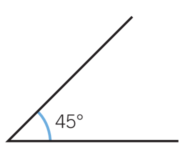
026 **Dibuja estos ángulos.**

a) 30° **b) 45°** **c) 160°** **d) 180°**

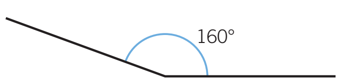
a)



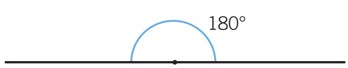
b)



c)



d)

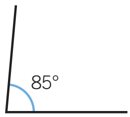


027 **Dibuja.**

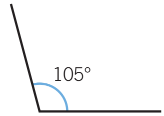
a) Un ángulo agudo mayor de 80°. **b) Un ángulo obtuso menor de 100°.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a)

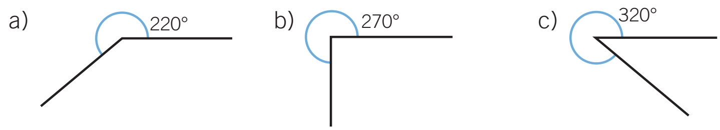


b)



028 **Dibuja los siguientes ángulos.**

a) 220° **b) 270°** **c) 320°**



029 **Realiza esta operación y simplifica.**

$$\begin{array}{r} \mathbf{32° \; 39' \; 48''} \\ + \; \mathbf{45° \; 34' \; 33''} \\ \hline 77° \; 73' \; 81'' \end{array} \quad \boxed{81'' = 1' \; 21''} \quad \boxed{74' = 1° \; 14'}$$

$$32° \; 39' \; 48'' + 45° \; 34' \; 33'' = 78° \; 14' \; 21''$$

030 **Haz la siguiente suma:**

$$\begin{array}{r} \mathbf{32° \; 41' \; 40''} \\ + \; \mathbf{15° \; 18'} \\ \hline 47° \; 59' \; 40'' \end{array}$$

$$32° \; 41' \; 40'' + 15° \; 18' = 47° \; 59' \; 40''$$

031 **Calcula la suma.**

$$\mathbf{(30° \; 40') + (15' \; 18'') + (38° \; 45'')}$$

$$\begin{array}{rrr} 30° & 40' & \\ & 15' & 18'' \\ + \; 38° & & 45'' \\ \hline 68° & 55' & 63'' \end{array} \quad \boxed{63'' = 1' \; 3''}$$

$$(30° \; 40') + (15° \; 18'') + (38° \; 45'') = 68° \; 56' \; 3''$$

032 **Un ángulo $\widehat{A}$ mide 8° 15′ 12″, otro ángulo $\widehat{B}$ mide 3° 40′, y la medida de un tercer ángulo $\widehat{C}$ es 8° 15′ 40″.**

¿Cuánto mide la suma de los tres ángulos?

$$\begin{array}{rrr} 8° & 15' & 12'' \\ 3° & 40' & \\ + \; 8° & 15' & 40'' \\ \hline 19° & 70' & 52'' \end{array} \quad \boxed{70' = 1° \; 10'}$$

$$(8° \; 15' \; 12'') + (3° \; 40') + (8° \; 15' \; 40'') = 20° \; 10' \; 52''$$

033 **Realiza la siguiente operación:**

$$\begin{array}{r} \mathbf{62° \; 39' \; 48''} \\ - \; \mathbf{45° \; 34' \; 33''} \\ \hline 17° \;\;\; 5' \; 15'' \end{array}$$

$$62° \; 39' \; 48'' - 45° \; 34' \; 33'' = 17° \; 5' \; 15''$$

034 **Haz esta resta:**

$$\begin{array}{r} \mathbf{70^\circ\ 12'\ 40''} \\ -\ \mathbf{15^\circ\ 18'} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 69^\circ\ 72'\ 40'' \\ -\ 15^\circ\ 18' \\ \hline 54^\circ\ 54'\ 40'' \end{array}$$

035 **Calcula y simplifica.**

$$\mathbf{(45^\circ\ 30'\ 49'') - (12'\ 57'') - (56'')}$$

$$\begin{array}{r} 45^\circ\ 30'\ 49'' \\ -\ \ 12'\ 57'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 45^\circ\ 29'\ 109'' \\ -\ \ 12'\ \ 57'' \\ \hline 45^\circ\ 17'\ \ 52'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45^\circ\ 17'\ 52'' \\ -\ \ 56'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 45^\circ\ 16'\ 112'' \\ -\ \ 56'' \\ \hline 45^\circ\ 16'\ \ 56'' \end{array}$$

036 **Calcula los ángulos complementarios y suplementarios del ángulo $\hat{A}$, que mide 63° 49′ 27″. ¿Son únicos esos ángulos?**

Ángulo complementario

$$\begin{array}{r} 90^\circ \\ -\ 63^\circ\ 49'\ 27'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 89^\circ\ 60' \\ -\ 63^\circ\ 49'\ 27'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 63^\circ\ 49'\ 27'' \\ \hline 26^\circ\ 10'\ 33'' \end{array}$$

Ángulo suplementario

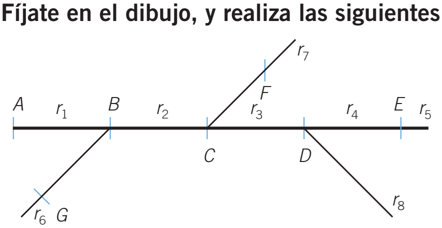
$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ -\ 63^\circ\ 49'\ 27'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 179^\circ\ 60' \\ -\ 63^\circ\ 49'\ 27'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 179^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 63^\circ\ 49'\ 27'' \\ \hline 116^\circ\ 10'\ 33'' \end{array}$$

Los ángulos complementarios de 63° 49′ 27″ son de la forma 26° 10′ 33″ $+\ k \cdot 360^\circ$, y los suplementarios, 116° 10′ 33″ $+\ k \cdot 360^\circ$, siendo $k = 1, 2, 3\ldots$

ACTIVIDADES

037 **Dibuja una línea recta en tu cuaderno, marca de rojo una semirrecta y de verde un segmento de longitud 2 cm.**

038 **Fíjate en el dibujo, y realiza las siguientes actividades.**



a) **Nombra las semirrectas.**

b) **Señala el nombre de los segmentos.**

c) **¿Qué segmentos tienen en común el extremo *D*?**

a) Hay ocho semirrectas. Ejemplo: r_1, la semirrecta de origen A y que pasa por B, r_2, la semirrecta de origen B que pasa por C, …

b) Nos encontramos con 11 segmentos. Ejemplo: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, …

c) Hay cuatro: $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{BD}$ y $\overline{AD}$.

039 ●

Observa el plano y contesta.

Si consideras las calles como líneas rectas:

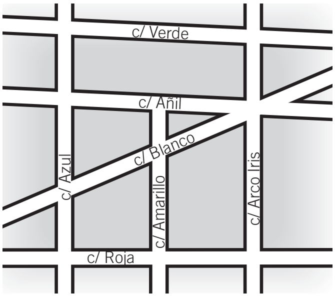
a) ¿Qué calles son paralelas a la calle Arco Iris?

b) ¿Qué calles son perpendiculares a la calle Arco Iris?

c) ¿Cuáles son secantes a la calle Arco Iris?

d) ¿Cómo son entre sí las calles Añil y Verde?

e) ¿Cómo son entre sí las calles Roja y Añil?



a) La calle Amarillo y la calle Azul.

b) La calle Roja.

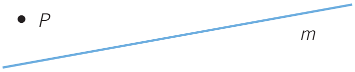
c) La calle Blanco, la calle Añil, la calle Roja y la calle Verde.

d) Son paralelas.

e) Son secantes.

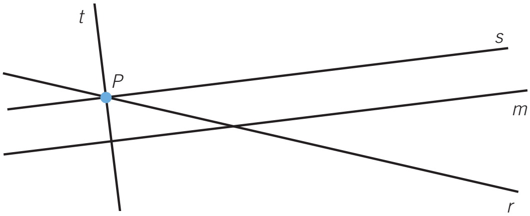
040 ●

Dibuja en tu cuaderno la recta *m* y marca un punto *P*.



Dibuja tres rectas: una paralela, una secante y otra perpendicular a la recta *m*, y haz que pasen por el punto *P*.

Clasifica, dos a dos, las rectas que has dibujado.



– Las rectas s y t son perpendiculares.

– Las rectas r y t son secantes.

– Las rectas r y s son secantes.

041 ●●

¿Cuántos puntos se necesitan, como mínimo, para definir una recta? ¿Y como máximo?

Como mínimo se necesitan dos puntos, y como máximo infinitos, porque una recta está formada por infinitos puntos alineados.

Rectas y ángulos

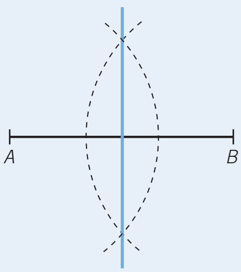
042 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE TRAZA LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO?

Dibuja un segmento *AB* de 8 cm y traza con regla y compás su mediatriz.

La **mediatriz de un segmento** es la recta que pasa por su punto medio y es perpendicular al mismo.

Para construirla se siguen estos pasos:



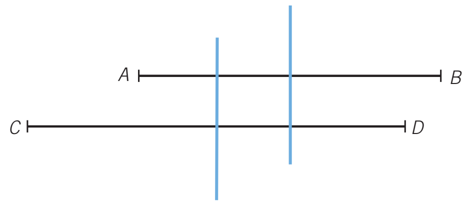
PRIMERO. Se pincha el compás en cada uno de los extremos, y con amplitud el segmento, se dibuja una circunferencia.

SEGUNDO. Se unen con una recta los puntos de intersección de las circunferencias.

Esta recta es la mediatriz del segmento *AB*.

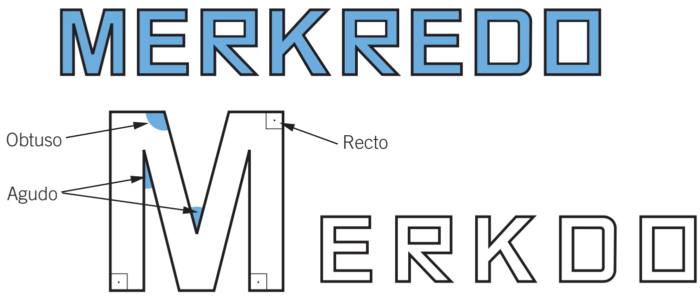
043 ●● **Dibuja dos segmentos, *AB* y *CD*, paralelos entre sí, de 8 cm y 10 cm, y traza con la escuadra sus mediatrices.**

¿Cómo son entre sí las mediatrices?



Las mediatrices de ambos segmentos son paralelas.

044 ● **Escribe estas letras en tu cuaderno, y señala de color rojo los ángulos agudos, de azul los rectos y de amarillo los obtusos.**



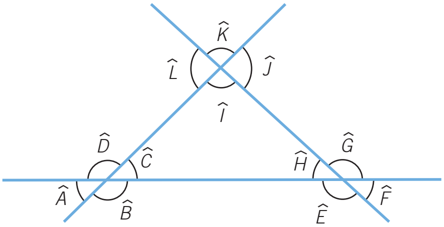
En cada vértice tenemos dos ángulos, uno exterior y otro interior, que clasificamos de forma análoga a la figura.

045 **Contesta si es verdadero o falso.**

a) Dos ángulos adyacentes son siempre consecutivos.
b) Dos ángulos consecutivos son siempre adyacentes.
c) Dos ángulos complementarios son siempre agudos.
d) Dos ángulos complementarios son siempre obtusos.
e) Dos ángulos de lados perpendiculares son iguales.
f) Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

a) Verdadero. c) Verdadero. e) Verdadero.
b) Falso. d) Falso. f) Verdadero.

046 **Observa la siguiente figura y señala.**



a) Los pares de ángulos opuestos por el vértice.
b) Los pares de ángulos adyacentes.

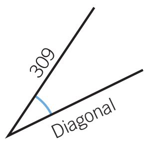
a) $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ y $\widehat{B}$, $\widehat{H}$ y $\widehat{F}$, $\widehat{E}$ y $\widehat{G}$, $\widehat{L}$ y $\widehat{J}$, $\widehat{K}$ e $\widehat{I}$

b) $\widehat{A}$ y $\widehat{D}$, $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{B}$, $\widehat{H}$ y $\widehat{G}$, $\widehat{H}$ y $\widehat{E}$, $\widehat{F}$ y $\widehat{G}$, $\widehat{F}$ y $\widehat{E}$, $\widehat{L}$ e $\widehat{I}$, $\widehat{L}$ y $\widehat{K}$, $\widehat{J}$ e $\widehat{I}$, $\widehat{J}$ y $\widehat{K}$

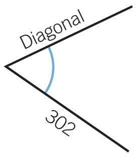
047 **Observa este plano de una zona de la ciudad de Castelldefels y dibuja los ángulos que forman.**

a) La Avinguda Diagonal con la Avinguda 309.
b) La Avinguda Diagonal con la Avinguda 310.
c) La Avinguda Diagonal con la Avinguda 302.
¿Cómo son entre sí las Avingudas 309 y 310? ¿Y las Avingudas 302 y 309?

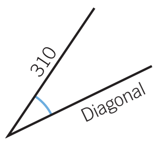
a)



c)



b)

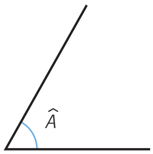


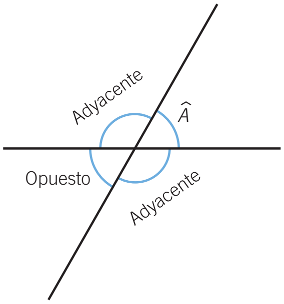
Las Avingudas 309 y 310 son paralelas.

Las Avingudas 302 y 309 son perpendiculares.

048 ●

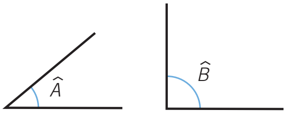
Dado el ángulo de la figura, dibújalo en tu cuaderno y construye sus ángulos adyacentes y el ángulo opuesto por el vértice.





049 ●●

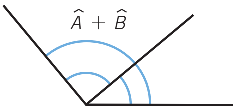
Dibuja en tu cuaderno dos ángulos como estos.



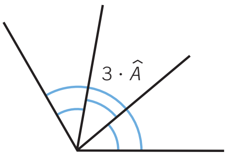
Utiliza el compás para representar las operaciones.

a) $\widehat{A} + \widehat{B}$ **b)** $\widehat{B} - \widehat{A}$ **c)** $3 \cdot \widehat{A}$ **d)** $2 \cdot \widehat{B}$

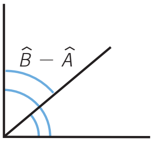
a)



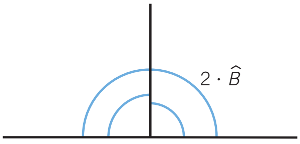
c)



b)



d)

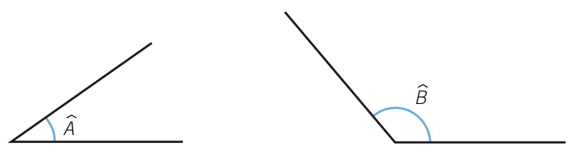


050 ●●

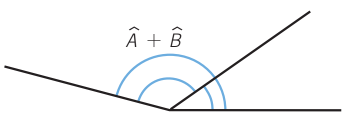
Traza en tu cuaderno un ángulo $\widehat{A}$ que sea menor que un ángulo recto, y un ángulo $\widehat{B}$ que sea menor que uno llano y mayor que uno recto. Dibuja los ángulos indicados.

a) $\widehat{A} + \widehat{B}$ **b)** $\widehat{B} - \widehat{A}$ **c)** $3 \cdot \widehat{A}$ **d)** $2 \cdot \widehat{B}$

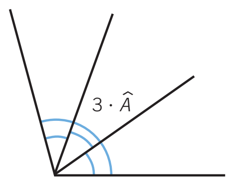
Respuesta abierta. Por ejemplo:



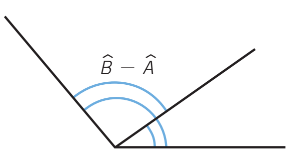
a)



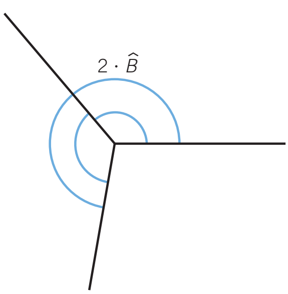
c)



b)



d)



051 ●

Expresa en minutos las medidas de ángulos.

a) 3° **b)** 10° **c)** 5° **d)** 20°

a) 180′ b) 600′ c) 300′ d) 1 200′

052 ●

Transforma en segundos estas medidas de ángulos.

a) 12′ **b)** 20′ **c)** 1° 15′ **d)** 10° 10′

a) 720″ b) 1 200″ c) 4 500″ d) 36 600″

053 ●

Expresa en grados las siguientes medidas.

a) 120′ **c)** 240′ **e)** 420′

b) 180′ **d)** 360′ **f)** 600′

a) 2° c) 4° e) 7°

b) 3° d) 6° f) 10°

Rectas y ángulos

054 Indica en segundos.

a) $35°\ 54'\ 55''$ **c)** $18°\ 23'\ 4''$ **e)** $7°\ 33'\ 49''$

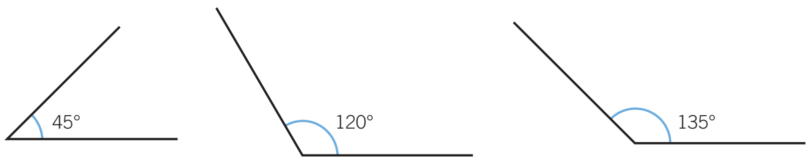
b) $65°\ 53'\ 12''$ **d)** $4°\ 27'\ 56''$ **f)** $11°\ 3'\ 2''$

a) $129\,295''$ c) $66\,184''$ e) $27\,229''$

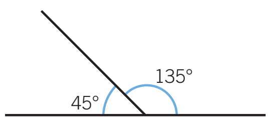
b) $237\,192''$ d) $16\,076''$ f) $39\,782''$

055 **Con la ayuda del transportador, dibuja los ángulos $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 120°$ y $\widehat{C} = 135°$. Después, dibuja y mide los ángulos.**

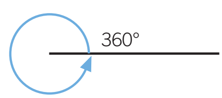
a) $\widehat{A} + \widehat{C}$ **b)** $\widehat{C} - \widehat{A}$ **c)** $3 \cdot \widehat{B}$ **d)** $8 \cdot \widehat{C}$



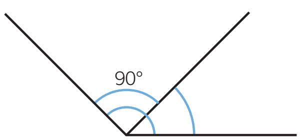
a)



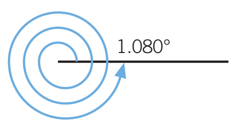
c)



b)



d)



056 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CONSTRUYE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO?

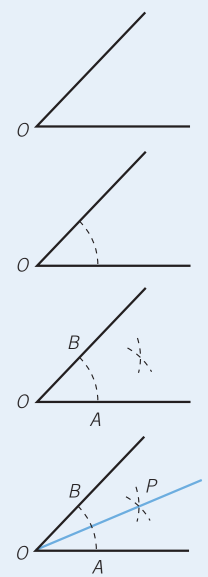
Traza la bisectriz de este ángulo.

La bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por su vértice y divide el ángulo en dos partes iguales.

PRIMERO. Con centro en el vértice *O* y cualquier abertura, se traza un arco.

SEGUNDO. Con la misma amplitud se trazan dos arcos, uno con centro en *A* y otro con centro en *B*.

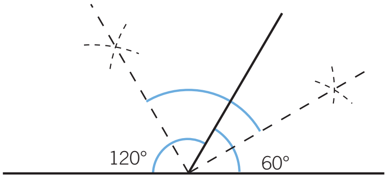
TERCERO. Los arcos se cortarán en un punto *P*. La recta que pasa por *O* y *P* es la bisectriz del ángulo.



057 ●●

Dibuja un ángulo de 60° con el transportador. Traza su adyacente. ¿Cuánto mide? Dibuja las bisectrices de los dos ángulos. ¿Qué ángulos forman?

El ángulo adyacente mide 120°.



Las bisectrices forman un ángulo de 90°.

058 ●

Realiza las siguientes sumas de ángulos.

a) 23° 45′ 10″ + 54° 7′ 32″

b) 21° 45′ 19″ + 54° 7′ 42″

c) 23° 45′ 10″ + 54° 37′ 52″

d) 132° 54′ 38″ + 32° 57′ 12″

a)
$$\begin{array}{r} 23^\circ\ 45'\ 10'' \\ +\ 54^\circ\ \ \ 7'\ 32'' \\ \hline 77^\circ\ 52'\ 42'' \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 23^\circ\ 45'\ 10'' \\ +\ 54^\circ\ 37'\ 52'' \\ \hline 78^\circ\ 82'\ 62'' \end{array}$$
$\boxed{83' = 1^\circ\ 23'}$
$\boxed{62'' = 1'\ 2''}$
$79^\circ\ 23'\ \ 2''$

b)
$$\begin{array}{r} 21^\circ\ 45'\ 19'' \\ +\ 54^\circ\ \ \ 7'\ 42'' \\ \hline 75^\circ\ 52'\ 61'' \end{array}$$
$\boxed{61'' = 1'\ 1''}$
$75^\circ\ 53'\ \ 1''$

d)
$$\begin{array}{r} 132^\circ\ 54'\ 38'' \\ +\ 32^\circ\ 57'\ 12'' \\ \hline 165^\circ\ 111'\ 50'' \end{array}$$
$\boxed{111' = 1^\circ\ 51'}$
$166^\circ\ 51'\ 50''$

059 ●

Calcula estas restas de ángulos.

a) 63° 25′ 10″ − 32° 7′ 2″

b) 63° 25′ 10″ − 30° 17′ 42″

c) 63° 25′ 10″ − 36° 45′ 42″

d) 93° 5′ 7″ − 30° 17′ 42″

e) 8° 2″ − 7° 42′ 23″

a)
$$\begin{array}{r} 63^\circ\ 25'\ 10'' \\ -\ 32^\circ\ \ \ 7'\ \ \ 2'' \\ \hline 31^\circ\ 18'\ \ \ 8'' \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 63^\circ\ 25'\ 10'' \\ -\ 30^\circ\ 17'\ 42'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 63^\circ\ 24'\ 70'' \\ -\ 30^\circ\ 17'\ 42'' \\ \hline 33^\circ\ \ \ 7'\ 28'' \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 63^\circ\ 25'\ 10'' \\ -\ 36^\circ\ 45'\ 42'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 63^\circ\ 24'\ 70'' \\ -\ 36^\circ\ 45'\ 42'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 62^\circ\ 84'\ 70'' \\ -\ 36^\circ\ 45'\ 42'' \\ \hline 26^\circ\ 39'\ 28'' \end{array}$$

d) $\begin{array}{r} 93° \;\; 5' \;\; 7'' \\ -\,30° \; 17' \; 42'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 93° \;\; 4' \; 67'' \\ -\,30° \; 17' \; 42'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1° = 60'} \begin{array}{r} 92° \; 64' \; 67'' \\ -\,30° \; 17' \; 42'' \\ \hline 62° \; 47' \; 25'' \end{array}$

e) $\begin{array}{r} 8° \qquad 2'' \\ -\;\; 7° \; 42' \; 23'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r} 7° \; 60' \;\; 2'' \\ -\;\; 7° \; 42' \; 23'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1° = 60'} \begin{array}{r} 7° \; 59' \; 62'' \\ -\;\; 7° \; 42' \; 23'' \\ \hline 0° \; 17' \; 39'' \end{array}$

060 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE MULTIPLICAN MEDIDAS COMPLEJAS DE ÁNGULOS?

Dado el ángulo $\widehat{A} = 50° \; 25' \; 35''$, halla el valor del ángulo $4 \cdot \widehat{A}$.

PRIMERO. Se multiplican grados, minutos y segundos por 4.

$$4 \cdot \widehat{A} = 4 \cdot (50° \; 25' \; 35'') = 200° \; 100' \; 140''$$

SEGUNDO. Se pasan los segundos sobrantes a minutos y los minutos sobrantes a grados.

$$200° \; 100' \; 140'' \underset{\uparrow}{\overset{140'' = 2' \, 20''}{=}} 200° \; 102' \; 20'' \underset{102' = 1° \; 42'}{\overset{\downarrow}{=}} 201° \; 42' \; 20''$$

Por tanto, resulta que: $4 \cdot \widehat{A} = 201° \; 42' \; 20''$

061 ●
Halla el doble, el triple y el cuádruple del ángulo $\widehat{A} = 22° \; 44' \; 33''$.

Doble: $2 \cdot \widehat{A} = 44° \, 88' \, 66'' = 45° \, 29' \, 6''$

Triple: $3 \cdot \widehat{A} = 66° \, 132' \, 99'' = 68° \, 13' \, 39''$

Cuádruple: $4 \cdot \widehat{A} = 88° \, 176' \, 132'' = 90° \, 58' \, 12''$

062 ●
Obtén el ángulo complementario y el suplementario de los siguientes ángulos.

a) 45° **c) 75°**
b) 15° **d) 12°**

a) Complementario: $90° - 45° = 45°$. Suplementario: $180° - 45° = 135°$.
b) Complementario: $90° - 15° = 75°$. Suplementario: $180° - 15° = 165°$.
c) Complementario: $90° - 75° = 15°$. Suplementario: $180° - 75° = 105°$.
d) Complementario: $90° - 12° = 78°$. Suplementario: $180° - 12° = 168°$.

063 ●●
Dados los ángulos $\widehat{A} = 20° \; 20' \; 20''$ y $\widehat{B} = 40° \; 40' \; 40''$, determina el valor de las amplitudes de estos ángulos.

a) $\widehat{A} + \widehat{B}$ **d) El complementario de $\widehat{A} + \widehat{B}$.**
b) $\widehat{B} - \widehat{A}$ **e) El suplementario de $\widehat{B} - \widehat{A}$.**
c) $3 \cdot \widehat{A}$ **f) El suplementario de $3 \cdot \widehat{A}$.**

a) $$\begin{array}{r} 20^\circ\ 20'\ 20'' \\ +\ 40^\circ\ 40'\ 40'' \\ \hline 60^\circ\ 60'\ 60'' \end{array} \quad \boxed{60'' = 1'} \quad \boxed{61' = 1^\circ\ 1'} \quad 61^\circ\ \ 1'$$

b) $$\begin{array}{r} 40^\circ\ 40'\ 40'' \\ -\ 20^\circ\ 20'\ 20'' \\ \hline 20^\circ\ 20'\ 20'' \end{array}$$

c) $3 \cdot (20^\circ\ 20'\ 20'') = 61^\circ\ 1'$

d) $\widehat{A} + \widehat{B} = 61^\circ\ 1'$

$$\begin{array}{r} 90^\circ \\ -\ 61^\circ\ \ 1' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 89^\circ\ 60' \\ -\ 61^\circ\ \ 1' \\ \hline 28^\circ\ 59' \end{array}$$

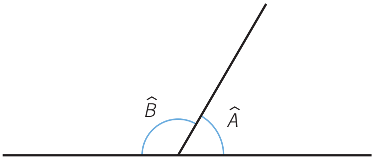
e) $\widehat{B} - \widehat{A} = 20^\circ\ 20'\ 20''$

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ -\ \ 20^\circ\ 20'\ 20'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 179^\circ\ 60' \\ -\ \ 20^\circ\ 20'\ 20'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 179^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ \ 20^\circ\ 20'\ 20'' \\ \hline 159^\circ\ 39'\ 40'' \end{array}$$

f) $3 \cdot \widehat{A} = 61^\circ\ 1'$

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ -\ \ 61^\circ\ \ 1' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 179^\circ\ 60' \\ -\ \ 61^\circ\ \ 1' \\ \hline 118^\circ\ 59' \end{array}$$

064 **Mide con el transportador el ángulo $\widehat{A}$. ¿Cuánto mide el ángulo $\widehat{B}$?**

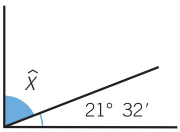


$\widehat{A} = 60^\circ$

$\widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

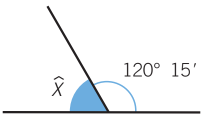
065 **Calcula la amplitud del ángulo $\widehat{X}$ en cada figura.**

a)



$$\begin{array}{r} 90^\circ \\ -\ 21^\circ\ 32' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 89^\circ\ 60' \\ -\ 21^\circ\ 32' \\ \hline 68^\circ\ 28' \end{array}$$

b)



$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ -\ 120^\circ\ 15' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1^\circ = 60'} \begin{array}{r} 179^\circ\ 60' \\ -\ 120^\circ\ 15' \\ \hline 59^\circ\ 45' \end{array}$$

066 ●●

Dados $\widehat{A} = 25°\ 12'\ 45''$ y $\widehat{B} = 18°\ 25'\ 51''$, calcula la medida de estos ángulos.

a) El complementario de $\widehat{A}$.

b) El suplementario de $\widehat{B}$.

a) $\begin{array}{r} 90° \\ -\ 25°\ 12'\ 45'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1° = 60'} \begin{array}{r} 89°\ 60' \\ -\ 25°\ 12'\ 45'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1° = 60'} \begin{array}{r} 89°\ 59'\ 60'' \\ -\ 25°\ 12'\ 45'' \\ \hline 64°\ 47'\ 15'' \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 180° \\ -\ 18°\ 25'\ 51'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1° = 60'} \begin{array}{r} 179°\ 60' \\ -\ 18°\ 25'\ 51'' \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1° = 60'} \begin{array}{r} 179°\ 59'\ 60'' \\ -\ 18°\ 25'\ 51'' \\ \hline 161°\ 34'\ \ 9'' \end{array}$

067 ●●

Cuánto tiene que medir un ángulo para que sea igual a su suplementario? ¿Y para que sea igual a su complementario?

Para que un ángulo sea igual a su suplementario, ha de medir: $180° : 2 = 90°$, y para que sea igual a su complementario: $90° : 2 = 45°$.

068 ●●●

Dos ángulos son complementarios y uno vale el triple que el otro. Halla el valor de dichos ángulos.

Un ángulo es x y el otro es $3 \cdot x$. Luego:

$$x + 3 \cdot x = 90 \rightarrow 4 \cdot x = 90;\ x = \frac{90}{4} = 22{,}5$$

Un ángulo mide $22°\ 30'$ y el otro mide $67°\ 30'$.

069 ●●●

Dos ángulos son suplementarios y uno de ellos es cuatro veces mayor que el otro. Halla el valor de dichos ángulos.

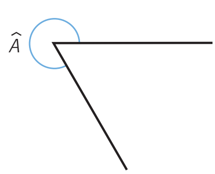
Un ángulo es x y el otro es $4 \cdot x$. Luego:

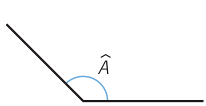
$$x + 4 \cdot x = 180 \rightarrow 5 \cdot x = 180;\ x = \frac{180}{5} = 36$$

Un ángulo mide 36° y el otro mide 144°.

070 ●

Utiliza el transportador para medir estos ángulos.

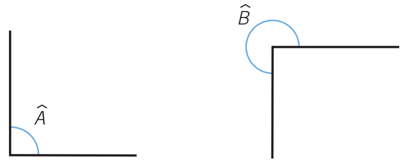
a)


b)


a) $\widehat{A} = 300°$

b) $\widehat{A} = 135°$

071 Determina la medida de estos dos ángulos, y resuelve las operaciones que se indican.



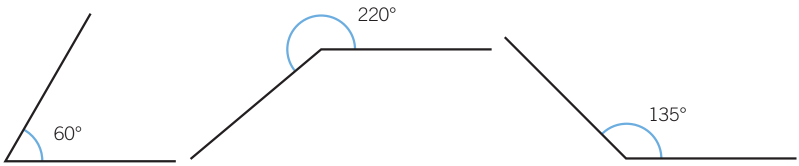
a) $\widehat{A} + \widehat{B}$ **b)** $\widehat{B} - \widehat{A}$ **c)** $3 \cdot \widehat{A}$ **d)** $2 \cdot \widehat{B}$

a) $90° + 270° = 360°$
b) $270° - 90° = 180°$
c) $3 \cdot 90° = 270°$
d) $2 \cdot 270° = 540°$

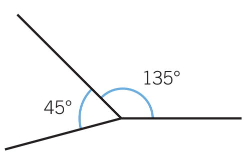
072 Con la ayuda del transportador, dibuja los ángulos $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 220°$ y $\widehat{C} = 135°$. Después, dibuja los ángulos.

a) $\widehat{A} + \widehat{C}$ **b)** $\widehat{C} - \widehat{A}$ **c)** $3 \cdot \widehat{B}$ **d)** $8 \cdot \widehat{C}$

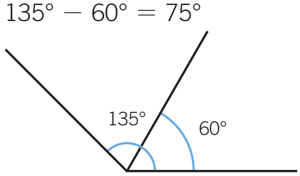
Halla su medida con la ayuda del transportador.



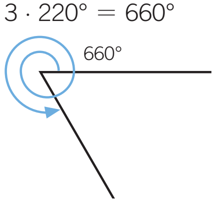
a) $60° + 135° = 195°$



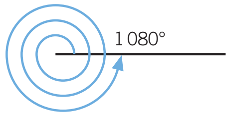
b) $135° - 60° = 75°$



c) $3 \cdot 220° = 660°$



d) $8 \cdot 135° = 1\,080°$



073 ●●

Los rayos del sol entran por la mañana en la habitación de Luis y dan en la pared con una determinada inclinación. A las 7 de la mañana de un día de verano, ese ángulo es de 22° 14′. Cada hora que pasa, el ángulo de inclinación aumenta en 2° 10′ 20″.

a) ¿Qué ángulo tendrá a las 8 de la mañana?
b) ¿Y a las 9 de la mañana?
c) ¿Y a la 1 del mediodía?

a) $22° \; 14' + 2° \; 10' \; 20'' = 24° \; 24' \; 20''$ ángulo de inclinación a las 8 de la mañana.

b) $24° \; 24' \; 20'' + 2° \; 10' \; 20'' = 26° \; 34' \; 40''$ ángulo de inclinación a las 9 de la mañana.

c) $26° \; 34' \; 40'' + 4 \cdot (2° \; 10' \; 20'') = 26° \; 34' \; 40'' + 8° \; 41' \; 20'' =$
$= 35° \; 16'$ ángulo de inclinación a la 1 del mediodía.

074 ●●

Tres amigos, Marcos, Roberto y Ricardo, se están comiendo un pastel circular:

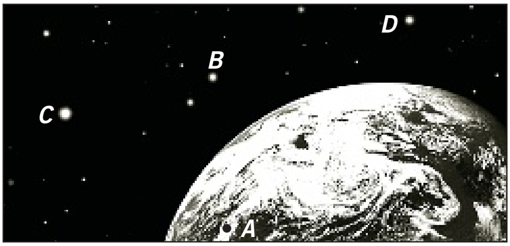
- **Marcos se ha comido un trozo equivalente a 35° 10′.**
- **Roberto se ha comido un trozo de 40° 30′.**
- **Ricardo se ha comido un trozo de 50° 40′.**

a) ¿Cuánto mide el trozo de pastel que se han comido entre los tres?
b) ¿Cuánto mide el trozo que queda?

a) $35° \; 10' + 40° \; 30' + 50° \; 40' = 126° \; 20'$
b) $360° - 126° \; 20' = 233° \; 40'$

075 ●●●

Desde un determinado punto de la Tierra, al observar el firmamento, no podemos medir directamente las distancias y, para señalar las estrellas, se utilizan los ángulos. Observa la fotografía del firmamento.



Si la distancia entre las estrellas *B* y *C* es de 47° 22′ 19″ (ángulo $\widehat{BAC}$), y la distancia entre las estrellas *C* y *D* (ángulo $\widehat{CAD}$) es de 93° 13′ 15″, calcula la distancia (el ángulo) entre las estrellas *B* y *D*.

$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} - \widehat{CAB} = 93° \; 13' \; 15'' - 47° \; 22' \; 19'' =$
$= 45° \; 50' \; 56''$ distancia entre las estrellas B y D.

076 ●●●

Calcula el valor exacto de los ángulos que forman la aguja horaria y la minutero de un reloj a las horas siguientes.

a) A las 5 de la mañana.

b) A las 5 y cuarto.

c) A las 5 y media.

d) A las 12 y 25 minutos.

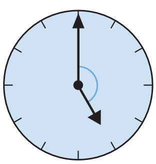
e) Escribe dos horas que tengan el mismo ángulo.

MINUTERO

$$\left.\begin{array}{r} 60 \text{ min} \rightarrow 360° \\ 1 \text{ min} \rightarrow x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6° \\ \text{La aguja del minutero recorre } 6° \text{ cada minuto.} \end{array}$$

HORARIA

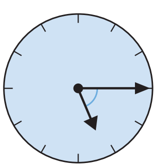
$$\left.\begin{array}{r} 12 \cdot 60 \text{ min} \rightarrow 360° \\ 1 \text{ min} \rightarrow x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0{,}5° \\ \text{La aguja horaria recorre } 0{,}5° \text{ cada minuto.} \end{array}$$

a) 

MINUTERO $\rightarrow$ 0°

HORARIA

Ángulo $= 5 \cdot 60 \cdot 0{,}5° = 150°$

b) 

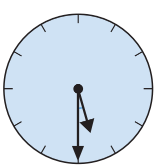
MINUTERO

$15 \cdot 6° = 90°$

HORARIA

$(5 \cdot 60 + 15) \cdot 0{,}5° = 157{,}5°$

Ángulo $= 157{,}5° - 90° = 67{,}5°$

c) 

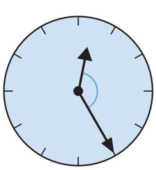
MINUTERO

$30 \cdot 6° = 180°$

HORARIA

$(5 \cdot 60 + 30) \cdot 0{,}5° = 165°$

Ángulo $= 180° - 165° = 15°$

d) 

MINUTERO

$25 \cdot 6° = 150°$

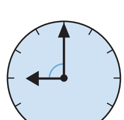
HORARIA

$25 \cdot 0{,}5° = 12{,}5°$

Ángulo $= 150° - 12{,}5° = 137{,}5°$

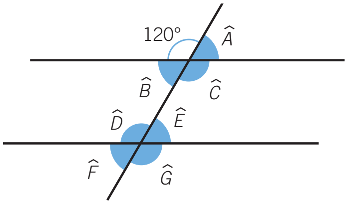
e) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\rightarrow$ 90°
A las 3 h



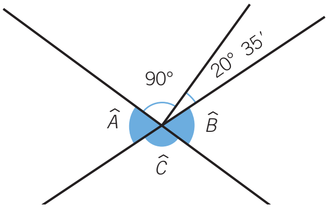
$\rightarrow$ 90°
A las 9 h

077 Si el ángulo indicado vale 120°, calcula el valor de los restantes ángulos de la figura.



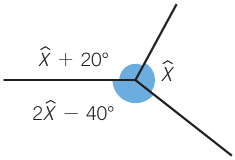
$\widehat{C} = \widehat{G} = \widehat{D} = 120°$ $\qquad$ $60° = \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{E} = \widehat{F}$

078 Halla el valor de cada uno de los ángulos de esta figura:



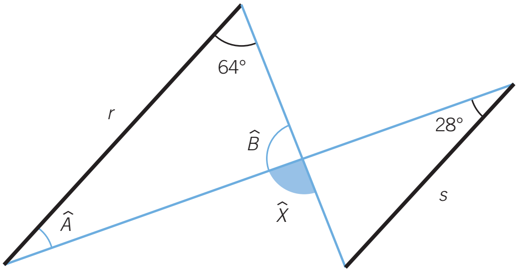
$\widehat{A} = \widehat{B} = 180° - 90° - (20°\ 35') = 90° - (20°\ 35') = 69°\ 25'$
$\widehat{C} = 90° + (20°\ 35') = 110°\ 35'$

079 En el siguiente dibujo aparecen tres ángulos. Halla el valor de $\widehat{X}$.



$\widehat{X} + \widehat{X} + 20° + 2\widehat{X} - 40° = 360° \rightarrow 4\widehat{X} = 380° \rightarrow \widehat{X} = 95°$

080 Calcula $\widehat{X}$ sabiendo que las rectas *r* y *s* son paralelas.

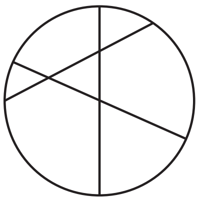


$\widehat{A} = 28°$, luego $\widehat{B} = 180° - (64° + 28°) = 88°$.
Por ser adyacentes $\widehat{B}$ y $\widehat{X} \rightarrow \widehat{X} = 180° - 88° = 92°$.

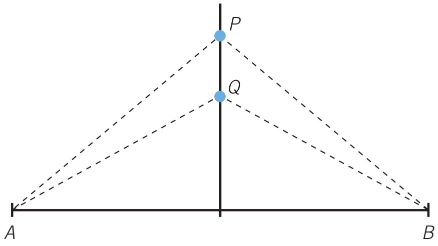
081 **Queremos dividir un círculo en siete partes (no tienen por qué ser iguales) mediante tres segmentos. ¿Cómo lo harías?**

Las rectas no tienen que ser secantes en el mismo punto y los tres puntos de corte deben estar dentro del círculo.

Para conseguir siete partes, la segunda recta debe cortar a la primera, y la tercera recta tiene que cruzar tres de las cuatro regiones existentes, por lo que debe cortar a las otras dos rectas dentro del círculo y no en el mismo punto.



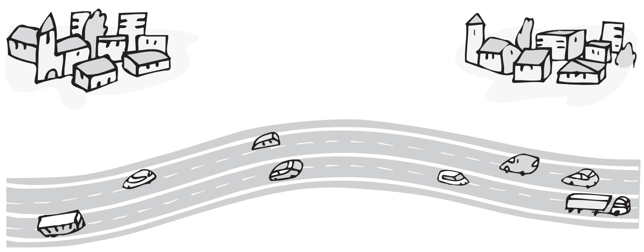
082 **Dibuja un segmento de extremos *A* y *B* en tu cuaderno y traza su mediatriz. A continuación, elige un punto cualquiera *P* de la mediatriz, y mide las distancias que hay desde *P* hasta los extremos *A* y *B*. Luego elige otro punto *Q* de la mediatriz y haz lo mismo. ¿Qué conclusión obtienes?**



La distancia de los extremos del segmento a un punto de la mediatriz es la misma.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

083 **Los habitantes de Villa Mayor y Villa Menor discuten sobre la construcción de una autopista. Según los proyectos, la autopista tendrá una única salida que irá a los dos pueblos.**



Villa Mayor es un pueblo grande, con poca población anciana, casi todos sus habitantes trabajan en la industria y en el comercio, y tiene varios polígonos industriales.

Por su parte, Villa Menor es un pueblo pequeño, la mayor parte de la población está jubilada, y los habitantes que aún no lo están se dedican casi íntegramente a la agricultura.

Sus alcaldes no se ponen de acuerdo.

Eres capaz de… Comprender

a) **¿Por qué opina el alcalde de Villa Mayor que la salida debe estar más cerca de su pueblo?**

b) **¿Por qué opina el alcalde de Villa Menor que la salida debe estar más cerca de su pueblo?**

Eres capaz de… Resolver

c) **Si los técnicos deciden que la salida se colocará a la misma distancia de los dos pueblos, ¿dónde hay que colocarla?**

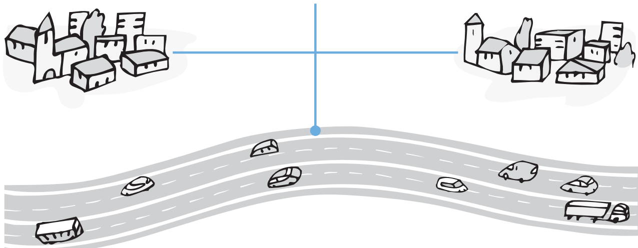
Eres capaz de… Decidir

d) **¿Crees que es justo colocar la salida a la misma distancia de los dos pueblos?**

a) Porque, al tener un polígono industrial, existen muchos más desplazamientos en esta localidad.

b) Porque al tener una población envejecida, el riesgo de enfermedad es mayor y necesita traslados rápidos.

c) Trazando la mediatriz del segmento que une los dos pueblos, la distancia de cada pueblo a un punto de la mediatriz es la misma.

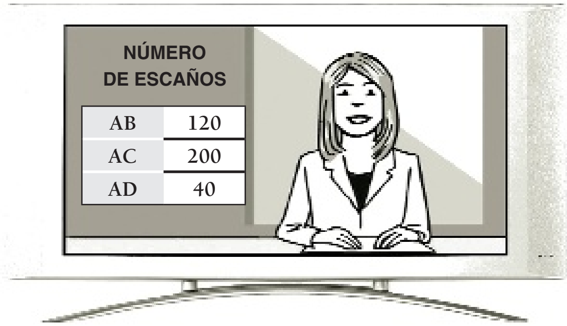


d) Respuesta abierta. Por ejemplo: es justo, porque así todos los habitantes tienen las mismas ventajas. Es injusto porque los desplazamientos por enfermedad deberían ser prioritarios.

084 ●●●

Todos los telediarios de las televisiones nacionales han informado de los resultados de las elecciones de ayer.

La manera de presentar los resultados ha variado. En la mayoría dan el reparto de escaños mediante una tabla en la que aparece el partido y el resultado obtenido.



Y solo una cadena de televisión ha dispuesto los resultados mediante un gráfico, en el cual el reparto de escaños es proporcional al ángulo que ocupan.

Eres capaz de… Comprender

a) ¿Cuántos escaños ha recibido cada uno de los partidos AB, AC y AD?

Eres capaz de… Resolver

b) Si el gráfico representa los 360 escaños totales, ¿cuántos grados le corresponden a la representación de un escaño?

Eres capaz de… Decidir

c) ¿Crees que son correctos los datos representados?

a) AB ha recibido 120 escaños; AC, 200 escaños, y AD, 40 escaños.

b) 180° representan 360 escaños, luego 1° representa 2 escaños.

c) $1° \xrightarrow{\text{representa}}$ 2 escaños

$x \xrightarrow{\quad\quad}$ 40 escaños $\quad x = 20°$ representa AB

60° representa AB y 100° representa AC

Los datos están bien representados, porque los ángulos son correctos.